Rozdział 3

Logarytm i potęga

3.1 Potęga o wykładniku naturalnym

Definicja potęgi o wykładniku naturalnym. Niech $x \in \mathbb{R}$ oraz $n \in \mathbb{N}$. *Potęgą o podstawie x i wykładniku n* nazywamy liczbę x^n określoną następująco: $x^n = x$, gdy $n = 1$ oraz $x^n = x^{n-1}x$, gdy $n > 1$. Dodatkowo, dla $x \neq 0$, przyjmujemy $x^0 = 1$.

Uwaga 3.1.1. *Powyższa definicja potęgi jest zgodna z definicją iloczynu n-wyrazowego ciągu $(x, ..., x)$. W konsekwencji dla każdego $x \in \mathbb{R}$ oraz $n \in \mathbb{N}$ potęga x^n jest określona jednoznacznie.*

Łatwy dowód poniższej własności pozostawiamy czytelnikowi.

Własność 3.1.2. *Niech $x, y \in \mathbb{R}$ oraz $n, m \in \mathbb{N}$. Wówczas zachodzą następujące:*

(a) $x^n \neq 0$, *gdy* $x \neq 0$.

(b) $x^n x^m = x^{n+m}$; $\quad x^n/x^m = x^{n-m}$, *gdy* $x \neq 0$ *oraz* $m \leqslant n$.

(c) $x^n y^n = (xy)^n$; $\quad x^n/y^n = (x/y)^n$, *gdy* $y \neq 0$.

(d) $(x^n)^m = x^{nm}$.

Własność 3.1.3. *Niech $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ oraz $n \in \mathbb{N}$. Wówczas $x^n > 0$. Ponadto*

$$x > 1 \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad x^n > 1.$$

Dowód. Indukcyjnie łatwo pokazujemy, że
1) jeśli $x > 1$, to $x^n > 1$,
2) jeśli $x = 1$, to $x^n = 1$,
3) jeśli $0 < x < 1$, to $0 < x^n < 1$.
1) jest implikacją prostą tezy. Z 2), 3) wynika implikacja odwrotna. □

Własność 3.1.4. *Niech $x \in \mathbb{R}$, $x > 1$ oraz $n, m \in \mathbb{N}$. Wówczas*

$$m > n \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad x^m > x^n.$$

Dowód. Niech $x \in \mathbb{R}$, $x > 1$ oraz $n, m \in \mathbb{N}$, $m > n$. Wówczas z własności 2.3.7(e) mamy, że $m - n \in \mathbb{N}$, więc z własności 3.1.3, $x^{m-n} > 1$ i analogicznie $x^n > 0$. Zatem z własności 3.1.2(b), $x^m/x^n > 1$, więc $x^m > x^n$. To daje implikację prostą. Implikacja odwrotna wynika natychmiast z udowodnionej. □

Własność 3.1.5. *Niech $x, y \in \mathbb{R}$, $x, y > 0$ oraz niech $n \in \mathbb{N}$. Wówczas*

$$y > x \quad \textit{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad y^n > x^n.$$

Dowód. Załóżmy, że $x < y$. Ponieważ $x > 0$, więc $y/x > x/x = 1$. Stosując teraz własność 3.1.3 mamy, że $x^n > 0$ oraz $(y/x)^n > 1$. W konsekwencji, z własności 3.1.2 (c) i (b) dostajemy $y^n = ((y/x)x)^n = (y/x)^n x^n > x^n$.

Załóżmy teraz, że $y^n > x^n$. Wówczas $y^n/x^n > 1$. Stąd i z własności 3.1.2 (c) dostajemy $(y/x)^n = y^n/x^n > 1$, więc z własności 3.1.3, $y/x > 1$. To daje, że $y > x$, gdyż $x > 0$. □

Lemat 3.1.6. (nierówność Bernoulliego). *Dla każdego $x \in \mathbb{R}$, $x \geqslant -1$ oraz $n \in \mathbb{N}$,*

$$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx.$$

Dowód. Dla $n = 1$ teza jest oczywista. Załóżmy, że teza zachodzi dla $n \in \mathbb{N}$. Ponieważ $1 + x \geqslant 0$ oraz $nx^2 \geqslant 0$, więc z założenia mamy

$$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n(1 + x) \geqslant (1 + nx)(1 + x) = 1 + (n + 1)x + nx^2 \geqslant 1 + (n + 1)x.$$

Reasumując, zasada indukcji kończy dowód. □

Wniosek 3.1.7. (zasada Archimedesa dla potęgowania). *Niech $a, b \in \mathbb{R}$. Jeśli $a > 1$, to istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $a^n > b$.*

Dowód. Ponieważ $a > 1$, więc $\frac{b-1}{a-1} \in \mathbb{R}$. Z zasady Archimedesa (twierdzenie 2.3.2) istnieje więc $n \in \mathbb{N}$, że $n > \frac{b-1}{a-1}$. Zatem $n(a - 1) + 1 > b$ i z nierówności Bernoulliego (lemat 3.1.6), $a^n = (1 + (a - 1))^n \geqslant 1 + n(a - 1) > b$. To kończy dowód. □

Lemat 3.1.8. (wzór dwumienny Newtona). *Dla każdych $x, y \in \mathbb{R}$ oraz $n \in \mathbb{N}$ zachodzi*

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \quad (^1). \tag{3.1}$$

Dowód. Weźmy dowolne $x, y \in \mathbb{R}$ i oznaczmy $N = \{n \in \mathbb{N} : (3.1) \text{ zachodzi}\}$. Oczywiście $1 \in N$. Załóżmy, że $n \in N$. Pokażemy, że $n + 1 \in N$. Ponieważ $n \in N$, to

$$\begin{aligned}(x + y)^{n+1} &= (x + y) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k y^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} = y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) x^k y^{n+1-k} + x^{n+1}.\end{aligned}$$

[1] dla uproszczenia zapisu przyjmujemy tutaj $0^0 = 1$.

Z definicji symbolu Newtona dla $k, n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant n$ dostajemy $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$. Stąd i z powyższego wynika (3.1) dla $n+1$, a więc $n+1 \in N$. Z zasady indukcji dostajemy więc, że $N = \mathbb{N}$. To kończy dowód. $\square$

ZADANIA

Zadanie 3.1.1. (wzór wielomianowy Newtona). *Niech* $n, s \in \mathbb{N}$, $n, s \geqslant 2$, $x_1, .., x_s \in \mathbb{R}$ *oraz* $A = \{(i_1, ..., i_s) :\ i_1, ..., i_s \in \mathbb{Z},\ i_1, ..., i_s \geqslant 0,\ i_1 + \cdots + i_s = n\}$. *Wówczas*

$$(x_1 + \cdots + x_s)^n = \sum_{(i_1,\ldots,i_s)\in A} \frac{n!}{i_1! \cdots i_s!} x_1^{i_i} \cdots x_s^{i_s}.$$

Zadanie 3.1.2.* *Rozważmy równanie Pitagorasa* $x^2 + y^2 = z^2$. *Dla każdych* $m, n \in \mathbb{N}$ *liczby* $x = m^2 - n^2$, $y = 2mn$, $z = m^2 + n^2$ *oraz* $x = 2mn$, $y = m^2 - n^2$, $z = m^2 + n^2$ *spełniają to równanie. Czy są to wszystkie możliwe układy liczb* $x, y, z \in \mathbb{N}$ *spełniające równanie Pitagorasa?*

Zadanie 3.1.3.* *Równanie* $x^4 + y^4 = z^4$ *nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych* x, y, z.

Zadanie 3.1.4. (nierówność Schwarza). *Udowodnić, że dla dowolnych liczb* $x_k, y_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, ..., n$ *zachodzi nierówność* $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leqslant \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k^2\right)$.

Zadanie 3.1.5.* (zasadnicze twierdzenie arytmetyki). *Liczbę naturalną* p *nazywamy pierwszą jeśli nie można jej przedstawić w postaci iloczynu dwóch liczb naturalnych różnych od* 1. *Każdą liczbę naturalną* $n \neq 1$ *można jednoznacznie przedstawić w postaci* $n = p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$, *gdzie* $n_1, ..., n_k \in \mathbb{N}$ *oraz* $p_1, ..., p_k$ *są liczbami pierwszymi, przy czym* $p_1 < \cdots < p_k$ [2].

Zadanie 3.1.6.* *Niech* $n \in \mathbb{N}$, $n > 4$. *Wówczas* n *jest liczbą pierwszą wtedy i tylko wtedy, gdy* $(n-1)!/n \notin \mathbb{N}$.

Zadanie 3.1.7.* *Niech* $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. *Wówczas* n *jest liczbą pierwszą wtedy i tylko wtedy, gdy liczba* $((n-1)! + 1)/n$ *jest naturalna (tzn.* $(n-1)! + 1$ *jest podzielne przez* n*).*

Zadanie 3.1.8. *Dla każdego* $n \in \mathbb{N}$ *oraz ciągu liczbowego* $(x_1, ..., x_n)$ *mamy*

$$\mathbb{R} \neq \{x :\ x = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n,\ a_1, ..., a_n \in \mathbb{Q}\}.$$

Zadanie 3.1.9. *Dla każdego zbioru przeliczalnego* $A \subset \mathbb{R}$ *mamy*

$$\mathbb{R} \neq \{x :\ x = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \text{ dla pewnych ciągów } x_1, ..., x_n \in A,\ a_1, ..., a_n \in \mathbb{Q}\}.$$

Hipoteza 1. (Goldbach, 1742 r). *Każda liczba parzysta* n, $n > 2$ *jest sumą dwóch liczb pierwszych (problem ten jest dotąd nierozstrzygnięty).*

---

[2] $p_1 < ... < p_k$ oznacza $p_n < p_{n+1}$ dla $1 \leqslant n < k$ (gdy $k > 1$).

3.2 Potęga o wykładniku całkowitym

W punkcie 3.1 wprowadziliśmy definicję potęgi o wykładniku naturalnym. Rozszerzymy to pojęcie na przypadek potęg o wykładniku całkowitym.

Definicja potęgi o wykładniku całkowitym. Niech $x \in \mathbb{R}$ oraz $a \in \mathbb{Z}$. *Potęgą o podstawie* x *i wykładniku* a nazywamy liczbę x^a określoną następująco

$$x^a = \begin{cases} x^a\,, & \text{gdy} \quad a \in \mathbb{N}, \\ \\ 1/x^{-a}\,, & \text{gdy} \quad -a \in \mathbb{N} \text{ i } x \neq 0, \\ \\ 1\,, & \text{gdy} \quad a = 0 \text{ i } x \neq 0. \end{cases}$$

Uwaga 3.2.1. *Potęga o wykładniku całkowitym jest poprawnie określona, gdyż dla liczb* $a \in \mathbb{Z}$ *mamy* $a \in \mathbb{N}$ *albo* $a = 0$ *albo* $-a \in \mathbb{N}$ *(patrz własność 2.4.2(a)). Ponadto, dla* $n \in \mathbb{N}$ *oraz* $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ *mamy* $x^n \neq 0$ *(patrz własność 3.1.2(c)), więc* $1/x^n$ *istnieje.*

Z własności 3.1.2, 3.1.3, 3.1.4 oraz powyższej definicji dostajemy następujące dwie własności.

Własność 3.2.2. *Niech* $x, y \in \mathbb{R}$, $x, y \neq 0$ *oraz* $a, b \in \mathbb{Z}$. *Wówczas zachodzą następujące:*

(a) $x^a \neq 0$; $\quad x^a > 0$ *dla* $x > 0$.

(b) $x^a x^b = x^{a+b}$; $\quad x^a/x^b = x^{a-b}$.

(c) $x^a y^a = (xy)^a$; $\quad x^a/y^a = (x/y)^a$.

(d) $(x^a)^b = x^{ab}$.

Własność 3.2.3. *Niech* $x \in \mathbb{R}$, $x > 1$ *oraz* $a, b \in \mathbb{Z}$. *Wówczas*

$$b > a \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad x^b > x^a.$$

3.3 Pierwiastek liczby rzeczywistej

W tym punkcie wprowadzimy pojęcie pierwiastka liczby rzeczywistej. Udowodnimy najpierw twierdzenie o istnieniu pierwiastków. Zacznijmy od lematu.

Lemat 3.3.1. *Niech* $x, y \in \mathbb{R}$, $x, y > 0$ *oraz* $n \in \mathbb{N}$. *Wówczas:*

(a) *Jeśli* $y^n < x$, *to istnieje* $\tilde{y} \in \mathbb{R}$, *takie że* $y < \tilde{y}$ *oraz* $(\tilde{y})^n < x$.

(b) *Jeśli* $y^n > x$, *to istnieje* $\tilde{y} \in \mathbb{R}$, *takie że* $y > \tilde{y} > 0$ *oraz* $(\tilde{y})^n > x$.

Dowód. Ad. (a) Ponieważ $y > 0$, więc $y^n > 0$ (własność 3.1.3). Zatem z założenia, że $y^n < x$ dostajemy $1 < x/y^n$ (wniosek 2.1.9). Ponadto $1/2^n > 0$, więc $(-1 + x/y^n)/2^n > 0$. W myśl własności 2.1.10, istnieje $t \in \mathbb{R}$, że $t < 1/2$ oraz $0 < t < (-1 + x/y^n)/2^n$. W konsekwencji istnieje $0 < t < 1/2$ takie, że

$$1 + 2^n t < x/y^n. \tag{3.2}$$

Zauważmy teraz, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ mamy

$$(1+t)^k < 1 + 2^k t. \tag{3.3}$$

Istotnie, dla $k = 1$ nierówność (3.3) jest oczywista. Jeśli (3.3) zachodzi dla $k \in \mathbb{N}$, to wobec tego, że $0 < t < 1/2$ mamy

$$(1+t)^{k+1} = (1+t)^k(1+t) < (1+2^k t)(1+t) = 1+2^k t+t+2^k t^2 \leqslant 1+2^k t+t+2^{k-1}t \leqslant 1+t2^{k+1}.$$

Stąd i z zasady indukcji, (3.3) zachodzi dla każdego $k \in \mathbb{N}$.

Z (3.3) dla $k = n$ oraz (3.2) dostajemy $(1+t)^n < x/y^n$. Zatem $[(1+t)y]^n < x$. Oznaczając teraz $\tilde{y} = (1+t)y$ dostajemy $y < \tilde{y}$ oraz $(\tilde{y})^n < x$, czyli mamy (a).

Ad. (b) Ponieważ $y^n > x$, więc $1 - x/y^n > 0$ i podobnie jak poprzednio pokazujemy, że istnieje $t \in \mathbb{R}$, $0 < t < 1$ takie, że $(1 - x/y^n)/n > t > 0$, więc $y^n(1 - nt) > x$. Zatem stosując nierówność Bernoulliego (lemat 3.1.6) dostajemy $y^n(1-t)^n > x$. Przyjmując $\tilde{y} = (1-t)y$ dostajemy $y > \tilde{y} > 0$ oraz $(\tilde{y})^n > x$. To daje (ii) i kończy dowód. □

Twierdzenie 3.3.2. (o istnieniu pierwiastków). *Dla każdego $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ oraz każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje dokładnie jedno $y \in \mathbb{R}$, takie że $y > 0$ oraz $y^n = x$.*

Dowód. Pokażemy najpierw istnienie liczby y. Przypuśćmy przeciwnie, że dla pewnych $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ oraz $n \in \mathbb{N}$ nie istnieje $y \in \mathbb{R}$, $y > 0$, taki że $y^n = x$. Niech

$$A_+ = \{a \in \mathbb{R}_+ : a^n < x\}, \qquad A = \mathbb{R}^0_- \cup A_+, \qquad B = \{b \in \mathbb{R}_+ : b^n > x\}.$$

Wówczas z przypuszczenia dostajemy, że $A \cup B = \mathbb{R}$. Pokażemy, że:

1) $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$,

2) dla każdych $a \in A$, $b \in B$ zachodzi $a < b$,

3) dla każdego $a \in A$ istnieje $\tilde{a} \in A$, że $a < \tilde{a}$,

4) dla każdego $b \in B$ istnieje $\tilde{b} \in B$, że $\tilde{b} < b$.

Ad 1) Oczywiście $A \neq \emptyset$. Z nierówności Bernoulliego (lemat 3.1.6) mamy

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx \geqslant 1 + x > x,$$

więc $b = x + 1 \in B$, czyli $B \neq \emptyset$.

Ad 2) Weźmy dowolne $a \in A$, $b \in B$. Jeśli $a \in \mathbb{R}^0_-$, to $a \leqslant 0 < b$. Jeśli $a \in \mathbb{R}_+$, to $a^n < x < b^n$, więc z własności 3.1.5 mamy $a < b$. Reasumując $a < b$.

Ad 3) Weźmy dowolny $a \in A$. Jeśli $a \in \mathbb{R}_-$, to biorąc $\tilde{a} = 0$ mamy $a < \tilde{a}$ i $\tilde{a} \in A$. Jeśli $a \in \mathbb{R}_+$, to z lematu 3.3.1(a) dostajemy, że istnieje $\tilde{a} \in A$, że $a < \tilde{a}$. Jeśli $a = 0$, to w myśl własności 2.1.10 istnieje $\tilde{a} \in \mathbb{R}$ takie, że $0 < \tilde{a} < 1$ oraz $\tilde{a} < x$. Wówczas indukcyjnie pokazujemy, że $(\tilde{a})^n \leqslant \tilde{a}$. W konsekwencji $(\tilde{a})^n < x$, więc $\tilde{a} \in A$ oraz $a < \tilde{a}$.

Ad 4) Wynika wprost z lematu 3.3.1(b).

Reasumując uporządkowana para zbiorów (A, B) przeczy Aksjomatowi IV.1. (zasada ciągłości Dedekinda). Z otrzymanej sprzeczności dostajemy, że przypuszczenie było fałszywe, czyli istnieje $y \in \mathbb{R}$, takie że $y > 0$ oraz $y^n = x$.

Pozostaje udowodnić jednoznaczność liczby y. Jeśli $y, \tilde{y} \in \mathbb{R}_+$ spełniają warunki $y^n = x$ oraz $(\tilde{y})^n = x$, to $y^n = (\tilde{y})^n$ i w myśl własności 3.1.5 nie może zachodzić $y < \tilde{y}$ ani $y > \tilde{y}$. W konsekwencji $y = \tilde{y}$. To kończy dowód. □

Definicja pierwiastka liczby rzeczywistej. Niech $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ oraz $n \in \mathbb{N}$. *Pierwiastkiem n-tego stopnia* z liczby x nazywamy taką liczbę $y \in \mathbb{R}$, że $y > 0$ oraz $y^n = x$ i oznaczamy $\sqrt[n]{x}$. W przypadku $n = 2$ piszemy $\sqrt{x}$ zamiast $\sqrt[2]{x}$. Dodatkowo przyjmujemy $\sqrt[n]{0} = 0$.

Uwaga 3.3.3. *Z twierdzenia 3.3.2 wynika, że dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$, $x \geqslant 0$ istnieje dokładnie jeden pierwiastek n-tego stopnia z liczby x.*

Własność 3.3.4. *Niech $x, y \in \mathbb{R}$, $x, y > 0$ oraz $n, k \in \mathbb{N}$ oraz $m \in \mathbb{Z}$. Wówczas zachodzą następujące:*

(a) $\sqrt[n]{x^n} = x$.

(b) $\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$.

(c) $\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[nk]{x^{mk}}$.

(d) $\sqrt[n]{\sqrt[k]{x}} = \sqrt[nk]{x}$.

(e) $\sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$.

(f) $\sqrt[n]{x}\sqrt[k]{x} = \sqrt[nk]{x^{n+k}}$.

Dowód. Ad. (a). Ponieważ $x > 0$, więc $x^n > 0$. Niech $t = \sqrt[n]{x^n}$. Wówczas $t > 0$ i $t^n = x^n$. Stąd i z twierdzenia 3.3.2 dostajemy, że $t = x$.

Ad. (b). Niech $t = \sqrt[n]{x}$. Wówczas $t^n = x$, więc $(t^m)^n = x^m$ (własność 3.2.2(d)). Ponieważ $t > 0$, więc $t^m > 0$ (własność 3.2.2(a)) i analogicznie $x^m > 0$. W konsekwencji $t^m = \sqrt[n]{x^m}$. To daje (b).

Ad. (c). Niech $t = \sqrt[n]{x^m}$. Wówczas $t^n = x^m$, więc $t^{nk} = x^{mk}$. To daje, że $t = \sqrt[nk]{x^{mk}}$.

Ad. (d). Niech $t = \sqrt[n]{\sqrt[k]{x}}$. Wówczas $t^n = \sqrt[k]{x}$, więc $t^{nk} = x$, czyli $t = \sqrt[nk]{x}$.

Ad. (e). Niech $t = \sqrt[n]{x}$, $z = \sqrt[n]{y}$. Wówczas $t^n = x$ oraz $z^n = y$, więc $(tz)^n = t^n z^n = xy$, czyli $tz = \sqrt[n]{xy}$.

Ad. (f). Niech $t = \sqrt[n]{x}$, $z = \sqrt[k]{x}$. Wówczas $t^n = x$ oraz $z^k = x$, więc $t^{nk} = x^k$ oraz $z^{nk} = x^n$. Zatem $(tz)^{nk} = t^{nk}z^{nk} = x^k x^n = x^{k+n}$ i w konsekwencji $tz = \sqrt[nk]{x^{n+k}}$. □

Wniosek 3.3.5. *Niech $n, \tilde{n} \in \mathbb{N}$ oraz $m, \tilde{m} \in \mathbb{Z}$. Jeśli $\tilde{n}m = n\tilde{m}$, to dla każdego $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, mamy*

$$\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[\tilde{n}]{x^{\tilde{m}}}.$$

Dowód. Ponieważ $x > 0$, więc z własności 3.2.2(a) mamy $x^m > 0$ oraz $x^{\tilde{m}} > 0$. Z drugiej strony, wobec własności 3.2.2(d) oraz własności 3.3.4 (a) i (b) dostajemy

$$(\sqrt[n]{x^m})^{n\tilde{n}} = x^{m\tilde{n}} = x^{\tilde{m}n} = (\sqrt[\tilde{n}]{x^{\tilde{m}}})^{\tilde{n}n}.$$

Stąd i z twierdzenia 3.3.2 dostajemy $\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[\tilde{n}]{x^{\tilde{m}}}$. □

Wniosek 3.3.6. *Niech $x, y \in \mathbb{R}$, $x, y > 0$ oraz niech $n \in \mathbb{N}$. Wówczas*

$$x > y \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \sqrt[n]{x} > \sqrt[n]{y}.$$

Dowód. Niech $t = \sqrt[n]{x}$, $z = \sqrt[n]{y}$. Wówczas $t > 0$ i $z > 0$ oraz $x = t^n$ i $y = z^n$. Zatem teza wynika natychmiast z własności 3.1.5. $\square$

Pojęcie pierwiastka nieparzystego stopnia liczby rzeczywistej można rozszerzyć na cały zbiór liczb rzeczywistych.

Definicja pierwiastka liczby ujemnej. Niech $n \in \mathbb{N}$ będzie liczbą nieparzystą. *Pierwiastkiem n-tego stopnia z liczby ujemnej* x nazywamy $-\sqrt[n]{-x}$ i oznaczamy $\sqrt[n]{x}$.

Z własności 3.3.4 dostajemy

Własność 3.3.7. *Niech $x \in \mathbb{R}$ oraz $n \in \mathbb{N}$. Wówczas zachodzą następujące:*

(a) *Jeśli $n \in 2\mathbb{N} - 1$, to $\sqrt[n]{x^n} = x$.*

(b) *Jeśli $n \in 2\mathbb{N}$, to $\sqrt[n]{x^n} = |x|$.*

ZADANIA

Zadanie 3.3.1. *Niech $n \in \mathbb{N}$ będzie liczbą nieparzystą oraz $k \in \mathbb{N}$ niech będzie liczbą parzystą. Wówczas dla każdej liczby ujemnej x mamy $\sqrt[n]{x} \neq \sqrt[nk]{x^k}$.*

Zadanie 3.3.2. *Stosując zadanie 2.3.2, udowowodnić, że liczba $\sqrt{2}$ jest niewymierna.*

3.4 Potęga o wykładniku wymiernym

Definicja potęgi o wykładniku wymiernym. Niech $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ oraz $r \in \mathbb{Q}$. *Potęgą o podstawie x i wykładniku wymiernym r* nazywamy liczbę x^r określoną następująco:

$$x^r = \sqrt[n]{x^m}, \qquad \text{gdzie} \quad r = m/n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Uwaga 3.4.1. *Definicja potęgi o wykładniku wymiernym jest poprawna. Istotnie, jeśli $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ oraz $r = m/n = \tilde{m}/\tilde{n}$, gdzie $n, \tilde{n} \in \mathbb{N}$, $m, \tilde{m} \in \mathbb{Z}$, to w myśl wniosku 3.3.5 mamy $\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[\tilde{n}]{x^{\tilde{m}}}$.*

Dla $r \in \mathbb{Z}$ powyższa definicja potęgi jest zgodna z definicją potęgi o wykładniku całkowitym. Istotnie, jeśli $r = m/1$, gdzie $m \in \mathbb{Z}$, to z własności 3.3.7(a) mamy $x^r = \sqrt[1]{x^m} = x^m$.

Uwaga 3.4.2. *Dla liczb ujemnych analogiczna definicja potęgi o wykładniku wymiernym prowadzi do sprzeczności (patrz zadanie 3.3.1).*

Z własności 3.3.4 dostajemy

Własność 3.4.3. *Niech $x, y \in \mathbb{R}$, $x, y > 0$ oraz $r, s \in \mathbb{Q}$. Wówczas zachodzą następujące:*

(a) $1^r = 1$.

(b) $x^r > 0$.

(c) $x^r x^s = x^{r+s}$; $\qquad x^r/x^s = x^{r-s}$; $\qquad x^r = 1/x^{-r}$.

(d) $x^r y^r = (xy)^r$; $\qquad x^r/y^r = (x/y)^r$.

(e) $(x^r)^s = x^{rs}$.

Własność 3.4.4. *Niech $x, y \in \mathbb{R}$, $x, y > 0$ oraz $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$. Wówczas*

$$x > y \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad x^r > y^r. \tag{3.4}$$

W szczególności

$$x > 1 \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad x^r > 1. \tag{3.5}$$

Dowód. (3.5) wynika natychmiast z (3.4), gdyż $1^r = 1$ (własność 3.4.3). Udowodnimy (3.4). Niech $r = m/n$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$. Ponieważ $r > 0$, więc $m \in \mathbb{N}$.

Załóżmy, że $x > y$. Ponieważ $m \in \mathbb{N}$, więc z własności 3.1.5 mamy $x^m > y^m$. Stąd i z wniosku 3.3.6 mamy $\sqrt[n]{x^m} > \sqrt[n]{y^m}$, czyli $x^r > y^r$.

Załóżmy, że $x^r > y^r$. Wówczas $\sqrt[n]{x^m} > \sqrt[n]{y^m}$. Zatem kolejno z wniosku 3.3.6 i własności 3.1.5 dostajemy $x > y$. Reasumując mamy (3.4). □

Własność 3.4.5. *Niech $x \in \mathbb{R}$, $x > 1$ oraz $r, s \in \mathbb{Q}$. Wówczas*

$$r > s \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad x^r > x^s.$$

Dowód. Można założyć, że $r = a/n$, $s = b/n$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{Z}$.

Załóżmy, że $r > s$. Wtedy $a > b$ oraz z własności 3.2.3 mamy $x^a > x^b$. Stąd i z wniosku 3.3.6 dostajemy $\sqrt[n]{x^a} > \sqrt[n]{x^b}$, czyli $x^r > x^s$.

Załóżmy, że $x^r > x^s$. Wówczas $\sqrt[n]{x^a} > \sqrt[n]{x^b}$, więc z wniosku 3.3.6 mamy $x^a > x^b$. Stąd i z własności 3.2.3 mamy $a > b$ i w konsekwencji $r > s$. □

3.5 Potęga o wykładniku rzeczywistym

W punkcie tym określimy potęgę o wykładniku rzeczywistym. Zacznijmy od definicji i własności.

Definicja . Niech $x, y \in \mathbb{R}$ oraz $x > 0$. Wówczas określamy

$$E_x^y = \{x^r : r \in \mathbb{Q}, r < y\}.$$

Własność 3.5.1. *Niech $x, y \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Wówczas $E_x^y \subset \mathbb{R}_+$. Jeśli dodatkowo $x > 1$, to $0 < \sup E_x^y < +\infty$.*

Dowód. Inkluzja $E_x^y \subset \mathbb{R}_+$ wynika z własności 3.4.3(b). Niech $x > 1$. Z twierdzenia 2.4.11 istnieją liczby $r, s \in \mathbb{Q}$ takie, że $r < y < s$. Zatem $x^r \in E_x^y$, czyli $E_x^y \neq \emptyset$. Ponieważ $x > 1$, więc z własności 3.4.5, x^s jest ograniczeniem górnym zbioru E_x^y. Stąd i z twierdzenia 2.2.5, $\sup E_x^y \in \mathbb{R}$. Ponieważ $E_x^y \subset \mathbb{R}_+$, więc $\sup E_x^y > 0$. □

Własność 3.5.1 i wniosek 2.1.9(c) pozwalają poprawnie określić pojęcie potęgi.

Definicja potęgi o wykładniku rzeczywistym. Niech $x, y \in \mathbb{R}$, gdzie $x > 0$. *Potęgą o podstawie* x *i wykładniku rzeczywistym* y nazywamy liczbę x^y określoną następująco:

$$x^y = \begin{cases} \sup E_x^y\,, & \text{gdy} \quad x > 1, \\ \\ 1\,, & \text{gdy} \quad x = 1, \\ \\ (1/x)^{-y}\,, & \text{gdy} \quad 0 < x < 1. \end{cases}$$

Pokażemy, że w przypadku potęgi x^y, gdzie $x > 0$ oraz y jest liczbą wymierną, definicje potęg o wykładniku rzeczywistym i wymiernym są zgodne. Zacznijmy od lematu.

Lemat 3.5.2. *Dla dowolnych* $x > 0$ *oraz* $\varepsilon > 1$ *istnieje* $k \in \mathbb{N}$ *takie, że*

$$0 < \sqrt[k]{x} < \varepsilon.$$

Dowód. Ponieważ $\varepsilon > 1$ i $x > 0$, więc z zasady Archimedesa dla potęgowania (wniosek 3.1.7) istnieje $k \in \mathbb{N}$ takie, że $0 < x < \varepsilon^k$. Stąd, z własności 3.3.4(a) i 3.4.4(3.4) i definicji pierwiastka liczby rzeczywistej mamy, że $0 < \sqrt[k]{x} < \varepsilon$. $\square$

Własność 3.5.3. *Niech* $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ *oraz* $y \in \mathbb{Q}$. *Wówczas definicje potęgi* x^y *o wykładniku rzeczywistym* y *jest zgodna z definicją potągi o wykładniku wymiernym* y.

Dowód. Wobec własności 3.4.3 (a) i (c), wystarczy pokazać zgodność definicji w przypadku $x > 1$. Niech $y = m/n$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$. Z własności 3.4.5 wynika, że $M = \sqrt[n]{x^m}$ jest ograniczeniem górnym zbioru E_x^y. Z definicji pierwiastka mamy, że $M > 0$. Weźmy dowolny $M' < M$. Biorąc $t > 0$ takie, że $M' < t < M$ (patrz własność 2.1.10) dostajemy, że $1 < M/t$. Zatem, w myśl lematu 3.5.2, istnieje $k \in \mathbb{N}$ takie, że $0 < \sqrt[k]{x} < M/t$. W konsekwencji

$$M' < t < M/\sqrt[k]{x} = \sqrt[n]{x^m}/\sqrt[k]{x} = x^{\frac{m}{n}-\frac{1}{k}} = x^{y-\frac{1}{k}}. \tag{3.6}$$

Ponieważ $y - 1/k$ jest liczbą wymierną mniejszą od y, więc $z = x^{y-1/k} \in E_x^y$. Stąd i z (3.6) mamy, że istnieje $z \in E_x^y$ taki, że $M' < z$. Reasumując $M = \sup E_x^y$. $\square$

Udowodnimy teraz podstawowe własności potęgi o wykładniku rzeczywistym. Zacznijmy od lematu.

Lemat 3.5.4. *Niech* $x, y, z \in \mathbb{R}$.

(a) *Jeśli* $x > 1$, *to* $x^y x^z = x^{y+z}$, *w szczególności* $x^y/x^z = x^{y-z}$ *oraz* $x^z = 1/x^{-z}$.

(b) *Jeśli* $x > 1$, $y > 1$, *to* $x^z y^z = (xy)^z$ *oraz* $x^z/y^z = (x/y)^z$.

Dowód. Z własności 3.5.1 mamy, że $E_x^y, E_x^z, E_x^{y+z} \subset \mathbb{R}_+$ oraz $E_y^z, E_{xy}^z \subset \mathbb{R}_+$, gdy $y > 0$.

Ad. (a) Udowodnimy najpierw, że $x^y x^z = x^{y+z}$. Wobec własności 2.2.10 (b) wystarczy pokazać, że

$$E_x^y \cdot E_x^z = E_x^{y+z}. \tag{3.7}$$

1) $E_x^y \cdot E_x^z \subset E_x^{y+z}$. Inkluzja ta wynika z faktu, że jeśli $x^r \in E_x^y$, $x^s \in E_x^z$, to $r, s \in \mathbb{Q}$ oraz $r < y$ i $s < z$, więc $r + s < y + z$ i $x^r x^s = x^{r+s} \in E_x^{y+z}$.
2) $E_x^y \cdot E_x^z \supset E_x^{y+z}$. Niech $x^r \in E_x^{y+z}$. Wtedy $r \in \mathbb{Q}$ i $r < y + z$, więc $r - z < y$. Z twierdzenia 2.4.11 istnieje $s \in \mathbb{Q}$, że $r - z < s < y$. Połóżmy $t = r - s$. Wówczas $s < y$ i $t < z$, więc $x^s \in E_x^y$ i $x^t \in E_x^z$. Ponadto $x^r = x^s x^t$, więc $x^r \in E_x^y \cdot E_x^z$. Pokazaliśmy więc inkluzję 2). Z inkluzji 1) i 2) dostajemy (3.7), czyli udowodniliśmy pierwszą część (a). Pozostałe równości w (a) wynikają natychmiast z udowodnionej.

Ad. (b) Udowodnimy najpierw równość $x^z y^z = (xy)^z$. Zauważmy, że

$$x^z y^z \leqslant (xy)^z. \tag{3.8}$$

Istotnie, weźmy dowolne $a \in E_x^z \cdot E_y^z$. Wtedy $a = x^r x^s$, gdzie $x^r \in E_x^z$, $y^s \in E_y^z$, przy czym $r, s \in \mathbb{Q}$ oraz $r, s < z$. Zatem $t = \max\{r, s\} \in \mathbb{Q}$ i $t < z$. W konsekwencji $b = (xy)^t \in E_{xy}^z$. Z własności 3.4.5 mamy $x^r \leqslant x^t$ i $y^s \leqslant y^t$, więc $x^r y^s \leqslant x^t y^t = (xy)^t = b$. Pokazaliśmy więc, że dla każdego $a \in E_x^z \cdot E_y^z$ istnieje $b \in E_{xy}^z$ takie, że $a \leqslant b$. Zatem, z własności 2.2.8(c) mamy $\sup(E_x^z \cdot E_y^z) \leqslant \sup E_{xy}^z$. Ponieważ $\sup(E_x^z \cdot E_y^z) = \sup E_x^z \cdot \sup E_y^z$ (patrz własność 2.2.10(b)), więc wobec definicji potęgi mamy (3.8).

Zauważmy teraz, że

$$x^z y^z \geqslant (xy)^z. \tag{3.9}$$

Istotnie, biorąc dowolny $(xy)^t \in E_{xy}^z$, mamy $t \in \mathbb{Q}$, $t < z$ i $(xy)^t = x^t y^t \in E_x^z \cdot E_y^z$. Zatem $E_{xy}^z \subset E_x^z \cdot E_y^z$ i wobec własności 2.2.8(b) i 2.2.10(b), mamy $\sup E_{xy}^z \leqslant \sup E_x^z \cdot \sup E_y^z$. To daje (3.9).

Z (3.8) i (3.9) dostajemy równość $x^z y^z = (xy)^z$.

Pokażemy teraz, że $x^z / y^z = (x/y)^z$. Istotnie, jeśli $x/y > 1$, to z pierwszej części (b),

$$(\tfrac{x}{y})^z y^z = (\tfrac{x}{y} y)^z = x^z, \qquad \text{więc} \qquad (\tfrac{x}{y})^z = \tfrac{x^z}{y^z}.$$

Jeśli $x/y = 1$, to $x = y$ i zapowiedziana równość jest oczywista. Jeśli $x/y < 1$, to $y/x > 1$ (bo $x, y > 0$), zatem

$$(\tfrac{y}{x})^z x^z = y^z, \quad \text{więc} \quad \tfrac{x^z}{y^z} = \tfrac{1}{(y/x)^z} \quad \text{i wobec (a),} \quad \tfrac{x^z}{y^z} = \tfrac{1}{(y/x)^z} = (\tfrac{y}{x})^{-z} = (\tfrac{x}{y})^z.$$

Reasumując mamy równość $x^z / y^z = (x/y)^z$. To kończy dowód. □

Twierdzenie 3.5.5. *Niech $x, y, z \in \mathbb{R}$.*

(a) *Jeśli $x > 0$, to $x^y > 0$.*

(b) *Jeśli $x > 1$ i $y > 0$, to $x^y > 1$.*

(c) *Jeśli $x > 1$, to*
$y < z$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $x^y < x^z$.

(d) *Jeśli $x, y, z > 0$, to*
$x < y$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $x^z < y^z$.

Dowód. Ad. (a) Jeśli $x > 1$, to nierówność $x^y > 0$ wynika z własności 3.5.1. Jeśli $x = 1$, to $x^y = 1 > 0$. Jeśli $0 < x < 1$, to $1/x > 1$ (patrz wniosek 2.1.9(c)), więc tezę dostajemy z pierwszego przypadku.

Ad. (b) Z twierdzenia 2.4.11 istnieje $r \in \mathbb{Q}$ takie, że $0 < r < y$, więc $x^r \in E_x^y$. Zatem, z własności 3.4.4(3.5) mamy $x^y = \sup E_x^y \geqslant x^r > 1$. To daje (b).

Ad. (c) Załóżmy, że $y < z$. Wówczas istnieją $r, s \in \mathbb{Q}$ takie, że $y < r < s < z$. Wówczas $x^s \in E_x^z$ i z własności 3.4.5, x^r jest ograniczeniem górnym zbioru E_x^y. Ponadto

$$x^y = \sup E_x^y \leqslant x^r < x^s \leqslant \sup E_x^z = x^z.$$

To daje implikację prostą w punkcie (c). Implikacja odwrotna wynika z udowodnionej.

Ad. (d) Załóżmy, że $x < y$. Wtedy $1 < y/x$ i ponieważ $z > 0$, więc z (b) mamy $1 < (y/x)^z$. Ponadto z (a) mamy $x^z > 0$, więc

$$x^z < x^z (\tfrac{y}{x})^z.$$

Jeśli $x > 1$, to z lematu 3.5.4(b) mamy

$$x^z (\tfrac{y}{x})^z = (x\tfrac{y}{x})^z = y^z, \qquad \text{czyli} \qquad x^z < y^z.$$

Jeśli $x = 1$, to nierówność $x^z < y^z$ wynika z (b). Jeśli $0 < x < 1$, to $1/x > 1$ i z lematu 3.5.4(b),

$$x^z = (\tfrac{1}{x})^{-z} = \tfrac{1}{(1/x)^z}, \quad \text{zatem} \quad x^z (\tfrac{y}{x})^z = \tfrac{(y/x)^z}{(1/x)^z} = y^z, \quad \text{więc} \quad x^z < y^z.$$

Reasumując udowodniliśmy implikację prostą w punkcie (d). Implikacja odwrotna wynika z udowodnionej. □

Lemat 3.5.6. *Jeśli $x, y, z \in \mathbb{R}$ oraz $x > 1$, $y, z > 0$, to $(x^y)^z = x^{yz}$.*

Dowód. Udowodnimy najpierw, że

$$(x^y)^z \leqslant x^{yz}. \tag{3.10}$$

Stosując definicję potęgi, wystarczy pokazać, że $\sup E_{x^y}^z \leqslant x^{yz}$. Przypuśćmy przeciwnie, że $\sup E_{x^y}^z > x^{yz}$. Wtedy istnieje $(x^y)^s \in E_{x^y}^z$, gdzie $s \in \mathbb{Q}$ oraz $s < z$, że

$$(x^y)^s > x^{yz}. \tag{3.11}$$

Ponieważ $x > 1$ oraz $y, z > 0$, więc z twierdzenia 3.5.5(b) mamy $x^y > 1$ oraz $x^{yz} > 1$. W szczególności $(x^y)^s > 1 = (x^y)^0$, więc z własności 3.4.5 mamy $s > 0$. Zatem, z własności 3.4.3(e) i 3.4.4(3.4) oraz wzoru (3.11) mamy $x^y = ((x^y)^s)^{1/s} > (x^{yz})^{1/s}$, przy czym $(x^{yz})^{1/s} > 1$. Stąd i z faktu, że $x^y = \sup E_x^y$ dostajemy, że istnieje $x^r \in E_x^y$ takie, że $x^r > (x^{yz})^{1/s}$ oraz $r \in \mathbb{Q}$, $r < y$. W konsekwencji $x^r > 1$, a więc $r > 0$. Zatem $x^{rs} > x^{yz}$. To jest jednak niemożliwe, gdyż $rs < yz$, więc $x^{rs} < x^{yz}$ (patrz twierdzenie 3.5.5(c)). Z otrzymanej sprzeczności dostajemy (3.10).

Udowodnimy teraz, że

$$(x^y)^z \geqslant x^{yz}. \tag{3.12}$$

Wystarczy wykazać, że $(x^y)^z$ jest ograniczeniem górnym zbioru E_x^{yz}. Weźmy dowolny $x^t \in E_x^{yz}$, gdzie $t \in \mathbb{Q}$ oraz $t < yz$. Pokażemy, że

$$x^t \leqslant (x^y)^z. \tag{3.13}$$

Z założenia mamy $x > 1$, więc wobec własności 3.4.5, wystarczy rozważyć przypadek, gdy $t > 0$. Ponieważ $0 < t < yz$, więc $t/y < z$, a więc istnieje $w \in \mathbb{Q}$ takie, że $t/y < w < z$ (patrz twierdzenie 2.4.11). Stąd $t/w < y$ oraz $t/w \in \mathbb{Q}$, więc $x^{t/w} \in E_x^y$ i w konsekwencji $x^{t/w} \leqslant x^y$. Stąd, z własności 3.4.3(e) i 3.4.4(3.4) mamy $x^t \leqslant (x^y)^w$. Ponieważ $w < z$ i $w \in \mathbb{Q}$, więc $(x^y)^w \in E_{x^y}^z$. Zatem $(x^y)^w \leqslant (x^y)^z$. Reasumując $x^t \leqslant (x^y)^z$, czyli pokazaliśmy (3.13). Z (3.13) dostajemy (3.12).

(3.10) i (3.12) daje tezę. □

Twierdzenie 3.5.7. *Niech $x, y, z \in \mathbb{R}$. Wówczas*

(a) *Jeśli $x > 0$, to $x^y x^z = x^{y+z}$.*

(b) *Jeśli $x > 0$ i $y > 0$, to $x^z y^z = (xy)^z$.*

(c) *Jeśli $x > 0$ i $y > 0$, to $x^z/y^z = (x/y)^z$.*

(d) *Jeśli $x > 0$, to $(x^y)^z = x^{yz}$.*

Dowód. Ad. (a) Mamy następujące przypadki:
(a_1) $x > 1$. Wtedy teza wynika z lematu 3.5.4(a).
(a_2) $x = 1$. Wtedy teza wynika z definicji potęgi.
(a_3) $0 < x < 1$. Wtedy z wniosku 2.1.9(c) mamy $1/x > 1$, więc z definicji potęgi i przypadku (a_1) mamy

$$x^y x^z = (\tfrac{1}{x})^{-y}(\tfrac{1}{x})^{-z} = (\tfrac{1}{x})^{-(y+z)} = x^{y+z}.$$

Ad. (b) Mamy następujące przypadki:
(b_1) $x > 1$ i $y > 1$. Wtedy teza wynika z lematu 3.5.4(b).
(b_2) $x > 1$ i $0 < y < 1$ i $xy > 1$. Wtedy $1/y > 1$, z własności 3.5.3 zaś, $(1/y)^0 = 1$. Stąd, z przypadku (b_1) i punktu (a) mamy

$$x^z y^z = (xy\tfrac{1}{y})^z y^z = (xy)^z(\tfrac{1}{y})^z(\tfrac{1}{y})^{-z} = (xy)^z(\tfrac{1}{y})^0 = (xy)^z.$$

(b_3) $x > 1$ i $0 < y < 1$ i $xy = 1$. Wtedy $(xy)^z = 1$ i podobnie jak w przypadku (b_2),

$$x^z y^z = (xy\tfrac{1}{y})^z y^z = (\tfrac{1}{y})^z(\tfrac{1}{y})^{-z} = (\tfrac{1}{y})^0 = 1 = (xy)^z.$$

(b_4) $x > 1$ i $0 < y < 1$ i $0 < xy < 1$. Wtedy podobnie jak w przypadku (b_2) mamy $1/(xy) > 1$ oraz

$$x^z y^z = x^z(\tfrac{1}{y})^{-z} = x^z(\tfrac{1}{xy}x)^{-z} = x^z(\tfrac{1}{xy})^{-z}x^{-z} = (\tfrac{1}{xy})^{-z} = (xy)^z.$$

(b_5) $x = 1$. Wtedy teza jest oczywista.
(b_6) $0 < x < 1$ i $y > 1$. Zamieniając rolami x i y, z przypadku (b_2), (b_3) i (b_4) dostajemy tezę.

(b_7) $0 < x < 1$ i $0 < y < 1$. Wtedy $0 < xy < 1$ i analogicznie jak w przypadku (b_2),

$$x^z y^z = (\tfrac{1}{x})^{-z}(\tfrac{1}{y})^{-z} = (\tfrac{1}{xy})^{-z} = (xy)^z.$$

Ad. (c) Z części (b) mamy $y^z(1/y)^z = (y/y)^z = 1^z = 1$, więc $(1/y)^z = 1/y^z$. Stąd i z części (b) mamy

$$\tfrac{x^z}{y^z} = x^z \tfrac{1}{y^z} = x^z(\tfrac{1}{y})^z = (\tfrac{x}{y})^z.$$

Ad. (d) Mamy przypadki:

(d_1) $x > 1$ i $y > 0$ i $z > 0$. Wtedy teza wynika z lematu 3.5.6.

(d_2) $x > 1$ i $y = 0$. Wtedy $x^y = 1$, więc $(x^y)^z = 1$ oraz $x^{yz} = 1$. Zatem teza zachodzi.

(d_3) $x > 1$ i $y < 0$ i $z > 0$. Z własności (a) mamy $x^y x^{-y} = 1$, więc $x^y = 1/x^{-y}$ i analogicznie $x^{yz} = 1/x^{-yz}$. Zatem z przypadku (d_1) i (b) dostajemy

$$(x^y)^z = (\tfrac{1}{x^{-y}})^z = \tfrac{1}{(x^{-y})^z} = \tfrac{1}{x^{-yz}} = x^{yz}.$$

(d_4) $x > 1$ i $z = 0$. Wtedy teza jest oczywista.

(d_5) $x > 1$ i $y > 0$ i $z < 0$. Wtedy z (d_1) mamy $(x^y)^z = 1/(x^y)^{-z} = 1/x^{-yz} = x^{yz}$.

(d_6) $x > 1$ i $y < 0$ i $z < 0$. Wtedy $(x^y)^z = (1/x^{-y})^z = 1/(x^{-y})^z = 1/x^{-yz} = x^{yz}$.

(d_7) $x = 1$. Wtedy teza jest oczywista.

(d_8) $0 < x < 1$. Wtedy $1/x > 1$. Z przypadków (d_1) – (d_6) mamy, że teza zachodzi, dla $1/x$. Zatem z definicji potęgi $(x^y)^z = ((1/x)^{-y})^z = (1/x)^{-yz} = x^{yz}$. □

Z faktu $x^y \neq 0$ dla $x > 0$ i twierdzenia 3.5.7(b) dostajemy natychmiast

Wniosek 3.5.8. *Niech $x, y, z \in \mathbb{R}$ oraz $x > 0$. Wówczas:*

(a) $x^y = 1/x^{-y}$.

(b) $x^y/x^z = x^{y-z}$.

ZADANIA

Zadanie 3.5.1. *Niech $x, y, z \in \mathbb{R}$ oraz $0 < x < 1$. Wówczas*

$$y < z \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad x^y > x^z.$$

Zadanie 3.5.2. *Niech $x, y \in \mathbb{R}$. Jeśli $x > 1$, to $x^y = \inf\{x^r : r \in \mathbb{Q},\ r > y\}$.*

Zadanie 3.5.3.* *Rozważmy równanie $x^y = y^x$, gdzie x, y są liczbami wymiernymi dodatnimi, $x < y$. Wówczas liczby $x = (1 + 1/n)^n$, $y = (1 + 1/n)^{n+1}$ spełniają to równanie. Uzasadnić, że są to wszystkie wymierne rozwiązania równania takie, że $x < y$.*

Zadanie 3.5.4. *Uzasadnić, że istnieją $x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ takie, że $x^y \in \mathbb{Q}$.*

3.6 Logarytm

Określimy tutaj pojęcie logarytmu. Zacznijmy od twierdzenia.

Twierdzenie 3.6.1. *Niech $x, a \in \mathbb{R}$. Jeśli $a > 0$, $a \neq 1$ i $x > 0$, to istnieje dokładnie jedno $y \in \mathbb{R}$ takie, że $a^y = x$.*

Dowód. Rozważmy najpierw przypadek $a > 1$. Pokażemy istnienie liczby y. Niech

$$E = \{t \in \mathbb{R} : a^t < x\}.$$

Pokażemy, że zbiór E jest niepusty. Istotnie, z założenia $a > 1$ i zasady Archimedesa dla potęgowania (wniosek 3.1.7) istnieje $m \in \mathbb{N}$ takie, że $a^m > \frac{1}{x}$. Stąd mamy $a^{-m} < x$, więc $-m \in E$.

Pokażemy, że zbiór E jest ograniczony z góry. Z zasady Archimedesa dla potęgowania istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $a^n > x$. Stąd, wobec twierdzenia 3.5.5(c) dla $t \geqslant n$ mamy $a^t \geqslant a^n > x$, czyli żadna liczba $t \geqslant n$ nie należy do E. W konsekwencji n jest ograniczeniem górnym zbioru E.

Pokazaliśmy, że E jest niepusty i ograniczony z góry. Zatem na mocy twierdzenia 2.2.5, $\sup E \in \mathbb{R}$. Oznaczmy $y = \sup E$. Pokażemy, że $a^y = x$. Przypuśćmy przeciwnie, że $a^y \neq x$. Wówczas $a^y > x$ lub $a^y < x$.

Jeśli $a^y > x$, to istnieje $z \in \mathbb{R}$, że $a^y > z > x$, w szczególności $\frac{z}{x} > 1$. Z zasady Archimedesa dla potęgowania istnieje $k \in \mathbb{N}$, że $\left(\frac{z}{x}\right)^k > a$. Stąd mamy $\frac{z}{x} > a^{1/k}$, więc $za^{-1/k} > x$. Ponieważ $a^y > z$, więc

$$a^{y-1/k} = a^y a^{-1/k} > za^{-1/k} > x.$$

Weźmy dowolny $t \in E$. Wówczas z powyższego, $a^t < x < a^{y-1/k}$, czyli $t < y - \frac{1}{k}$ i $y - \frac{1}{k}$ jest ograniczeniem górnym zbioru E. W konsekwencji $y = \sup E \leqslant y - \frac{1}{k} < y$. To jest niemożliwe, więc nierówność $a^y > x$ jest fałszywa.

Jeśli $a^y < x$, to istnieje $w \in \mathbb{R}$, że $a^y < w < x$. W szczególności $w > 0$ i $\frac{x}{w} > 1$. Z zasady Archimedesa dla potęgowania istnieje $j \in \mathbb{N}$, że $\left(\frac{x}{w}\right)^j > a$. Stąd wynika, że $wa^{1/j} < x$. Ponieważ $a^y < w$, więc

$$a^{y+1/j} = a^y a^{1/j} < wa^{1/j} < x.$$

W konsekwencji $y + \frac{1}{j} \in E$, co jest niemożliwe, bo wtedy $y < y + \frac{1}{j} \leqslant \sup E = y$.

Obydwa powyższe przypadki doprowadziły nas do sprzeczności. W konsekwencji musi być $a^y = x$. Jedyność liczby y wynika z twierdzenia 3.5.5(c).

Rozważmy teraz przypadek $0 < a < 1$. Wtedy $\frac{1}{a} > 1$, więc z pierwszej części dowodu istnieje $\tilde{y} \in \mathbb{R}$, że $\left(\frac{1}{a}\right)^{\tilde{y}} = x$. Biorąc $y = -\tilde{y}$ dostajemy $a^y = x$. Pozostaje pokazać jedyność liczby y. Jeśli $a^{y_1} = a^{y_2}$, to $\left(\frac{1}{a}\right)^{-y_1} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-y_2}$, więc z pierwszej części dowodu, $-y_1 = -y_2$, czyli $y_1 = y_2$. □

Definicja logarytmu. Niech $x, a \in \mathbb{R}$ oraz $x > 0$ i $a > 0$, $a \neq 1$. *Logarytmem przy podstawie a z liczby x* nazywamy taką liczbę $y \in \mathbb{R}$, że $a^y = x$ i oznaczamy $\log_a x$.

Uwaga 3.6.2. *Niech $x, a \in \mathbb{R}$, $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$. Z twierdzenia 3.6.1 dostajemy, że $\log_a x$ istnieje i jest określony jednoznacznie. Ponadto*

$$x^y = a^{y \log_a x} \qquad \text{dla} \qquad y \in \mathbb{R}$$

oraz

$$y = \log_a x \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad a^y = x.$$

W szczególności $\log_a a = 1$ oraz

$$\log_a x = 0 \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad x = 1.$$

Z definicji logarytmu i własności potęgi dostajemy

Własność 3.6.3. *Niech $x, y, a, b \in \mathbb{R}$.*

(a) *Jeśli $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $y > 0$, to*

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \qquad \text{oraz} \qquad \log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y.$$

(b) *Jeśli $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, to*

$$\log_a x^y = y \log_a x.$$

(c) *Jeśli $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, to*

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

(d) *Jeśli $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, $x > 0$, to*

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

Własność 3.6.4. *Niech $x, y, a \in \mathbb{R}$.*

(a) *Jeśli $a > 1$ i $0 < x < y$, to $\log_a x < \log_a y$.*

(b) *Jeśli $0 < a < 1$ i $0 < x < y$, to $\log_a x > \log_a y$.*

3.7 Informacje o funkcjach rzeczywistych

Definicja funkcji rzeczywistej. *Funkcją rzeczywistą* nazywamy każdą funkcję postaci

$$f : E \to \mathbb{R}, \qquad \text{gdzie} \quad E \subset \mathbb{R}, \quad E \neq \emptyset.$$

Każdą liczbę $x \in E$ taką, że $f(x) = 0$ nazywamy *pierwiastkiem* lub *zerem funkcji f*.

Definicja sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji rzeczywistych. Niech $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$ oraz $f, g : E \to \mathbb{R}$.

Sumą funkcji f i g nazywamy funkcję $f + g : E \to \mathbb{R}$ określoną wzorem

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad x \in E.$$

Różnicą funkcjif i g nazywamy funkcję $f - g : E \to \mathbb{R}$ określoną wzorem

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x), \qquad x \in E.$$

Iloczynem funkcji f i g nazywamy funkcję $fg : E \to \mathbb{R}$ określoną wzorem

$$(fg)(x) = f(x)g(x), \qquad x \in E.$$

Ilorazem funkcji f i g nazywamy funkcję $f/g : E \to \mathbb{R}$ określoną wzorem

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x), \qquad x \in E,$$

przy założeniu, że $g(x) \neq 0$ dla $x \in E$. Iloraz funkcji f/g oznaczamy również $\frac{f}{g}$.

Iloczynem funkcji f przez liczbę $\alpha \in \mathbb{R}$ nazywamy funkcję $\alpha f : E \to \mathbb{R}$ określoną wzorem

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \qquad x \in E.$$

Definicja funkcji monotonicznej. Niech $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$ oraz $f : E \to \mathbb{R}$.

Mówimy, że funkcja f jest *rosnąca*, gdy

dla dowolnych $x, y \in E$ takich, że $x < y$, zachodzi $f(x) \leqslant f(y)$.

Mówimy, że funkcja f jest *ściśle rosnąca*, gdy

dla dowolnych $x, y \in E$ takich, że $x < y$, zachodzi $f(x) < f(y)$.

Mówimy, że funkcja f jest *malejąca*, gdy

dla dowolnych $x, y \in E$ takich, że $x < y$, zachodzi $f(x) \geqslant f(y)$.

Mówimy, że funkcja f jest *ściśle malejąca* , gdy

dla dowolnych $x, y \in E$ takich, że $x < y$, zachodzi $f(x) > f(y)$.

Mówimy, że funkcja f jest *monotoniczna*, gdy jest rosnąca lub jest malejąca.

Mówimy, że funkcja f jest *ściśle monotoniczna*, gdy jest ściśle rosnąca lub ściśle malejąca.

Bezpośrednio z definicji dostajemy

Własność 3.7.1. *Złożenie funkcji monotonicznych jest funkcją monotoniczną oraz złożenie funkcji ściśle monotonicznych jest funkcją ściśle monotoniczną.*

Definicja funkcji parzystej i nieparzystej. Niech $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$ oraz $f : E \to \mathbb{R}$.

Mówimy, że funkcja f jest *parzysta*, gdy

dla każdego $x \in E$, zachodzi $-x \in E$ oraz $f(-x) = f(x)$.

Mówimy, że funkcja f jest *nieparzysta*, gdy

dla każdego $x \in E$, zachodzi $-x \in E$ oraz $f(-x) = -f(x)$.

Własność 3.7.2. *Każda funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest sumą funkcji parzystej i nieparzystej.*

Dowód. Niech $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będą określone następująco $g(x) = (f(x) + f(-x))/2$, $h(x) = (f(x) - f(-x))/2$ dla $x \in \mathbb{R}$. Wtedy g jest funkcją parzystą, h jest zaś funkcją nieparzysta i oczywiście $f = g + h$. $\square$

Definicja funkcji okresowej. Niech $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$ oraz $f : E \to \mathbb{R}$. Funkcję f nazywamy *okresową*, gdy istnieje $T \in \mathbb{R}$, $T \neq 0$ takie, że dla każdego $x \in E$, zachodzi $x + T \in E$, $x - T \in E$ oraz $f(x + T) = f(x)$. Każdą taką liczbę T nazywamy *okresem* funkcji f. Najmniejszy dodatni okres funkcji nazywamy *okresem podstawowym* tej funkcji.

Uwaga 3.7.3. *Istnieją funkcje okresowe, które nie mają okresu podstawowego. Przykładem takiej funkcji jest funkcja Dirichleta określona następująco*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{dla} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Definicja funkcji ograniczonej. Niech $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$ oraz $f : E \to \mathbb{R}$.

Mówimy, że funkcja f jest *ograniczona z góry*, gdy zbiór $f(E)$ jest ograniczony z góry.
Mówimy, że funkcja f jest *ograniczona z dołu*, gdy zbiór $f(E)$ jest ograniczony z dołu.
Mówimy, że funkcja f jest *ograniczona*, gdy zbiór $f(E)$ jest ograniczony.

Definicja kresu górnego i dolnego funkcji. Niech $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$ oraz $f : E \to \mathbb{R}$.

Kresem górnym funkcji f nazywamy $\sup f(E)$.
Kresem dolnym funkcji f nazywamy $\inf f(E)$.
Największą wartością funkcji f nazywamy $\max f(E)$.
Najmniejszą wartością funkcji f nazywamy $\min f(E)$.

Uwaga 3.7.4. *Istnieją funkcje, które nie mają najmniejszej wartości i największej wartości. Przykładem takiej funkcji jest* $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$.

3.8 Funkcja potęgowa, wykładnicza i logarytmiczna

Definicja funkcji potęgowej. Niech $\alpha \in \mathbb{R}$. *Funkcją potęgową o wykładniku* α nazywamy funkcję określoną wzorem

$$\begin{array}{llll} f(x) = x^\alpha, & x \in \mathbb{R}, & \text{gdy} & \alpha \in \mathbb{N}, \\ f(x) = x^\alpha, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, & \text{gdy} & \alpha \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}, \\ f(x) = x^\alpha, & x \in \mathbb{R}_+^0, & \text{gdy} & \alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Z}, \\ f(x) = x^\alpha, & x \in \mathbb{R}_+, & \text{gdy} & \alpha \in \mathbb{R}_- \setminus \mathbb{Z}. \end{array}$$

Uwaga 3.8.1. *Funkcja potęgowa jest poprawnie określona (patrz definicja potęgi o wykładniku naturalnym, całkowitym i rzeczywistym oraz uwagi 3.1.1, 3.2.1). Nie można analogicznie rozszerzyć funkcji potęgowej o wykładniku wymiernym na* $\mathbb{R}_-$ *(patrz uwaga 3.4.2).*

Z twierdzenia 3.5.5(d) i 3.5.7(c),(d) dostajemy natychmiast

Własność 3.8.2. *Niech* $\alpha \in \mathbb{R}$ *oraz* $f(x) = x^\alpha$, $x \in \mathbb{R}_+$.

(a) *Jeśli* $\alpha > 0$, *to* f *jest funkcją ściśle rosnącą.*
(b) *Jeśli* $\alpha = 0$, *to* f *jest funkcją stałą.*
(c) *Jeśli* $\alpha < 0$, *to* f *jest funkcją ściśle malejącą.*

Z powyższej własności i twierdzenia 3.5.7(d) dostajemy natychmiast

Wniosek 3.8.3. *Niech* $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ *oraz* $f(x) = x^\alpha$, $x \in \mathbb{R}_+$. *Wówczas*
(a) f *jest funkcją różnowartościową.*
(b) *Zbiorem wartości funkcji* f *jest* $\mathbb{R}_+$.

Szczególnym przypadkiem funkcji potęgowej jest funkcja pierwiastkowa określona poniżej.

Definicja funkcji pierwiastkowej. Niech $n \in \mathbb{N}$. *Funkcją pierwiastkową* n*-tego stopnia* nazywamy funkcję określoną wzorem

$$f(x) = \sqrt[n]{x}, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad \text{gdy} \quad n \text{ jest liczbą nieparzystą,}$$

$$f(x) = \sqrt[n]{x}, \qquad x \in \mathbb{R}^0_+, \qquad \text{gdy} \quad n \text{ jest liczbą parzystą}$$

Uwaga 3.8.4. *Z definicji pierwiastka liczby rzeczywistej dostajemy, że funkcja pierwiastkowa jest poprawnie określona. W zbiorze* $\mathbb{R}_+$ *funkcja pierwiastkowa* $\sqrt[n]{x}$ *pokrywa się z funkcją potęgową* $x^{1/n}$ *(patrz wniosek 3.3.5 i uwaga 3.4.1).*

Definicja funkcji wykładniczej. Niech $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. *Funkcją wykładniczą o podstawie* a nazywamy funkcję określoną wzorem

$$f(x) = a^x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Bezpośrednio z twierdzeń 3.5.5(c), 3.5.7(c) dostajemy (por. zadanie 3.5.1)

Własność 3.8.5. *Niech* f *będzie funkcją wykładniczą o podstawie* $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.
(a) *Jeśli* $0 < a < 1$, *to* f *jest funkcją ściśle malejącą.*
(b) *Jeśli* $a = 1$, *to* f *jest funkcją stałą.*
(c) *Jeśli* $a > 1$, *to* f *jest funkcją ściśle rosnącą.*

Z powyższej własności oraz z twierdzeń 3.5.5(a) i 3.6.1 dostajemy

Wniosek 3.8.6. *Niech* f *będzie funkcją wykładniczą o podstawie* $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.
(a) *Wówczas* $f(x) > 0$ *dla* $x \in \mathbb{R}$.
(b) *Jeśli* $a \neq 1$, *to* f *jest funkcją różnowartościową.*
(c) *Jeśli* $a \neq 1$, *to zbiór wartości funkcji* f *jest równy* $\mathbb{R}_+$.

Definicja funkcji logarytmicznej. Niech $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$. *Funkcją logarytmiczną o podstawie* a nazywamy funkcję określoną wzorem

$$f(x) = \log_a x, \qquad x \in \mathbb{R}_+.$$

Bezpośrednio z własności 3.6.4 dostajemy

Własność 3.8.7. *Niech* f *będzie funkcją logarytmiczną o podstawie* $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$.
(a) *Jeśli* $0 < a < 1$, *to* f *jest funkcją ściśle malejącą.*
(b) *Jeśli* $a > 1$, *to* f *jest funkcją ściśle rosnącą.*

Z powyższej własności oraz z twierdzenia 3.5.5(a) dostajemy

Wniosek 3.8.8. *Niech f będzie funkcją logarytmiczną o podstawie $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$.*
(a) *Wówczas f jest funkcją różnowartościową.*
(b) *Wówczas zbiór wartości funkcji f jest równy $\mathbb{R}$.*

Dowód. Część (a) wynika z własności 3.8.7. Udowodnimy część (b). Niech $y \in \mathbb{R}$. Weźmy $x = a^y$. Z twierdzenia 3.5.5(a) mamy $x > 0$, więc z definicji logarytmu, $y = \log_a x$. To daje, że y należy do zbioru wartości funkcji f i kończy dowod. □

Z definicji funkcji logarytmicznej oraz własności 3.8.8(b) i 3.8.6(c) dostajemy

Wniosek 3.8.9. *Niech $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$. Jeśli f jest funkcją logarytmiczną o podstawie a oraz $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ – funkcją określoną wzorem $g(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$* ([3]), to $f = g^{-1}$.

3.9 Wielomiany i funkcje wymierne.

Definicja ciągu skończonego o wskaźnikach $0, ..., n$. Niech X będzie niepustym zbiorem. Funkcję $a : \{0\} \to X$ lub $a : \{0\} \cup \mathbb{F}_n \to X$ nazywamy *ciągiem skończonym o wskaźnikach* $0, ..., n$. Przyjmując analogiczne oznaczenia i określenia jak w definicji ciągu skończonego, k-ty wyraz ciągu a oznaczamy $a_k = a(k)$, $k = 0, ..., n$. Ciąg a zapisujemy $(a_0, ..., a_n)$. Pisząc $a_0, ..., a_n \in X$ rozumiemy, że wszystkie wartości ciągu a należą do X.

Definicja funkcji wielomianowej. Niech $a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 0$. *Funkcją wielomianową* lub *wielomianem* nazywamy funkcję postaci

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{3.14}$$

Przyjmujemy tutaj $0^0 = 1$. Wielomian postaci $f(x) = ax^k$, gdzie $a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant 0$, nazywamy *jednomianem.*

Liczby $a_0, ..., a_n$ nazywamy *współczynnikami wielomianu* f. Liczbę a_0 nazywamy *wyrazem wolnym wielomianu* f.

Jeśli nie wszystkie współczynniki $a_0, ..., a_n$ są równe zeru, to największą liczbę k taką, że $a_k \neq 0$ nazywamy *stopniem wielomianu* f i oznaczamy $\deg f$. Jeśli $a_0 = ... = a_n = 0$, to przyjmujemy $\deg f = -\infty$.

Jeśli istnieje $c \in \mathbb{R}$ takie, że $f(x) = c$ dla $x \in \mathbb{R}$, to wielomian f nazywamy *stałym.* Wielomian $f(x) = 0$ dla $x \in \mathbb{R}$ nazywamy *wielomianem zerowym*, w przeciwnym przypadku wielomian nazywamy *niezerowym.*

Własność 3.9.1. *Jeśli f i g są wielomianami, to $f + g$ oraz fg są wielomianami.*

Dowód. Niech f i g będą wielomianami odpowiednio postaci

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \qquad g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m.$$

Kładąc ewentualnie $a_k = 0$ dla $n < k \leqslant m$, gdy $m > n$ oraz $b_k = 0$ dla $m < k \leqslant n$, gdy $n > m$, możemy założyć, że $m = n$. Wtedy $(f+g)(x) = (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\cdots+(a_n+b_n)x^n$,

[3] g jest funkcją wykładniczą, gdzie przeciwdziedziną jest $\mathbb{R}_+$.

więc $f+g$ jest wielomianem. To daje pierwszą część tezy. Stąd, indukcyjnie dostajemy, że suma dowolnej skończonej ilości wielomianów jest wielomianem. Ponadto mamy

$$f(x)g(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i g(x) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_i b_j x^{i+j}.$$

Zatem fg jest wielomianem. □

Lemat 3.9.2. *Niech f będzie wielomianem postaci (3.14). Jeśli $f(x) = 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, to $a_0 = \cdots = a_n = 0$.*

Dowód. Załóżmy, że nie wszystkie współczynniki $a_0, ..., a_n$ wielomianu f są zerami. Można założyć, że $a_n \neq 0$. Wystarczy pokazać, że istnieje $x \in \mathbb{R}$ taki, że $f(x) \neq 0$. Jeśli $n = 0$, to teza jest oczywista. Załóżmy, że $n > 0$. Niech

$$r = \max\{|a_k/a_n|^{1/(n-k)} : k = 0, ..., n-1\}.$$

Wtedy $r \geqslant 0$ oraz dla każdego $k = 0, ..., n-1$ mamy

$$|a_k/a_n| r^k = (|a_k/a_n|^{1/(n-k)})^{n-k} r^k \leqslant r^{n-k} r^k = r^n. \tag{3.15}$$

Jeśli $r = 0$, to $f(x) = a_n x^n$ i $f(1) = a_n \neq 0$. Załóżmy, że $r \neq 0$. Wtedy $r > 0$. Pokażemy, że $f(2r) \neq 0$. Przypuśćmy przeciwnie, że $f(2r) = 0$. Wówczas

$$-2^n r^n = (a_0/a_n) + (a_1/a_n)2r + \cdots + (a_{n-1}/a_n)2^{n-1} r^{n-1},$$

więc z (3.15) mamy

$$2^n r^n \leqslant |a_0/a_n| + 2|a_1/a_n| r + \cdots + 2^{n-1}|a_{n-1}/a_n| r^{n-1} \leqslant r^n + 2r^n + \cdots + 2^{n-1} r^n.$$

Stąd, ponieważ $r > 0$, dostajemy $2^n \leqslant 1 + 2 + \cdots 2^{n-1}$. To jest jednak niemożliwe, gdyż łatwą indukcją pokazujemy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $1 + 2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$. Otrzymana sprzeczność kończy dowód. □

Z lematu 3.9.2 dostajemy natychmiast

Wniosek 3.9.3. *Jeśli dwie funkcje wielomianowe są równe, to mają współczynniki przy odpowiednich potęgach równe.*

Uwaga 3.9.4. *Z wniosku 3.9.3 dostajemy, że pojęcie stopnia wielomianu jest poprawnie określone.*

Własność 3.9.5. *Jeśli f, g są wielomianami, to*

$$\deg(fg) = \deg f + \deg g, \qquad \deg(f+g) \leqslant \max\{\deg f, \deg g\},$$

gdzie przyjmujemy $\max\{a, -\infty\} = \max\{-\infty, a\} = a$, *dla* $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Dowód. Łatwo sprawdzamy, że jeśli $\deg f > \deg g$, to $\deg(f+g) = \deg f$. Ponadto jeśli f lub g jest jednomianem, to tezę dostajemy bezpośrednio z definicji wielomianu.

Jeśli $\deg f + \deg g = -\infty$, to teza jest oczywista. Wystarczy więc pokazać, że $\mathbb{Z}_0 = \{m \in \mathbb{Z} : m \geqslant 0\}$ pokrywa się ze zbiorem $Z = \{m \in \mathbb{Z}_0 :$ dla dowolnych wielomianów f i g takich, że $0 \leqslant \deg f + \deg g \leqslant m$ zachodzi teza własności$\}$.

(i) Niech $\deg f + \deg g = 0$. Wówczas f i g są wielomianami stałymi, a więc jednomianami. Z uwagi poczynionej na początku dowodu mamy więc, że teza własności zachodzi dla f i g. To daje, że $0 \in Z$.

(ii) Niech $m \in Z$ oraz niech f i g będą wielomianami takimi, że $\deg f + \deg g = m+1$. Oznaczmy $\deg f = k$, $\deg g = l$. Ponieważ $k + l = m + 1 > 1$, więc $k \geqslant 1$ lub $l \geqslant 1$. Rozważmy przypadek $k \geqslant 1$, przypadek $l \geqslant 1$ rozważamy analogicznie. Ponieważ $k \geqslant 1$, więc istnieje $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ takie, że $\deg(f - ax^k) < k$. Oznaczając $h = f - ax^k$ dostajemy $\deg h + \deg g \leqslant m$ oraz $fg = hg + ax^k g$ i $f + g = (h+g) + ax^k$. Wówczas z założenia, że $m \in Z$ mamy $\deg(hg) \leqslant k+l-1$ oraz $\deg(h+g) \leqslant \max\{k-1, l\}$. Z uwagi poczynionej na początku dowodu mamy $\deg(ax^k g) = k+l$, więc $\deg(fg) = k+l$ oraz $\deg((h+g)+ax^k) \leqslant \max\{\max\{k-1,l\},k\} = \max\{k,l\}$, więc $\deg(f+g) \leqslant \max\{k,l\}$. To daje, że $m+1 \in Z$. Reasumując z twierdzenia 2.4.5 mamy tezę. □

Twierdzenie 3.9.6. *Niech f będzie wielomianem. Jeśli $a \in \mathbb{R}$ oraz $f(a) = 0$, to istnieje wielomian g taki, że $f(x) = (x-a)g(x)$.*

Dowód. Jeśli f jest wielomianem stałym, to teza jest oczywista. Wystarczy więc pokazać, że $\mathbb{N}$ pokrywa się ze zbiorem $N = \{n \in \mathbb{N} :$ dla każdego wielomianu f stopnia co najwyżej n takiego, że $f(a) = 0$ istnieje wielomian g taki, że $f(x) = (x-a)g(x)\}$.

(i) Jeśli $\deg f = 1$, to $f(x) = a_0 + a_1 x$, $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$, $a_1 \neq 0$. Wówczas warunek $f(a) = 0$ oznacza, że $a_0 = -a_1 a$, więc $f(x) = (x-a)a_1$. Biorąc $g(x) = a_1$, $x \in \mathbb{R}$ dostajemy $1 \in N$.

(ii) Załóżmy, że $n \in N$. Niech $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x + a_{n+1} x^{n+1}$, gdzie $a_0, ..., a_{n+1} \in \mathbb{R}$, $a_{n+1} \neq 0$. Ponieważ $a_{n+1}x^{n+1} = a_{n+1}x^n(x-a) + a_{n+1}ax^n$, więc oznaczając $\tilde{f}(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + (a_n + a_{n+1}a)x^n$ dostajemy $\deg \tilde{f} \leqslant n$ oraz $\tilde{f}(x) = f(x) - a_{n+1}x^n(x-a)$. Stąd mamy $\tilde{f}(a) = 0$, więc z założenia, że $n \in N$, istnieje wielomian $\tilde{g}$ taki, że $\tilde{f}(x) = (x-a)\tilde{g}(x)$. Oznaczając $g(x) = \tilde{g}(x) + a_{n+1}x^n$ dostajemy

$$f(x) = \tilde{f}(x) + a_{n+1}x^n(x-a) = (x-a)\tilde{g}(x) + a_{n+1}x^n(x-a) = (x-a)g(x).$$

To daje, że $n+1 \in N$.
Reasumując zasada indukcji (twierdzenie 2.3.13) daje tezę. □

Z twierdzenia 3.9.6 oraz własności 3.9.5 dostajemy natychmiast

Wniosek 3.9.7. *Każdy wielomian stopnia $n \geqslant 0$ ma co najwyżej n pierwiastków.*

Wniosek 3.9.8. *Niech $n \in \mathbb{N}$ oraz f i g będą wielomianami stopni co najwyżej n. Jeśli istnieją $x_1, ..., x_{n+1} \in \mathbb{R}$ takie, że $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$ oraz $f(x_i) = g(x_i)$ dla $i = 1, ..., n+1$, to $f = g$.*

Dowód. Z własności 3.9.5 mamy $\deg(f-g) \leqslant n$ oraz $(f-g)(x_j) = 0$ dla $j = 1, ..., n+1$. Stąd i z wniosku 3.9.7 dostajemy, że $f - g$ jest wielomianem zerowym, czyli mamy tezę.
□

Definicja funkcji wymiernej. Niech f, g będą wielomianani oraz niech g bdzie wielomianem niezerowym[4] oraz niech $E = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\}$. Iloraz funkcji f/g określony w E nazywamy *funkcją wymierną.*

Uwaga 3.9.9. *Bezpośrednio z udowodnionych własności wielomianów dostajemy, że zbiór wszystkich funkcji wymiernych z działaniami dodawania i mnożenia funkcji spełnia aksjomaty ciała (Aksjomaty I).*

ZADANIA

Zadanie 3.9.1. *Niech f będzie wielomianem postaci (3.14). Jeśli $a_n \neq 0$, to dla każdego pierwiastka $x_0 \in \mathbb{R}$ wielomianu f mamy*

$$|x_0| \leqslant 2 \max\{|a_k/a_n|^{1/(n-k)} : \, k = 1, ..., n\}.$$

Zadanie 3.9.2. *Liczbę $a \in \mathbb{R}$ nazywamy algebraiczną, gdy istnieje niezerowy wielomian f o współczynnikach wymiernych taki, że $f(a) = 0$. Liczbę, która nie jest algebraiczna nazywamy przestępną. Udowodnić, że*

1. istnieją liczby przestępne,

2. zbiór liczb algebraicznych spełnia układy Aksjomatów I, II, III lecz nie spełnia Aksjomatu IV.*

[4] to znaczy g nie znika tożsamościowo.