Waga szalkowa i uogólniony problem fałszywej monety

Marcel Kołodziejczyk

Hugo Steinhaus w „Kalejdoskopie matematycznym" ([7]) przedstawił następujące zadania:

> *Mamy dziewięć monet pozornie jednakowych. Wiemy, że jedna z nich (nie wiemy która) jest fałszywa i waży mniej od pozostałych. Trzeba ją wykryć w dwóch ważeniach na wadze szalkowej bez użycia odważników (wolno kłaść po kilka monet na każdej szalce).*

oraz

> *Mamy trzynaście monet, z których dokładnie jedna jest fałszywa, ale nie wiemy, czy jest cięższa, czy lżejsza od monet dobrych. Mamy ją wykryć w trzech ważeniach na wadze szalkowej.*

Podobne zadania związane z użyciem wagi szalkowej można znaleźć w wielu innych publikacjach, np. [3], [4], [5].

W niniejszej pracy przedstawiam rozważania dotyczące możliwie szerokiej klasy podobnych problemów. Łącznie rozważę 48 wariantów zadań Steinhausa. Ze względu na dużą ich liczbę oraz znaczne podobieństwo podam treści wszystkich tych wariantów łącznie. Konkretny wariant będzie wyznaczony przez wybór pięciu liter.

> *Dane są dwie liczby naturalne n i k.*
> *Wiemy, że wśród n monet*
> *A) na pewno*
> *B) być może*
> *jedna moneta jest fałszywa i ma inną masę niż pozostałe monety.*
> *C) Wiemy*
> *D) Nie wiemy*
> *czy jest ona cięższa, czy lżejsza od pozostałych monet.*
> *Oprócz tego mamy do dyspozycji*
> *E) 0*
> *F) 1*
> *G) nieskończenie wiele*
> *dodatkowych monet dobrych.*
> *Naszym zadaniem jest ustalić, czy da się za pomocą k ważeń na wadze szalkowej, bez użycia odważników (używamy tylko monet)*
> *H) stwierdzić czy któraś z monet jest fałszywa, a jeśli tak, to wskazać ją.*
> *I) stwierdzić czy któraś z monet jest fałszywa, a jeśli tak, to wskazać ją i określić, czy jest cięższa, czy lżejsza od dobrych monet.*
> *Ponadto od tych k ważeń*
> *J) wymaga się*
> *K) nie wymaga się*
> *aby to jakie monety biorą udział w kolejnych ważeniach było wiadome jeszcze przed wykonaniem pierwszego ważenia (czyli nie możemy uzależnić wyboru monet do ważenia od wyników wcześniejszych ważeń).*

Treść pojedynczego wariantu jest wyznaczona przez wybranie jednej z liter A lub B, jednej z liter C lub D, jednej z E, F lub G oraz H lub I i jednej z liter J lub K.

Oryginalne zadania Steinhausa można określić zatem jako warianty ACEHK z $n=9$ i $k=2$ oraz ADEHK z $n=13$ i $k=3$ naszego uogólnionego zadania.
Łącznie rozważamy $2\cdot 2\cdot 3\cdot 2\cdot 2=48$ wariantów zadania ((A/B)(C/D)(E/F/G)(H/I)(J/K)), przy czym niektóre z nich tylko nieznacznie różnią się od innych. Na przykład w wariancie ACEIJ wymaga się ustalenia, czy fałszywa moneta jest cięższa, czy lżejsza od monet dobrych (I), podczas gdy informację taką mamy daną (C). Wariant ten zatem nie różni się istotnie od ACEHJ.
Często w pracy będę pisać jednocześnie o pewnych grupach wariantów zadania. Będę wówczas niektóre z liter zastępować gwiazdką, co będzie oznaczało dowolność wyboru litery na danej pozycji. Na przykład zapis AC*** oznacza wszystkie zadania, w których wiemy, że na pewno jedna z monet jest fałszywa i wiemy, czy jest ona cięższa, czy lżejsza od pozostałych monet.
Dla ustalonych n, k oraz wariantu zadania odpowiedź na postawione w zadaniu pytanie może być twierdząca lub przecząca. W przypadku odpowiedzi przeczącej muszę uzasadnić, że faktycznie k ważeń nie wystarcza do wskazania fałszywej monety, natomiast w przypadku odpowiedzi twierdzącej muszę podać algorytm wykonywania ważeń.

Podam teraz w tabelach wyniki, które następnie uzasadnię.
W wariantach *C*** (wiemy, czy fałszywa moneta jest cięższa, czy lżejsza od pozostałych monet) odpowiedź na postawione w zadaniu pytanie jest pozytywna, gdy

	E (nie mamy monet dodatkowych)		F/G (mamy dodatkowe dobre monety)
	J (ważenia zaplanowane z góry)	K (nie trzeba planować ważeń z góry)	
A (na pewno któraś moneta jest fałszywa) **Zadanie ma sens dla $n\geq 1$**	$n\leq 3^k$	$n\leq 3^k$	$n\leq 3^k$
B (być może któraś moneta jest fałszywa)	$n\leq 3^k-1$ $n\neq 1$ $n\neq 3^k-2$	$n\leq 3^k-1$ $n\neq 1$	$n\leq 3^k-1$

W wariantach *D*** (nie wiemy, czy fałszywa moneta jest cięższa, czy lżejsza od pozostałych monet) odpowiedź na postawione w zadaniu pytanie jest pozytywna, gdy

		E (nie mamy dodatkowych monet)	F/G (mamy dodatkowe dobre monety)
A (na pewno któraś moneta jest fałszywa) **Zadanie ma sens dla $n\geq 1$**	H (nie musimy ustalać czy fałszywa moneta jest cięższa czy lżejsza)	$n\leq (3^k-1)/2$ $n\neq 2$	$n\leq (3^k+1)/2$
	I (mamy ustalić czy fałszywa moneta jest cięższa czy lżejsza)	$n\leq (3^k-3)/2$ $n\neq 1$ $n\neq 2$	$n\leq (3^k-1)/2$
B (być może któraś moneta jest fałszywa)		$n\leq (3^k-3)/2$ lub $n=0$ $n\neq 1$ $n\neq 2$	$n\leq (3^k-1)/2$

Na przykład nie jest możliwe wskazanie wśród 40 monet fałszywej monety poprzez wykonanie 4 ważeń na wadze szalkowej, gdy nie mamy dodatkowych monet, nie wiemy, czy fałszywa moneta

w ogóle istnieje i czy gdyby istniała byłaby cięższa, czy lżejsza od pozostałych ($40>39=(3^4-3)/2$). Jest to odpowiedź wspólna dla wszystkich wariantów BDE**.
Autorzy zbioru zadań [5] piszą, że nie znają odpowiedzi dla wariantu ADEHK.

Należy zauważyć, że w wariantach A**** zadanie ma sens tylko dla $n\geq1$. Istotnie, skoro na pewno jedna moneta jest fałszywa, to nie może być $n=0$.

Z powyższych tabel wynika, że gdy mamy do dyspozycji dodatkowe monety, wówczas nie ma znaczenia ich liczba. Zawsze poradzimy sobie wykorzystując tylko jedną z nich.

Niemal zawsze ważenia można zaplanować z góry. Jedynymi wyjątkami są warianty BCE*K, w przypadku których nie możemy zaplanować ważeń gdy $n=3^k-2$.

Pokażemy, że zależności między n i k podane w tabelach są warunkami koniecznymi i dostatecznymi do tego, by wymagane ważenia dało się wykonać.

Konieczność warunków podanych w tabelach

Rozumowanie będzie polegało na zliczaniu możliwych wyników k ważeń i porównywaniu ich z ilością możliwych odpowiedzi do danego zadania. Jeśli możliwych wyników ważeń okaże się mniej niż możliwych odpowiedzi, wówczas informacja uzyskana po wykonaniu ważeń nie jest wystarczająca do wskazania odpowiedzi.

*Wiemy, czy fałszywa moneta jest cięższa, czy lżejsza od pozostałych monet (warianty *C***)*

W wariantach AC*** (na pewno któraś moneta jest fałszywa i wiemy czy jest cięższa, czy lżejsza od pozostałych, w szczególności zadanie nie ma sensu gdy $n=0$) mamy pokazać, że gdy $n>3^k$ wówczas odpowiednich ważeń nie da się wykonać. Istotnie, jedno ważenie daje jeden z trzech wyników (równowaga, wychylenie wagi w prawą lub w lewą stronę). k ważeń daje jeden z 3^k wyników. Tymczasem fałszywa moneta może być jedną z $n>3^k$ monet. Informacja uzyskana w k ważeniach nie pozwala zatem jednoznacznie wskazać fałszywej monety.

Podobnie, w wariantach BC*** możliwych wyników ważeń jest 3^k natomiast możliwych odpowiedzi jest $n+1$ (któraś z n monet jest fałszywa lub wszystkie monety są dobre). Gdy $n>3^k-1$, wówczas $n+1>3^k$, zatem k ważeń nie wystarczy.

Warunek $n\neq1$ w przypadkach BCE** wynika stąd, że jeśli mamy tylko jedną monetę i nie mamy żadnych innych monet, moneta ta może być równie dobrze fałszywa jak i prawdziwa (nie mamy żadnych wzorców do porównania).

W przypadku BCE*J muszę pokazać, że k ważeń nie wystarczy do wskazania fałszywej monety wśród 3^k-2 monet. Przeprowadzę dowód nie wprost. Oczywistym jest, że w każdym ważeniu na prawej i na lewej szalce powinna znajdować się taka sama liczba monet. Ponumerujmy monety liczbami 1, 2,…, 3^k-2. Zaplanowanie k ważeń oznacza przyporządkowanie każdej monecie k wartości określających położenie tejże monety w poszczególnych ważeniach. Dokładniej, i-tej monecie przyporządkowana zostaje k-tka $(w^i_1,w^i_2,\ldots,w^i_k)$, gdzie $w^i_j\in\{P,L,0\}$. $w^i_j=P$, $w^i_j=L$, $w^i_j=0$ oznaczają, że moneta o numerze i w j-tym ważeniu będzie leżała odpowiednio na prawej, na lewej szalce, nie będzie brała udziału w j-tym ważeniu. k-tki przyporządkowane różnym monetom muszą być różne i żadna z nich nie może być k-tką zerową (0,0,…,0). Wszystkich niezerowych k-tek jest 3^k-1, natomiast monet jest 3^k-2. Oznacza to, że monetom przyporządkowane są wszystkie niezerowe k-tki z wyjątkiem jednej (w_1,w_2,…,w_k). Ponieważ k-tka ta jest niezerowa, więc $w_j \neq 0$ dla pewnego j. Załóżmy, bez zmniejszania ogólności, że w_j=L. Liczba tych i, dla których w^i_j=L wynosi wówczas 3^{k-1}-1, natomiast liczba tych i, dla których w^i_j=P wynosi 3^{k-1}. Oznacza to, że w j-tym ważeniu na lewej szalce będzie o jedną monetę mniej niż na prawej szalce, co prowadzi do sprzeczności.

*Nie wiemy, czy fałszywa moneta jest cięższa, czy lżejsza od pozostałych monet (warianty *D***)*

Zajmijmy się wariantami AD(F/G)I*. Ponieważ musimy ustalić, czy fałszywa moneta (która na pewno istnieje) jest cięższa czy lżejsza od pozostałych, zatem w przeprowadzonych ważeniach nie mogą wystąpić same równowagi (uniemożliwiałoby to określenie wagi fałszywej monety). Możliwych wyników ważeń jest zatem co najwyżej 3^k-1, natomiast możliwych odpowiedzi 2n (należy wskazać jedną z n monet i określić czy jest cięższa, czy lżejsza od pozostałych). Jeśli n>(3^k-1)/2, wówczas 2n>3^k-1, zatem k ważeń nie wystarczy.

Dla przypadków BD(F/G)** zauważmy, że nawet jeśli nie musimy określić czy fałszywa moneta jest cięższa, czy lżejsza od pozostałych, to informację tą i tak uzyskujemy. Możliwych wyników ważeń jest 3^k natomiast możliwych odpowiedzi jest 2n+1 (któraś z n monet jest cięższa lub lżejsza albo wszystkie monety są dobre). Jeśli n>(3^k-1)/2, wówczas 2n+1>3^k, zatem k ważeń nie wystarczy.

Przypadki AD(F/G)H*. Załóżmy, że k ważeń wystarczy do spełnienia warunków narzuconych przez zadanie. Możliwych wyników ważeń jest 3^k. Gdy wynikiem tym będzie k równowag nie będziemy w stanie określić czy fałszywa moneta jest cięższa, czy lżejsza od pozostałych, natomiast gdy w co najmniej jednym z ważeń waga się wychyli, wówczas nie tylko wskażemy fałszywą monetę, ale dodatkowo określimy jej wagę względem dobrych monet. Daje to nierówność 2(n-1)+1≤3^k, czyli n≤(3^k+1)/2.

W przypadkach *DE** podany w tabeli warunek n≠2 wynika stąd, że jeśli mamy dokładnie dwie monety i nie wiemy czy fałszywa moneta jest cięższa czy lżejsza od monet dobrych to nie możemy wskazać fałszywej monety.

Warunek n≠1 w wariantach BDE** z kolei wynika stąd, że jeśli mamy tylko jedną monetę i nie mamy żadnych innych monet, moneta ta może być równie dobrze fałszywa jak i prawdziwa (nie mamy żadnych wzorców do porównania). Podobnie w przypadku ADEI* co prawda wiemy, że jedyna moneta jest fałszywa, ale nie jesteśmy w stanie stwierdzić, czy jest ona cięższa, czy lżejsza od monet prawdziwych (których nie mamy do dyspozycji).

Uzasadnimy teraz nierówność n≤(3^k-3)/2 dla przypadku ADEI*. Załóżmy, że n oraz k są takie, że odpowiednie ważenia można wykonać. Niech m będzie liczbą monet, które położymy na każdej szali w pierwszym ważeniu. Jeśli w ważeniu tym wystąpi równowaga, wówczas fałszywą monetą jest jedna z n-2m monet, które nie brały udziału w tym ważeniu. Pozostałe k-1 ważeń muszą nam zatem umożliwić wykrycie fałszywej monety i ustalenie jej wagi wśród n-2m monet. Daje to nierówność

(1) $$2(n-2m) \leq 3^{k-1}.$$

Jeżeli w pierwszym ważeniu waga wychyliła się, to fałszywą monetą jest któraś z 2m monet biorących udział w pierwszym ważeniu. Pozostałe k-1 ważeń muszą nam zatem umożliwić wykrycie fałszywej monety (i ustalenie jej wagi) wśród 2m monet. Daje to nierówność $2\cdot 2m\le 2\cdot 3^{k-1}$, czyli

(2) $$2m\le 3^{k-1}.$$

Czynnik 2 po prawej stronie nierówności bierze się stąd, że w pierwszym ważeniu waga mogła wychylić się w prawo lub w lewo. Po uwzględnieniu nieparzystości 3^{k-1}, nierówności te przyjmują postać

$$2(n-2m)\le 3^{k-1}-1$$
$$2m\le 3^{k-1}-1.$$

Dodając do pierwszej z tych nierówności drugą pomnożoną stronami przez 2 dostajemy $2n\le 3\cdot 3^{k-1}-3$, czyli $n\le (3^k-3)/2$.

W przypadku BDE** zauważmy, że jeśli wykryliśmy fałszywą monetę, to w którymś z ważeń waga musiała się wychylić. Oznacza to, że nie tylko wykryliśmy fałszywą monetę, ale także ustaliliśmy, czy jest ona cięższa, czy lżejsza od monet prawdziwych. Musi być zatem spełniona nierówność $n\le (3^k-3)/2$ pokazana dla wariantów ADEI*.

Dowód tego, że dla wariantów ADEH* nierówność $n\le (3^k-1)/2$ musi być spełniona jest podobny do dowodu nierówności $n\le (3^k-3)/2$ dla przypadku ADEI*. Jedyna różnica polega na tym, że w przypadku wystąpienia równowagi w pierwszym ważeniu pozostałe k-1 ważeń muszą nam umożliwić wykrycie fałszywej monety wśród n-2m monet lub ustalenie, że wszystkie monety są prawdziwe. Nierówność (1) przybierze postać $2(n-2m-1)+1\le 3^{k-1}$. (Zauważmy, że jeśli nie wszystkie wyniki ważeń były równowagami, wówczas nie tylko wskażemy fałszywą monetę, ale także ustalimy, czy jest ona cięższa, czy lżejsza od monet prawdziwych.)

Udowodniliśmy, że warunki podane w tabelach są konieczne do tego, aby możliwe było wykonanie ważeń spełniających wymagania określone w treści zadania. Musimy teraz pokazać, że warunki te są także dostateczne.

Dostateczność warunków podanych w tabelach

Warianty BCEIJ oraz BDEIJ

Pokazywanie dostateczności podanych warunków zaczniemy od rozpatrzenia wariantów BCEIJ i BDEIJ, gdyż stawiają najwięcej wymagań. Nie tylko musimy zaplanować ważenia z góry, nie wiemy, czy któraś moneta jest fałszywa, a jeśli jest to musimy ustalić, czy jest cięższa, czy lżejsza od monet dobrych, ale także nie dysponujemy monetami dodatkowymi. W pozostałych wariantach dostateczność podanych warunków pokażemy wykorzystując konstrukcje dla wariantów BCEIJ i BDEIJ.

W obu tych wariantach k ważeń musimy zaplanować z góry. Oznacza to, że każdej z n monet trzeba przyporządkować k-tkę $(w_1,w_2,\ldots,w_k)\subset\{P,L,0\}^k$. Jeśli monecie przyporządkowana została k-tka $(w_1,w_2,\ldots,w_k)$, to $w_j=P$, $w_j=L$, $w_j=0$ oznaczają, że moneta ta w j-tym ważeniu będzie leżała odpowiednio na prawej szalce, na lewej szalce, nie będzie brała udziału w j-tym ważeniu. Różnym monetom muszą być przyporządkowane różne k-tki. W przeciwnym razie monety te byłyby nierozróżnialne za pomocą zaplanowanych ważeń. k-tki przyporządkowane monetom tworzą n elementowy podzbiór $A\subset\{P,L,0\}^k$. Chcemy, by w każdym ważeniu na obu szalkach leżała taka sama liczba monet, czyli dla i=1, 2, …,k zbiory $\{(t_1,t_2,\dots,t_k,)\in A\colon t_i=P\}$ i $\{(t_1,t_2,\dots,t_k,)\in A\colon t_i=L\}$ powinny być równoliczne.

Przejdźmy do wariantu BCEIJ. Bez zmniejszania ogólności załóżmy, że fałszywa moneta (jeśli istnieje) jest cięższa od monet prawdziwych. Załóżmy ponadto, że dla każdej pary k, n spełniającej warunki podane w tabeli istnieje n elementowy zbiór $\Delta^n{}_k\subset\{P,L,0\}^k$ taki, że $(0,0,\dots,0)\notin\Delta^n{}_k$ oraz dla każdego $i\in\{1,2,\dots,k\}$ zbiory $\{(t_1,t_2,\dots,t_k,)\in\Delta^n{}_k\colon t_i=P\}$ i $\{(t_1,t_2,\dots,t_k,)\in\Delta^n{}_k\colon t_i=L\}$ są równoliczne. Każdej z n monet przyporządkujmy inny element zbioru $\Delta^n{}_k$. Zauważmy, że zaplanowane w ten sposób k ważeń pozwala wskazać fałszywą monetę (jeśli taka istnieje). Istotnie, zapiszmy wynik k ważeń w postaci k-tki $(w_1,w_2,\dots,w_k)$, przy czym $w_j=P$, $w_j=L$, $w_j=0$ oznaczają, że w j-tym ważeniu waga wychyliła się odpowiednio w prawo, w lewo, nie wychyliła się. Jeśli żadna moneta nie jest fałszywa to otrzymamy k-tkę zerową (0,0,…,0). Jeśli natomiast któraś z monet jest fałszywa to otrzymamy k-tkę identyczną z tą, która została przyporządkowana fałszywej monecie w czasie planowania ważeń. Pozostaje zatem pokazać, że:

Dla każdego $k\geq0$ i n takiego, że $2\leq n\leq3^k-3$ lub $n=0$ lub $n=3^k-1$ istnieje n elementowy $\Delta^n{}_k\subset\{P,L,0\}^k$ zbiór taki, że $(0,0,\dots,0)\notin\Delta^n{}_k$ oraz dla każdego $i\in\{1,2,\dots,k\}$ zbiory $\{(t_1,t_2,\dots,t_k)\in\Delta^n{}_k\colon t_i=P\}$ i $\{(t_1,t_2,\dots,t_k)\in\Delta^n{}_k\colon t_i=L\}$ są równoliczne.

Zbiory $\Delta^n{}_k$ skonstruujemy indukcyjnie.
Dla dowolnego $k\geq0$ określamy $\Delta^0{}_k=\varnothing$
oraz dla $k\geq1$ $\Delta^2{}_k=\{(L,0,\dots,0), (P,0,\dots,0)\}$
oraz dla $k\geq2$
$\Delta^3{}_k=\{(L,P,0,\dots,0), (P,0,0,\dots,0), (0,L,0,\dots,0)\}$
$\Delta^4{}_k=\{(P,0,0,\dots,0), (L,0,0,\dots,0), (0,P,0,\dots,0), (0,L,0,\dots,0)\}$
$\Delta^5{}_k=\{(L,P,0,\dots,0), (P,0,0,\dots,0), (0,L,0,\dots,0), (P,P,0,\dots,0), (L,L,0,\dots,0)\}$
Rozpoczynamy teraz właściwą konstrukcję wykorzystując indukcję po k. Dla k=0 i k=1 skonstruowaliśmy już wszystkie wymagane zbiory $\Delta^n{}_k$.
Niech $k\geq2$ i $2\leq n\leq3^k-3$ lub $n=0$ lub $n=3^k-1$. Zakładamy, że wszystkie wymagane zbiory $\Delta^n{}_m$ dla m<k zostały już określone. Ponieważ skonstruowaliśmy już zbiory $\Delta^0{}_k$, $\Delta^2{}_k$, $\Delta^3{}_k$, $\Delta^4{}_k$, $\Delta^5{}_k$ więc wystarczy skonstruować zbiory $\Delta^n{}_k$ dla $6\leq n\leq3^k-1$, $n\neq3^k-2$.
Liczbę n przedstawimy jako $n=n_1+2n_2$, $2\leq n_1\leq3^{k-1}-1$, $n_1\neq3^{k-1}-2$, $2\leq n_2\leq3^{k-1}$. Liczby n_1, n_2 możemy wyznaczyć następująco:
jeśli $n\equiv0 \pmod 3$, to $n_1=n_2=n/3$,
jeśli $n\equiv1 \pmod 3$, to $n_1-1=n_2=(n-1)/3$,
jeśli $n\equiv2 \pmod 3$, to $n_1=n_2-1=(n-2)/3$.
Taki wybór n_1 i n_2 nie gwarantuje tego, że $n_1\neq3^{k-1}-2$, więc aby to uwzględnić przyjmujemy
dla $n=3^k-4$: $n_1=3^{k-1}-4$ i $n_2=3^{k-1}$,
dla $n=3^k-6$: $n_1=3^{k-1}-4$ i $n_2=3^{k-1}-1$
oraz dla $n=3^k-8$: $n_1=3^{k-1}-4$ i $n_2=3^{k-1}-2$.
Ostatecznie określamy

$$\Delta^n_k=(\Delta^{n_2}_{k-1}\times\{L,P\})\cup(\Delta^{n_1}_{k-1}\times\{0\})\quad gdy\quad n_2\neq3^{k-1}\ i\, n_2\neq3^{k-1}-2$$

lub

$$\Delta^n_k=(\Delta^{n_2-1}_{k-1}\times\{L,P\})\cup(\Delta^{n_1}_{k-1}\times\{0\})\cup\{(0,\dots,0,L),(0,\dots,0,P)\}\ gdy\quad n_2=3^{k-1}\text{ lub }n_2=3^{k-1}-2$$

■

Przejdźmy do wariantu BDEIJ. Pomocne będzie następujące oznaczenie. Dla $a=(t_1,t_2,\dots,t_k)\in\{P,L,0\}^k$ przez -a będziemy oznaczać k-tkę, która powstaje z a przez zastąpienie

wszystkich t_i równych L przez P i na odwrót, np. –(L,0,P,P,L)=(P,0,L,L,P). Element –a będziemy nazywać przeciwnym do a. Ponadto dla $A\subset\{P,L,0\}^k$ przez –A będziemy oznaczać zbiór $-A=\{-a: a\in A\}$. Załóżmy, że dla każdej pary k,n spełniającej warunki podane w tabeli istnieje n elementowy zbiór $\Gamma^n_k\subset\{P,L,0\}^k$ taki, że $(0,0,\dots,0)\notin\Gamma^n_k$, $\Gamma^n_k\cap(-\Gamma^n_k)=\emptyset$ oraz dla każdego $i\in\{1,2,\dots,k\}$ zbiory $\{(t_1,t_2,\dots,t_k)\in\Gamma^n_k: t_i=P\}$ i $\{(t_1,t_2,\dots,t_k)\in\Gamma^n_k: t_i=L\}$ są równoliczne. Każdej z n monet przyporządkujmy inny element zbioru Γ^n_k. Zauważmy, że zaplanowane w ten sposób k ważeń pozwala wskazać fałszywą monetę (jeśli taka istnieje) i określić czy jest cięższa, czy lżejsza od monet prawdziwych. Istotnie, zapiszmy wynik k ważeń w postaci k-tki $(w_1,w_2,\dots,w_k)$, przy czym $w_j=P$, $w_j=L$, $w_j=0$ oznaczają, że w j-tym ważeniu waga wychyliła się odpowiednio w prawo, w lewo, nie wychyliła się. Jeśli żadna moneta nie jest fałszywa to otrzymamy k-tkę zerową (0,0,…,0). Jeśli któraś z monet jest fałszywa i jest cięższa od monet dobrych to otrzymamy k-tkę identyczną z tą, która została przyporządkowana fałszywej monecie w czasie planowania ważeń. Jeśli natomiast któraś z monet jest fałszywa i jest lżejsza od monet dobrych to otrzymamy k-tkę przeciwną do tej, która została przyporządkowana fałszywej monecie w czasie planowania ważeń. Ponieważ $\Gamma^n_k\cap(-\Gamma^n_k)=\emptyset$, więc w każdej z tych sytuacji wynik ważeń będzie inny co pozwala jednoznacznie wskazać fałszywą monetę i określić jej wagę.
Pozostaje zatem pokazać, że:

Dla każdego $k\geq 0$ i n takiego, że $3\leq n\leq(3^k-3)/2$ lub n=0 istnieje n elementowy zbiór) $\Gamma^n_k\subset\{L,P,0\}^k$ taki, że $\Gamma^n_k\cap(-\Gamma^n_k)=\emptyset$ oraz dla każdego $i\in\{1,2,\dots,k\}$ zbiory $\{(t_1,t_2,\dots,t_k)\in\Gamma^n_k: t_i=P\}$ i $\{(t_1,t_2,\dots,t_k)\in\Gamma^n_k: t_i=L\}$ są równoliczne.

Zbiory Γ^n_k będziemy konstruować indukcyjnie.
Najpierw zajmiemy się przypadkami szczególnymi. Przyjmiemy $\Gamma^0_k=\emptyset$ dla dowolnego k, natomiast dla $k\geq 2$ określamy:
$\Gamma^3_k=\{(L,P,0,\dots,0), (P,0,0,\dots,0), (0,L,0,\dots,0)\}$
dla $k\geq 3$:
$\Gamma^4_k=\{(P,P,L,0,\dots,0), (P,L,P,0,\dots,0), (L,P,P,0,\dots,0), (L,L,L,0,\dots,0)\}$
$\Gamma^5_k=\{(0,0,P,0,\dots,0), (P,0,0,0,\dots,0), (L,0,P,0,\dots,0), (0,L,L,0,\dots,0), (0,P,L,0,\dots,0)\}$
$\Gamma^6_k=\{(L,P,L,0,\dots,0), (P,0,L,0,\dots,0), (0,L,L,0,\dots,0), (L,P,P,0,\dots,0), (P,0,P,0,\dots,0), (0,L,P,0,\dots,0)\}$
$\Gamma^7_k=\{(L,P,0,0,\dots,0), (P,0,0,0,\dots,0), (0,L,0,0,\dots,0), (P,P,L,0,\dots,0), (P,L,P,0,\dots,0), (L,P,P,0,\dots,0), (L,L,L,0,\dots,0)\}$
$\Gamma^8_k=\{(L,L,L,0,\dots,0), (L,P,L,0,\dots,0), (P,L,L,0,\dots,0), (P,P,L,0,\dots,0), (0,P,P,0,\dots,0), (0,L,P,0,\dots,0), (P,0,P,0,\dots,0), (L,0,P,0,\dots,0)\}$
Teraz skonstruujemy indukcyjnie zbiory $\Gamma_k^{(3^k-3)/2}$ dla $k\geq 1$.
Zbiór $\Gamma^0_1=\emptyset$ został już określony.
Gdy k>1, wówczas określamy
$\Gamma_k^{(3^k-3)/2}=\Gamma_{k-1}^{(3^{k-1}-3)/2}\times\{L,0,P\}\cup\{(L,L,\dots,L,P),\ (P,P,\dots,P,0),(0,0,\dots,0,L)\}$
Skonstruowane w ten sposób zbiory oprócz podanych w treści lematu własności spełniają także warunki:

1° $(P,\dots,P), (L,\dots,L)\notin\Gamma_k^{(3^k-3)/2}$ dla $k\geq 0$,

2° $(L,P,0,0,\dots,0), (P,P,0,0,\dots,0), (0,L,0,0,\dots,0), (L,\dots,L,P,0), (0,\dots,0,0,L), (0,\dots,0,L,0)\in\Gamma_k^{(3^k-3)/2}$ dla $k\geq 3$,

3° $(0,P,0,0,\dots,0), (0,0,\dots,0,0,P,0)\notin\Gamma_k^{(3^k-3)/2}$ dla $k\geq 3$

Warunki te można łatwo uzasadnić indukcyjnie. Pozwalają nam one określić dla $k\geq 3$ zbiory:
$\Gamma_k^{(3^k-5)/2}=\Gamma_k^{(3^k-3)}\setminus\{(L,\dots,L,P,0),(0,\dots,0,0,L),(0,\dots,0,L,0)\}\cup\{(L,\dots,L,L,L),(0,\dots,0,P,0)\}$
$\Gamma_k^{(3^k-7)/2}=\Gamma_k^{(3^k-3)}\setminus\{(L,P,0,\dots,0),(P,P,0,\dots,0),(0,L,0,\dots,0)\}\cup\{(0,P,0,\dots,0)\}$

Teraz możemy przejść do właściwej konstrukcji. Wykorzystamy indukcję po k. Dla k=0, k=1 i k=2 już skonstruowaliśmy wszystkie wymagane zbiory Γ^n_k. Niech teraz $k\geq 3$ i $0\leq n\leq (3^k-3)/2$, $n\neq 1,2$. Dla $n<9$, $n=(3^k-3)/2$, $n=(3^k-5)/2$, $n=(3^k-7)/2$ zbiory Γ^n_k określiliśmy wcześniej, więc teraz wystarczy ograniczyć się do $9\leq n\leq (3^k-9)/2$. Liczbę n przedstawiamy jako $n=n_1+2n_2$, gdzie $3\leq n_1,n_2\leq (3^{k-1}-3)/2$.
Można to zrobić na przykład tak:
jeśli $n\equiv 0 \pmod 3$, to $n_1=n_2=n/3$,
jeśli $n\equiv 1 \pmod 3$, to $n_1-1=n_2=(n-1)/3$,
jeśli $n\equiv 2 \pmod 3$, to $n_1=n_2-1=(n-2)/3$.
Ostatecznie określamy
$\Gamma^n_k = \Gamma^{n_2}_{k-1}\times\{L,P\}\cup\Gamma^{n_1}_{k-1}\times\{0\}$ ■

*Wiemy, czy fałszywa moneta jest cięższa, czy lżejsza od pozostałych monet (warianty *C***)*

Zajmiemy się teraz wariantami AC***. Schemat postępowania będzie następujący. Jeśli liczba monet n i liczba ważeń k spełniają warunki wariantu BCEIJ, czyli $n\leq 3^k-1$, $n\neq 1$, $n\neq 3^k-2$ wówczas wykonujemy ważenia tak jak w wariancie BCEIJ. Jeśli n=1 to jedyna moneta jest fałszywa i nie musimy wykonywać jakichkolwiek ważeń. Jeśli natomiast $n=3^k-2$ lub $n=3^k$ wtedy jedną z n monet odkładamy na bok natomiast dla pozostałych n-1 monet wykonujemy ważenia tak jak w wariancie BCEIJ ($n-1=3^k-3$ lub $n-1=3^k-1$). Jeśli ważenia wykonane dla n-1 monet wskazały fałszywą monetę to zadanie jest rozwiązane, jeśli wszystkie n-1 monet okazały się prawdziwe to fałszywą monetą jest moneta odłożona na bok. Zauważmy, że wszystkie ważenia zostały zaplanowane z góry i nie używaliśmy monet dodatkowych.

Warianty BC(F/G)**. Jeżeli n=1 to w jednym ważeniu porównujemy masy jedynej monety i monety dodatkowej. Jeśli $n=3^k-2$ wówczas do danych nam monet dokładamy dodatkową monetę i dla $n+1=3^k-1$ monet stosujemy ważenia z wariantu BCEIJ. W pozostałych przypadkach nie wykorzystujemy monety dodatkowej i wykonujemy ważenia z wariantu BCEIJ.

Wariant BCE*K. Jeśli n i k spełniają warunki wariantu BCEIJ, czyli $n\leq 3^k-1$, $n\neq 1$, $n\neq 3^k-2$ to wykonujemy ważenia tak jak w wariancie BCEIJ. Jeśli natomiast $n=3^k-2$, $k\geq 2$ to rozdzielamy n monet na trzy grupy: grupę A składającą się z $3^{k-1}-2$ monet oraz grupy B i C liczące po 3^{k-1} monet. W pierwszym ważeniu na szalach kładziemy grupy B i C. Jeśli waga wychyli się to fałszywa moneta znajduje się w jednej z tych grup (wiemy w której). Pozostałe k-1 ważeń wystarczają, by wśród 3^{k-1} monet tej grupy wskazać fałszywą monetę (ważenia będziemy wykonywać jak w wariancie ACE*K). Jeśli z kolei grupy B i C ważą tyle samo, to fałszywa moneta, jeśli istnieje, znajduje się w grupie A. Pozostałe k-1 ważeń wykonujemy jak w wariancie BCF** (ponieważ wiemy, że monety z grup B i C są prawdziwe, więc poza $3^{k-1}-2$ monetami grupy A dysponujemy co najmniej jedną dodatkową monetą prawdziwą).

*Nie wiemy, czy fałszywa moneta jest cięższa, czy lżejsza od pozostałych monet (warianty *D***)*

Rozważymy teraz pozostałe przypadki *D***.
Ważenia w wariantach ADEI* wykonujemy identycznie jak w wariancie BDEIJ.

Podobnie postępujemy w wariantach ADEH* gdy $n\neq 1$ i $n\neq (3^k-1)/2$. Dla n=1 nie musimy przeprowadzać żadnych ważeń, jedyna moneta jest fałszywa, a zadanie nie wymaga od nas ustalenia czy jest ona cięższa, czy lżejsza od monet prawdziwych. Gdy $n=(3^k-1)/2$ wówczas jedną z monet odkładamy na bok, natomiast dla pozostałych $n-1=(3^k-3)/2$ monet wykonujemy ważenia tak jak w wariancie BDEIJ. W ten sposób albo wykryjemy fałszywą monetę wśród n-1 ważonych monet, albo fałszywą monetą okaże się moneta odłożona na bok.

Warianty BD(F/G)** oraz AD(F/G)I* . Dla $n\leq(3^k-3)/2$, $n\neq1$, $n\neq2$ wykonujemy ważenia tak, jak w wariancie BDEIJ, nie wykorzystując monet dodatkowych. Dla n=1 i $k\geq1$ porównujemy masy jedynej monety i prawdziwej monety dodatkowej. Dla n=2 i $k\geq2$ w dwóch ważeniach porównujemy masy obu monet z monetą dodatkową. Gdy $n=(3^k-1)/2$ ważenia planujemy następująco: $n-1=(3^k-3)/2$ monet będziemy kładli na szale jak w wariancie BDEIJ, n-tą monetę będziemy w każdym ważeniu kładli na lewej szali, a monetę dodatkową na prawej. Zauważmy, że tak zaplanowane ważenia umożliwiają wypełnienie warunków zadania, gdyż (P,…,P), $(L,\ldots,L)\notin \Gamma_k^{(3^k-3)/2}$.

Podobnie postępujemy w wariantach AD(F/G)H* gdy $n<(3^k+1)/2$. Gdy $n=(3^k+1)/2$ wówczas jedną z monet odkładamy na bok, a dla pozostałych $n-1=(3^k-1)/2$ monet wykonujemy ważenia tak jak w wariancie BD(F/G)IJ. Ważenia te wskażą nam monetę fałszywą wśród n-1 monet lub jej brak, co oznacza, że fałszywa jest moneta odłożona na bok.

Przykłady

Danych jest 19 monet. Jedna z nich jest fałszywa, lżejsza od pozostałych. Należy ją wykryć używając w tym celu trzykrotnie wagi szalkowej.

Ponumerujmy monety liczbami 1,2,…,19. W pierwszym ważeniu połóżmy na lewej szali monety 1, 2, 3, 4, 5, 6, a na prawej 7, 8, 9, 10, 11, 12.

1° Jeżeli waga wychyli się w prawą stronę, wówczas mamy pewność, że fałszywa moneta leży na lewej szali, czyli jest jedną z monet 1, 2, 3, 4, 5, 6. W drugim ważeniu porównujemy monety 1, 2 oraz 3, 4. Dowiadujemy się w ten sposób, czy fałszywa (lżejsza) moneta jest jedną z monet 1, 2, czy 3, 4, czy 5, 6. W trzecim ważeniu ustalamy, która z danej pary jest monetą fałszywą.

2° Jeżeli waga wychyli się w lewą stronę, to fałszywą monetą jest jedna z monet 7, 8, 9, 10, 11, 12. Dalsze ważenia wykonujemy podobnie jak w pierwszym przypadku.

3° Jeżeli waga nie wychyli się, fałszywa moneta jest wśród monet o numerach 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19. W drugim ważeniu porównujemy monety 13, 14 i 15, 16, ustalając w ten sposób czy fałszywa moneta jest jedną z monet 13, 14 lub 15, 16 lub 17, 18, 19. Trzecie ważenie pozwoli nam wskazać fałszywa monetę.

W powyższym rozwiązaniu przebieg kolejnych ważeń zależy od wyników poprzednich. Odpowiada to wariantowi ACEHK naszego zadania dla n=19 i k=3.

Spróbujmy teraz z góry zaplanować niezbędne ważenia (wariantowi ACEHJ). Zgodnie z tabelą zadanie da się wykonać gdyż $19\leq3^3$. Planowanie ważeń rozpoczniemy od wypisania elementów skonstruowanego wcześniej zbioru $\Delta^{19}{}_3$.

$\Delta^{19}{}_3=(\Delta^6{}_2\times\{L,P\})\cup(\Delta^5{}_2\times\{0\})\cup\{(0,0,L),(0,0,P)\}$

$\Delta^5{}_2=\{(L,P), (P,0), (0,L), (P,P), (L,L)\}$

$\Delta^6{}_2=(\Delta^2{}_1\times\{L,P\})\cup(\Delta^2{}_1\times\{0\})=\{(L,L),(P,L),(L,P),(P,P),(L,0),(P,0)\}$

czyli

$\Delta^{19}{}_3=\{(L,L,L), (P,L,L), (L,P,L), (P,P,L), (L,0,L), (P,0,L), (L,L,P), (P,L,P), (L,P,P), (P,P,P), (L,0,P), (P,0,P), (L,P,0), (P,0,0), (0,L,0), (P,P,0), (L,L,0), (0,0,L), (0,0,P)\}$.

Każdej z monet przyporządkowujemy po jednym z elementów zbioru $\Delta^{19}{}_3$, np. monecie 1 przyporządkujmy trójkę (L,L,L), monecie 2 trójkę (P,L,L) itd., aż do monety 19, której przypiszemy trójkę (0,0,P). Zatem w kolejnych ważeniach na poszczególnych szalach będą leżały następujące monety:

	lewa szala	prawa szala
1. ważenie	1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 17	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16
2. ważenie	1, 2, 7, 8, 15, 17	3, 4, 9, 10, 13, 16
3. ważenie	1, 2, 3, 4, 5, 6, 18	7, 8, 9, 10, 11, 12, 19

Wyniki ważeń zapisujemy w postaci trójki (w_1,w_2,w_3), przy czym w_j=P, w_j=L, w_j=0 oznaczają, że w j-tym ważeniu waga wychyliła się odpowiednio w prawo, w lewo, nie wychyliła się. Uzyskana w ten sposób trójka jest trójką przeciwną do tej, która została przypisana monecie fałszywej (przeciwna, gdyż fałszywa moneta jest lżejsza od pozostałych).

Danych jest 40 monet. Być może jedna z nich jest fałszywa, ale nie wiemy, czy jest cięższa, czy lżejsza od monet prawdziwych. Dysponujemy ponadto nieograniczoną ilością monet prawdziwych. Należy wykryć fałszywą monetę, używając w tym celu czterokrotnie wagi szalkowej.

Zadanie wykonamy używając tylko jednej dodatkowej monety, a wszystkie ważenia zaplanujemy z góry. Możemy to zrobić, gdyż $40\leq(3^4-1)/2$ (wariant BDFHJ uogólnionego zadania). Ponumerujmy monety liczbami 1,2,…,40. Wypiszmy elementy zbioru $\Gamma^{39}{}_4$. Pomoże nam to w planowaniu ważeń.
$\Gamma^{39}{}_4=\Gamma^{12}{}_3\times\{L,P,0\}\cup\{(L,L,L,P), (P,P,P,0), (0,0,0,L)\}$
$\Gamma^{12}{}_3=\Gamma^{3}{}_2\times\{L,P,0\}\cup\{(L,L,P), (P,P,0), (0,0,L)\}$
$\Gamma^{3}{}_2=\{(L,P), (P,0), (0,L), \}$
Ostatecznie
$\Gamma^{39}{}_4$={(L,P,L,L), (P,0,L,L), (0,L,L,L), (L,P,P,L), (P,0,P,L), (0,L,P,L), (L,P,0,L), (P,0,0,L), (0,L,0,L), (L,L,P,L), (P,P,0,L), (0,0,L,L), (L,P,L,P), (P,0,L,P), (0,L,L,P), (L,P,P,P), (P,0,P,P), (0,L,P,P), (L,P,0,P), (P,0,0,P), (0,L,0,P), (L,L,P,P), (P,P,0,P), (0,0,L,P), (L,P,L,0), (P,0,L,0), (0,L,L,0), (L,P,P,0), (P,0,P,0), (0,L,P,0), (L,P,0,0), (P,0,0,0), (0,L,0,0), (L,L,P,0), (P,P,0,0), (0,0,L,0), (L,L,L,P), (P,P,P,0), (0,0,0,L)}.
Każdej z monet 1,2,…,39 przyporządkowujemy po jednym elemencie zbioru $\Gamma^{39}{}_4$, np. monecie 1 przyporządkujmy czwórkę (L,P,L,L), monecie 2 czwórkę (P,0,L,L) itd., aż do monety 39, której przypiszemy czwórkę (0,0,0,L). Monecie 40 przyporządkujmy czwórkę (L,L,L,L), a monecie dodatkowej (P,P,P,P). Zaplanowaliśmy w ten sposób ważenia (monetę dodatkową oznaczamy przez 0).

	lewa szala	prawa szala
1. ważenie	1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37, 40	0, 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35, 38,
2. ważenie	3, 6, 9, 10, 15, 18, 21, 22, 27, 30, 33, 34, 37, 40	0, 1, 4, 7, 11, 13, 16, 19, 23, 25, 28, 31, 35, 38
3. ważenie	1, 2, 3, 12, 13, 14, 15, 24, 25, 26, 27, 36, 37, 40	0, 4, 5, 6, 10, 16, 17, 18, 22, 28, 29, 30, 34, 38
4. ważenie	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 39, 40	0, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 37

Podobnie jak w poprzednim przykładzie wyniki ważeń zapisujemy w postaci czwórki (w_1,w_2,w_3,w_4), przy czym w_j=P, w_j=L, w_j=0 oznaczają, że w j-tym ważeniu waga wychyliła się odpowiednio w prawo, w lewo, nie wychyliła się. Jeśli uzyskana w ten sposób czwórka jest zerowa (0,0,0,0) to wszystkie monety są prawdziwe. W przeciwnym przypadku otrzymana czwórka jest taka sama lub przeciwna do tej, która została przypisana monecie fałszywej (przeciwna, gdy fałszywa moneta jest lżejsza od pozostałych, taka sama gdy jest cięższa).

Literatura

[1] B. Descartes, Eureka, No. 13, Oct. 1950.
[2] L. Halbeisen, N. Hungerbühler, *The general counterfeit coin problem*, Discrete Math. **147** (1995), 139-150.
[3] P. Jarek, L. Kourliandtchik, M. Uscki, *Miniatury matematyczne część 5 - szkoła podstawowa i gimnazjum*, Aksjomat, Toruń.
[4] P. Kryszkiewicz, *Fałszywe monety*, Magazyn miłośników matematyki nr 2(3) kwiecień 2003.
[5] D. O. Shklarsky, N.N. Chentsov, I.M. Yaglom, *Selected problems and theorems in elementary mathematics*, Mir Publishers, Moskwa.
[6] C. A. B. Smith, *The Counterfeit Coin Problem.*, Math. Gaz. **31** (1947), 31-39.
[7] H. Steinhaus, *Kalejdoskop Matematyczny*, wyd. 4, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1989.