# Rozdział 5

# Szeregi liczbowe

## 5.1 Szeregi liczbowe

**Definicja sumy częściowej ciągu.** Niech dany będzie ciąg liczbowy $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Ciąg $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ określony wzorem $s_n = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j$, $n \in \mathbb{N}$, nazywamy *ciągiem sum częściowych* ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

**Definicja szeregu liczbowego.** Niech dany będzie ciąg liczbowy $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ oraz niech $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem sum częściowych ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. *Szeregiem liczbowym o wyrazach* $a_n$, $n = 1, 2, \ldots$ lub krótko *szeregiem* nazywamy parę uporządkowaną $((a_n)_{n=1}^{\infty}, (s_n)_{n=1}^{\infty})$ i oznaczamy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ lub $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ lub $\sum a_n$. Ciąg $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ nazywamy również *ciągiem sum częściowych szeregu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

**Definicja zbieżności szeregu.** Niech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ będzie szeregiem liczbowymi. Mówimy, że *szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny*, gdy zbieżny jest jego ciąg sum częściowych $(s_n)_{n=1}^{\infty}$. Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, $s \in \mathbb{R}$, to mówimy, że *szereg jest zbieżny* do $s$ i piszemy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$. Wtedy liczbę $s$ nazywamy *sumą tego szeregu.* Szereg, który nie jest zbieżny nazywamy *rozbieżnym.*

**Przykład 5.1.1.** *Szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, *gdzie* $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$, $n \in \mathbb{N}$, *jest zbieżny do* 1, *ma on bowiem ciąg sum częściowych* $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ *postaci*

$$s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Bezpośrednio z definicji zbieżności szeregu, twierdzenia 4.6.8 i własności 4.6.2 dostajemy

**Własność 5.1.2.** *Niech* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *będzie szeregiem liczbowym,* $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ *jego ciągiem sum częściowych oraz* $s \in \mathbb{R}$. *Wówczas szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny do* $s$ *wtedy i tylko wtedy, gdy każdy podciąg ciągu* $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ *jest zbieżny do* $s$.

**Twierdzenie 5.1.3. (warunek konieczny zbieżności szeregu).** *Jeśli szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny, to* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

**Dowód.** Niech $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem sum częściowych szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ i $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Z własności 5.1.2, $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_{n+1}$, więc $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} (s_{n+1} - s_n) = 0$. □

Twierdzenie odwrotne do powyższego nie jest prawdziwe. Mamy mianowicie następujące

**Twierdzenie 5.1.4.** *Szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *jest rozbieżny.*

**Dowód.** Oznaczając $s_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$, $n \in \mathbb{N}$ dostajemy

$$|s_{2n} - s_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geqslant n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

więc, wobec własności 5.1.2 granica ciągu $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ nie może być skończona. □

**Definicja działań na szeregach.** Niech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ będą szeregami liczbowymi.

Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ nazywamy *sumą szeregów* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ nazywamy *różnicą szeregów* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Jeśli $\alpha \in \mathbb{R}$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n)$ nazywamy *iloczynem szeregu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *przez liczbę* $\alpha$.

**Własność 5.1.5.** *Niech* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *będą szeregami liczbowymi zbieżnymi oraz* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Wówczas szeregi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n)$ *są zbieżne oraz*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_k) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

**Dowód.** Jeśli $(s_n)_{n=1}^{\infty}$, $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ są ciągami sum częściowych odpowiednio szeregów $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, to $(s_n + t_n)_{n=1}^{\infty}$, $(s_n - t_n)_{n=}^{\infty}$, $(\alpha s_n)_{n=}^{\infty}$ są ciągami sum częściowych odpowiednio szeregów $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n)$. Zatem teza wynika natychmiast z twierdzenia 4.2.9. □

Z twierdzenia Cauchy'ego 4.7.3 dostajemy natychmiast jego odpowiednik dla szeregów.

**Twierdzenie 5.1.6. (Cauchy'ego).** *Niech* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *będzie szeregiem liczbowym. Wówczas szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia on warunek Cauchy'ego:*

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbb{R}}\ \forall_{m,l\in\mathbb{N},\ m\geqslant l\geqslant N}\ \left|\sum_{n=l}^{m} a_n\right| < \varepsilon. \tag{5.1}$$

**Dowód.** Niech $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem sum częściowych szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Z twierdzenia Cauchy'ego 4.7.3 mamy, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ spełnia warunek Cauchy'ego:

$$\forall_{\varepsilon>0} \ \exists_{N\in\mathbb{R}} \ \forall_{m,l\in\mathbb{N},\, m\geqslant l\geqslant N} \ \ |s_m - s_{l-1}| < \varepsilon,$$

gdzie $s_0 = 0$. Powyższy warunek jest równoważny (5.1), więc mamy tezę. □

**Uwaga 5.1.7.** *Pokazaliśmy, że dla szeregów zachodzą pewne odpowiedniki własności ciągów (własność 4.2.4). W przypadku ciągów można zamienić kolejność wyrazów bez straty zbieżności ciągu (własność 4.2.5). Dalej pokażemy, że odpowiednik tego faktu dla szeregów jest fałszywy, mianowicie istnieją szeregi zbieżne które po zamianie kolejności wyrazów stają się rozbieżne.*

## 5.2 Dalsze informacje o szeregach

W punkcie 5.1 wprowadziliśmy pojęcie szeregu liczbowego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, gdzie wskaźniki przebiegają zbiór liczb naturalnych. W wielu zagadnieniach wygodnie jest rozważać szeregi w nieco ogólniejszym sensie, gdzie wskaźniki przebiegają pewne zbiory liczb całkowitych. Prowadzi to do uogólnienia pojęcia ciągu. Dokładniej, będziemy rozważać ciągi liczbowe o wskaźnikach większych od pewnej ustalonej liczby całkowitej. Ciągi takie definiujemy analogicznie jak w rozdziale 4.

**Definicja ciągu nieskończonego o wskaźnikach w zbiorze $\mathbb{Z}_k$.** Niech $X$ będzie niepustym zbiorem, niech $k \in \mathbb{Z}$ oraz $\mathbb{Z}_k = \{n \in \mathbb{Z} : n \geqslant k\}$.

Funkcję $a : \mathbb{Z}_k \to X$ nazywamy *ciągiem nieskończonym o wskaźnikach w zbiorze* $\mathbb{Z}_k$ lub krótko *ciągiem.*

Parę uporządkowaną $(n, a(n))$, gdzie $n \in \mathbb{Z}_k$, nazywamy *$n$–tym wyrazem ciągu*, $n$ – *wskaźnikiem* tego wyrazu, $a(n)$ – *wartością* tego wyrazu. Piszemy $a_n$ zamiast $a(n)$.

Ciąg $a : \mathbb{Z}_k \to X$ zapisujemy również $(a_k, a_{k+1}, ...)$ lub $(a_n)_{n=k}^{\infty}$ lub $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}_k}$ lub krótko $(a_n)$, piszemy również $a_n$, $n = k, k+1, ....$

Jeśli wszystkie wartości ciągu $(a_n)_{n=k}^{\infty}$ należą do $\mathbb{R}$ to ciąg ten nazywamy *liczbowym.*

**Uwaga 5.2.1.** *Niech $k \in \mathbb{Z}$ oraz niech dany będzie ciąg $(a_n)_{n=k}^{\infty}$. Wtedy $b_n = a_{n+k-1}$, $n \in \mathbb{N}$ jest ciągiem określonym na zbiorze liczb naturalnych. Zatem wszystkie pojęcia z rozdziału 4 dotyczące ciągów przenoszą się na powyżej wprowadzone ciągi o wskaźnikach w zbiorze $\mathbb{Z}_k$. Dokładniej definicja granicy i wszystkie jej własności, definicja monotoniczności, ograniczoności przenoszą się bez żadnych zmian. Analogicznie określamy podciągi, jako złożenia ciągu $(a_n)_{n=k}^{\infty}$ ze ściśle rosnącym ciągiem $(n_j)_{j=k}^{\infty}$ liczb całkowitych o wartościach w $\mathbb{Z}_k$. Wtedy wszystkie twierdzenia dotyczące podciągów, granic częściowych przenoszą się bez żadnych zmian.*

**Definicja szeregu liczbowego.** Dla ciągu liczbowego $(a_n)_{n=k}^{\infty}$ określamy *ciąg sum częściowych* $(s_n)_{n=k}^{\infty}$ wzorem $s_n = \sum\limits_{j=k}^{n} a_j$, $n = k, k+1, ....$

*Szeregiem liczbowym o wyrazach* $a_n$, $n = k, k+1, \ldots$ lub krótko *szeregiem* nazywamy parę uporządkowaną $((a_n)_{n=k}^{\infty}, (s_n)_{n=k}^{\infty})$ i oznaczamy $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$ lub $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ lub $\sum a_n$. Ciąg $(s_n)_{n=k}^{\infty}$ nazywamy również *ciągiem sum częściowych szeregu* $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$.

Mówimy, że *szereg* $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny*, gdy zbieżny jest jego ciąg sum częściowych $(s_n)_{n=k}^{\infty}$. Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, $s \in \mathbb{R}$, to mówimy, że *szereg jest zbieżny* do $s$ i piszemy $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n = s$. Wtedy liczbę $s$ nazywamy *sumą tego szeregu*. Szereg, który nie jest zbieżny nazywamy *rozbieżnym*.

**Uwaga 5.2.2.** *Dla szeregów określonych powyżej zachodzą wszystkie własności z punktu 5.1, gdzie sumę i różnicę szeregów* $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=k}^{\infty} b_n$ *oraz iloczyn szeregu przez liczbę określamy analogicznie jak w punkcie 5.1. Dalej będziemy rozważać szeregi postaci* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *lub* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$. *Przedstawiane twierdzenia przenoszą się jednak na przypadek ogólny.*

Z twierdzenia Cauchy'ego 5.1.6 dostajemy

**Wniosek 5.2.3.** *Niech* $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$ *będzie szeregiem liczbowym oraz* $l \in \mathbb{Z}$, $l \geqslant k$. *Wówczas*

$$\text{szereg} \quad \sum_{n=k}^{\infty} a_n \quad \text{jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg} \quad \sum_{n=l}^{\infty} a_n.$$

*Inaczej, odrzucenie skończonej ilości początkowych wyrazów szeregu lub dołączenie na początku skończonej ilości wyrazów nie wpływa na zbieżność szeregu.*

**Dowód.** Ponieważ, co łatwo sprawdzamy, warunek (5.1) jest równoważny

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\geqslant l}\ \forall_{m,p\in\mathbb{Z},\ m\geqslant p\geqslant N} \quad \left|\sum_{n=p}^{m} a_n\right| < \varepsilon.$$

więc z twierdzenia Cauchy'ego 5.1.6 dostajemy tezę. □

**Wniosek 5.2.4.** *Niech* $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=k}^{\infty} b_n$ *będą szeregami liczbowymi takimi, że istnieje* $N \in \mathbb{R}$, *że dla* $n \in \mathbb{Z}$, $n > N$ *zachodzi* $a_n = b_n$. *Wówczas*

$$\text{szereg} \quad \sum_{n=k}^{\infty} a_n \quad \text{jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg} \quad \sum_{n=k}^{\infty} b_n.$$

**Dowód.** Niech $l \in \mathbb{Z}$, $l > N$ oraz $l > k$. Z wniosku 5.2.3, zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$ jest równoważna zbieżności szeregu $\sum\limits_{n=l}^{\infty} a_n$ oraz zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=l}^{\infty} b_n$ jest równoważna zbieżności szeregu $\sum\limits_{n=k}^{\infty} b_n$. Ponieważ szeregi $\sum\limits_{n=l}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=l}^{\infty} b_n$ są równe, więc mamy tezę. □

**Wniosek 5.2.5.** *Niech* $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$*,* $\sum_{n=j}^{\infty} b_n$ *będą szeregami liczbowymi takimi, że* $a_n = b_{n-k+j}$ *dla* $n \in \mathbb{Z}$*,* $n \geqslant k$*. Wówczas szereg* $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg* $\sum_{n=j}^{\infty} b_n$*. Ponadto* $\sum_{n=k}^{\infty} a_n = \sum_{n=j}^{\infty} b_n$*.*

**Dowód.** Niech $(s_n)_{n=k}^{\infty}$, $(t_n)_{n=j}^{\infty}$ będą ciągami sum częściowych odpowiednio szeregów $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=j}^{\infty} b_n$. Wobec założenia $a_n = b_{n-k+j}$ dla $n \geqslant k$ dostajemy łatwo, że $s_n = t_{n-k+j}$ dla $n \geqslant k$. Zatem z własności 4.2.4(d) mamy, że ciąg $(s_n)_{n=k}^{\infty}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest ciąg $(t_n)_{n=j}^{\infty}$. Ponadto $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} t_n$. To daje tezę. $\square$

**Definicja szeregu geometrycznego.** Niech $a, q \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$. Szereg postaci $\sum_{n=k}^{\infty} aq^n$ nazywamy *szeregiem geometrycznym*, gdzie przyjmujemy tutaj $0^0 = 1$ oraz $q \neq 0$, gdy $k < 0$. Liczbę $q$ nazywamy *ilorazem szeregu geometrycznego.*

**Własność 5.2.6.** *Niech* $a, q \in \mathbb{R}$*,* $a \neq 0$*,* $k \in \mathbb{Z}$*.*

(a) *Jeśli* $0 < |q| < 1$*, to* $\sum_{n=k}^{\infty} aq^n = \frac{aq^k}{1-q}$*.*

(b) *Jeśli* $|q| \geqslant 1$*, to szereg* $\sum_{n=k}^{\infty} aq^n$ *jest rozbieżny.*

**Dowód.** Ad. (a) Ponieważ $q \neq 1$, więc indukcyjnie, łatwo pokazujemy, że $\sum_{i=k}^{n} aq^i = aq^k \frac{1-q^{n-k+1}}{1-q}$. Zatem teza wynika z własności 4.6.10.

Ad. (b) Jeśli $|q| \geqslant 1$, to z własności 4.6.10 dostajemy, że ciąg $(aq^n)_{n=k}^{\infty}$ nie jest zbieżny do zera. Istotnie, jeśli $q = 1$, to $\lim_{n\to\infty} aq^n = a \neq 0$. Jeśli $q > 1$, to $\lim_{n\to\infty} aq^n$ jest równa $+\infty$ lub $-\infty$ w zależności od tego, czy $a > 0$, czy $a < 0$. Jeśli $q \leqslant -1$, to granica $\lim_{n\to\infty} aq^n$ nie istnieje. Zatem (b) wynika z warunku koniecznego zbieżności szeregu 5.1.3. $\square$

## 5.3 Szeregi o wyrazach nieujemnych

**Twierdzenie 5.3.1.** *Szereg o wyrazach nieujemnych jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy jego ciąg sum częściowych jest ograniczony.*

**Dowód.** Niech $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem sum częściowych szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ oraz niech $a_n \geqslant 0$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Jeśli szereg jest zbieżny, to ciąg $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ograniczony (patrz własność 4.2.7).

Załóżmy, że ciąg $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ograniczony. Ponieważ $a_n \geqslant 0$ dla $n \in \mathbb{N}$, więc ciąg $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ jest rosnący. Zatem jest to ciąg zbieżny (patrz twierdzenie 4.2.8). $\square$

**Twierdzenie 5.3.2. (kryterium porównawcze zbieżności szeregów).** *Niech* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *będą szeregami liczbowymi oraz niech* $N \in \mathbb{N}$ *będzie takie, że*

$$0 \leqslant a_n \leqslant b_n \qquad \text{dla} \qquad n \geqslant N.$$

(a) *Jeśli szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jest zbieżny, to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny.*

(b) *Jeśli szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest rozbieżny, to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jest rozbieżny.*

**Dowód.** Udowodnimy (a). Ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny, więc szereg $\sum_{n=N}^{\infty} b_n$ jest zbieżny. Niech $b = \sum_{n=N}^{\infty} b_n$. Wówczas dla każdego $m \geqslant N$ mamy $\sum_{n=N}^{m} a_n \leqslant \sum_{n=N}^{m} b_n \leqslant b$. Zatem ciąg sum częściowych szeregu $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ jest ograniczony. To wraz z twierdzeniem 5.3.1 daje zbieżność szeregu $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$, a więc i zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Część (b) wynika z (a), gdyż zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ pociągałaby zbieżność $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. □

**Wniosek 5.3.3.** *Niech* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *będą szeregami o wyrazach dodatnich takimi, że istnieje* $N \in \mathbb{N}$, *że*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n} \qquad \text{dla} \qquad n \geqslant N. \tag{5.2}$$

(a) *Jeśli szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jest zbieżny, to zbieżny jest szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(b) *Jeśli szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest rozbieżny, to rozbieżny jest szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

**Dowód.** Udowodnimy (a). Z (5.2) mamy, że ciąg $(\frac{a_n}{b_n})_{n=N}^{\infty}$ jest malejący, więc

$$0 \leqslant a_n \leqslant \frac{a_N}{b_N} b_n \quad \text{dla} \quad n \geqslant N. \tag{5.3}$$

Jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny, to z własności 5.1.5 i 5.2.3, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_N}{b_N} b_n$ jest zbieżny, więc z (5.3) i kryterium porównawczego zbieżności szeregów 5.3.2 dostajemy zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Część (b) wynika natychmiast z (a). □

**Twierdzenie 5.3.4. (kryterium graniczne).** *Niech* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *będą takimi szeregami, że* $a_n \geqslant 0$, $b_n > 0$ *dla* $n \in \mathbb{N}$. *Załóżmy, że istnieje granica*

$$K = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

(a) *Jeśli* $K < +\infty$ *i szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jest zbieżny, to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny.*

(b) *Jeśli* $K > 0$ *i szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jest rozbieżny, to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest rozbieżny.*

**Dowód.** Ad. (a) Z określenia liczby $K$, istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że dla $n \geqslant N$ zachodzi $\frac{a_n}{b_n} < K + 1$, więc $0 \leqslant a_n < (K+1)b_n$. Jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny, to z własności 5.1.5, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (K+1)b_n$ jest zbieżny, więc z kryterium porównawczego zbieżności szeregów 5.3.2 dostajemy zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Ad. (b) Jeśli $K = +\infty$, to istnieje $N \in \mathbb{N}$, że dla $n \geqslant N$ zachodzi $\frac{a_n}{b_n} > 1$, czyli $a_n > b_n$. Zatem z kryterium porównawczego zbieżności szeregów 5.3.2, z rozbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ wynika rozbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Jeśli $K < +\infty$, to z założenia, że $K > 0$ mamy $a_n > 0$ dla dostatecznie dużych $n$, więc $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{K} < +\infty$ i teza wynika z (a) i wniosku 5.2.3.

$\square$

Z twierdzenia 5.3.4 dostajemy natychmiast

**Wniosek 5.3.5.** *Niech* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *będą szeregami takimi, że* $a_n \geqslant 0$, $b_n > 0$ *dla* $n \in \mathbb{N}$. *Jeśli istnieje granica*

$$K = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}, \qquad \text{przy czym} \qquad 0 < K < +\infty,$$

*to oba szeregi są jednocześnie zbieżne lub jednocześnie rozbieżne.*

**Twierdzenie 5.3.6. (o zagęszczaniu).** *Niech* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *będzie ciągiem malejącym o wyrazach nieujemnych. Wówczas*

$$\text{szereg} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg} \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}.$$

**Dowód.** Oznaczmy przez $(s_n)_{n=1}^{\infty}$, $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ ciągi sum częściowych odpowiednio szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$. Ponieważ $a_n \geqslant 0$, więc ciągi $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ i $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ są rosnące. W myśl twierdzenia 5.3.1 wystarczy pokazać, że z ograniczoności ciągu $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ wynika ograniczoność ciągu $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ i odwrotnie.

Załóżmy, że ciąg $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ograniczony przez $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$, to znaczy $|s_n| \leqslant M$ dla $n \in \mathbb{N}$. Ponieważ $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem malejącym, więc dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} 0 \leqslant t_n &= 2\left(a_2 + 2a_4 + \cdots + 2^{n-1}a_{2^n}\right) \\ &\leqslant 2\left((a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2^{n-1}+1} + \cdots + a_{2^n})\right) = 2s_{2^n} \leqslant 2M. \end{aligned}$$

To daje ograniczoność ciągu $(t_n)_{n=1}^{\infty}$.

Załóżmy, że ciąg $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ograniczony przez $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$. Ponieważ $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem malejącym i $2^{n+1} - 1 \geqslant n$ dla $n \in \mathbb{N}$, więc

$$\begin{aligned} 0 \leqslant s_n \leqslant s_{2^{n+1}-1} &= a_1 + \cdots + a_{2^{n+1}-1} = a_1 + (a_2 + a_3) + \cdots + (a_{2^n} + \cdots + a_{2^{n+1}-1}) \\ &\leqslant a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^n a_{2^n} \leqslant a_1 + K. \end{aligned}$$

To daje ograniczoność ciągu $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ i kończy dowód. □

**Definicja szeregu harmonicznego.** Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ nazywamy *harmonicznym rzędu* $\alpha$.

**Wniosek 5.3.7.** *Szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ *jest zbieżny, gdy* $\alpha > 1$ *i rozbieżny, gdy* $\alpha \leqslant 1$ (1).

**Dowód.** Oznaczmy $a_n = \frac{1}{n^{\alpha}}$, $n \in \mathbb{N}$.

Załóżmy najpierw, że $\alpha > 1$. Wówczas ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest malejący i ma wyrazy dodatnie oraz $2^n a_{2^n} = 2^n 2^{-\alpha n} = (2^{1-\alpha})^n$ dla $n \in \mathbb{N}$. W konsekwencji szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ jest geometryczny o ilorazie $2^{1-\alpha} \in (0, 1)$. Zatem z własności 5.2.6(a) szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ jest zbieżny. To wraz z twierdzeniem 5.3.6 daje zbieżność szeregu harmonicznego.

Załóżmy, że $\alpha \leqslant 1$. Wówczas z własności potęgi, $\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n^{\alpha}}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Ponieważ szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny (twierdzenie 5.1.4), więc z kryterium porównawczego zbieżności szeregów 5.3.2(b) dostajemy, że szereg harmoniczny jest rozbieżny. □

**ZADANIA**

**Zadanie 5.3.1. * (kryterium Raabego).** *Niech* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *będzie ciągiem o wyrazach dodatnich oraz* $r > 1$.

(a) *Jeśli* $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geqslant r$ *dla prawie wszystkich* $n \in \mathbb{N}$, *to szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny.*

(a) *Jeśli* $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1$ *dla prawie wszystkich* $n \in \mathbb{N}$, *to szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest rozbieżny.*

Wsk. Udowodnić, że dla $s \in \mathbb{R}$ zachodzi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^s - 1}{\frac{1}{n}} = s$.

## 5.4 Dalsze kryteria zbieżności szeregów

**Twierdzenie 5.4.1. (kryterium Dirichleta).** *Niech* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ *będą ciągami. Jeśli*

(i) *ciąg sum częściowych ciągu* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *jest ograniczony,*

(ii) *ciąg* $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ *jest monotoniczny,*

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$,

*to szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *jest zbieżny.*

---

[1] **Definicja funkcji $\zeta$ Riemanna.** Funkcję $\zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$, $x > 1$ nazywamy *funkcją $\zeta$ Riemanna.*

**Dowód.** Niech $A_n = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j$, $n \in \mathbb{N}$. Załóżmy najpierw, że ciąg $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ jest malejący. Wówczas z (ii), (iii) mamy $b_n \geqslant 0$ dla $n \in \mathbb{N}$. Dla $m > l \geqslant 2$ mamy [2]

$$\begin{aligned}\sum_{n=l}^{m} a_n b_n &= \sum_{n=l}^{m} (A_n - A_{n-1}) b_n = \sum_{n=l}^{m} A_n b_n - \sum_{n=l}^{m} A_{n-1} b_n = \sum_{n=l}^{m} A_n b_n - \sum_{n=l-1}^{m-1} A_n b_{n+1} \\ &= \sum_{n=l}^{m-1} A_n (b_n - b_{n+1}) + A_m b_m - A_{l-1} b_l.\end{aligned}$$

Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. Wobec (i) istnieje $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$ takie, że $|A_n| \leqslant M$ dla $n \in \mathbb{N}$. Z (ii) oraz (iii) wynika, że istnieje $N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant 2$ takie, że dla $n \geqslant N$ zachodzi $0 \leqslant b_n < \frac{\varepsilon}{2M}$. Weźmy dowolne $m, l \in \mathbb{N}$ takie, że $m > l \geqslant N$. Wtedy $m > l \geqslant 2$. Ponieważ ciąg $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ jest malejący, więc $b_n - b_{n+1} = |b_n - b_{n+1}|$ dla $n \in \mathbb{N}$, zatem z powyższego mamy

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=l}^{m} a_n b_n\right| &= \left|\sum_{n=l}^{m-1} A_n (b_n - b_{n+1}) + A_m b_m - A_{l-1} b_l\right| \\ &\leqslant \sum_{n=l}^{m-1} |A_n||b_n - b_{n+1}| + |A_m||b_m| + |A_{l-1}||b_l| \\ &\leqslant \sum_{n=l}^{m-1} M(b_n - b_{n+1}) + M b_m + M b_l \\ &= M\left(\sum_{n=l}^{m-1} (b_n - b_{n+1}) + b_m + b_l\right) = 2M b_l < \varepsilon.\end{aligned}$$

Powyższa nierówność zachodzi także dla $m = l \geqslant N$. Reasumując z twierdzenia Cauchy'ego 5.1.6 dostajemy zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

Jeśli ciąg $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ jest rosnący, to ciąg $(-b_n)_{n=1}^{\infty}$ jest malejący i z pierwszej części dowodu dostajemy zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(-b_n)$, a więc i szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. □

Z kryterium Dirichleta zbieżności szeregów 5.4.1 dostajemy następujące dwa kryteria.

**Wniosek 5.4.2. (kryterium Leibniza).** *Jeśli ciąg $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ jest monotoniczny oraz $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_n$ jest zbieżny.*

**Dowód.** Oznaczając $a_n = (-1)^n$, $b_n = c_n$, $n \in \mathbb{N}$ dostajemy, że suma $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j$ jest równa 0, gdy $n$ jest liczbą parzystą oraz równa $-1$, gdy $n$ jest liczbą nieparzystą. Wobec monotoniczności ciągu $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, stosując kryterium Dirichleta 5.4.1, dostajemy tezę. □

**Wniosek 5.4.3. (kryterium Abela).** *Jeśli ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest monotoniczny i ograniczony, szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ zaś jest zbieżny, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ jest zbieżny.*

**Dowód.** Ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, jako monotoniczny i ograniczony, jest zbieżny. Niech więc $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Wtedy ciąg $(a_n - a)_{n=1}^{\infty}$ jest monotoniczny i zbieżny do zera. Ciąg sum częściowych szeregu zbieżnego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ jest oczywiście ograniczony. W konsekwencji, na

[2] przekształcenie to nazywamy przekształceniem Abela.

mocy kryterium Dirichleta 5.4.1, mamy zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n - a)b_n$. Ponieważ szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ab_n$ jest zbieżny, więc szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ jest zbieżny, jako suma szeregów zbieżnych. □

## 5.5 Zbieżność bezwzględna

**Definicja zbieżności bezwzględnej szeregu.** Mówimy, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest *zbieżny bezwzględnie*, gdy zbieżny jest szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

**Własność 5.5.1.** *Jeśli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny bezwzględnie, to jest zbieżny. Ponadto* $\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

**Dowód.** Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. Ponieważ szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny, więc z twierdzenia Cauchy'ego 5.1.6 istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że dla $m \geqslant l \geqslant N$ mamy $\sum\limits_{n=l}^{m} |a_n| < \varepsilon$. Zatem

$$|\sum_{n=l}^{m} a_n| \leqslant \sum_{n=l}^{m} |a_n| < \varepsilon.$$

To, wraz z twierdzeniem Cauchy'ego daje zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Ponadto mamy $\left|\sum\limits_{n=1}^{m} a_n\right| \leqslant \sum\limits_{n=1}^{m} |a_n|$, więc przechodząc do granicy $m \to \infty$ dostajemy $\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$. To kończy dowód. □

Z twierdzenia 5.3.2 dostajemy natychmiast

**Twierdzenie 5.5.2. (kryterium porównawcze zbieżności bezwzględnej szeregów).** *Niech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ będą szeregami liczbowymi oraz $N \in \mathbb{N}$. Jeśli $|a_n| \leqslant b_n$ dla $n \geqslant N$ i szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny bezwzględnie.*

**Twierdzenie 5.5.3. (kryterium d'Alemberta).** *Niech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ będzie szeregiem liczbowym takim, że $a_n \neq 0$ dla $n \in \mathbb{N}$.*

(a) *Jeśli $\limsup\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny bezwzględnie.*

(b) *Jeśli istnieje $N \in \mathbb{N}$, że $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geqslant 1$ dla $n \geqslant N$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.*

**Dowód.** Ad. (a) Niech $g = \limsup\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. Z założenia, istnieje $r \in \mathbb{R}$, że $g < r < 1$. Zatem, z twierdzenia 4.8.7 istnieje $N \in \mathbb{N}$, że $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leqslant r$ dla $n \geqslant N$. Stąd mamy

$$|a_{n+1}| \leqslant |a_n| r \qquad \text{dla} \qquad n \geqslant N.$$

Niech $b_n = |a_N| r^{n-N}$, $n \geqslant N$. Wówczas $|a_N| \leqslant b_N$, $|a_{N+1}| \leqslant b_{N+1}$ i indukcyjnie dostajemy $|a_n| \leqslant b_n$ dla $n \geqslant N$. Ponieważ szereg $\sum\limits_{n=N}^{\infty} b_n$, jako geometryczny o ilorazie $r \in (0,1)$ jest zbieżny (patrz własność 5.2.6), więc z kryterium porównawczego zbieżności szeregów 5.5.2 dostajemy zbieżność bezwzględną szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Ad. (b) Ponieważ $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geqslant 1$ dla $n \geqslant N$, więc indukcyjnie dostajemy $0 < |a_N| \leqslant |a_n|$ dla $n \geqslant N$. Zatem zero nie może być granicą ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. To, wraz z warunkiem koniecznym zbieżności szeregu 5.1.3 daje, rozbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. □

Z kryterium d'Alemberta 5.5.3 i własności 4.8.2 dostajemy natychmiast

**Wniosek 5.5.4. (kryterium d'Alemberta).** *Niech* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *będzie szeregiem liczbowym takim, że* $a_n \neq 0$ *dla* $n \in \mathbb{N}$ *oraz niech istnieje granica* $g = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.

(a) *Jeśli* $g < 1$, *to szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny bezwzględnie.*

(b) *Jeśli* $g > 1$, *to szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest rozbieżny.*

**Uwaga 5.5.5.** *W twierdzeniu 5.5.3(b) warunku* $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geqslant 1$ *nie można zastąpić przez* $\limsup\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$. *Pokażemy, że z warunku* $\limsup\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ *nie wynika rozbieżność szeregu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

*Rozważmy ciąg* $a_n = \frac{1}{2^n}$, *gdy* $n$ *jest liczbą nieparzystą oraz* $a_n = \frac{4}{2^n}$, *gdy* $n$ *jest liczbą parzystą. Wówczas* $|a_n| \leqslant \frac{4}{2^n}$ *dla* $n \in \mathbb{N}$, *więc z własności 5.2.6 i kryterium porównawczego zbieżności szeregów 5.5.2 dostajemy zbieżność szeregu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

*Z drugiej strony* $\limsup\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 2$. *Istotnie,* $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 2$, *gdy* $n$ *jest nieparzyste oraz* $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{8}$, *gdy* $n$ *jest parzyste. Zatem 2 jest granicą częściową ciągu* $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_{n=1}^{\infty}$ *oraz dla każdego* $a > 2$ *zbiór* $\left\{n \in \mathbb{N} : \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > a\right\}$ *jest skończony, jako zbiór pusty. Stąd i z twierdzenia 4.8.7 mamy* $\limsup\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 2$.

**Twierdzenie 5.5.6. (kryterium Cauchy'ego).** *Niech* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *będzie szeregiem liczbowym oraz niech* $g = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

(a) *Jeśli* $g < 1$, *to szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny bezwzględnie.*

(b) *Jeśli* $g > 1$, *to szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest rozbieżny. Ponadto, jeśli* $\sqrt[n]{|a_n|} \geqslant 1$ *dla nieskończenie wielu* $n \in \mathbb{N}$, *to szereg jest rozbieżny.*

**Dowód.** Ad. (a) Niech $g = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Ponieważ $g < 1$, więc istnieje $r \in \mathbb{R}$, że $g < r < 1$. Zatem, z twierdzenia 4.8.7 istnieje $N \in \mathbb{N}$, że $\sqrt[n]{|a_n|} \leqslant r$ dla $n \geqslant N$. Zatem

$$|a_n| \leqslant r^n \qquad \text{dla} \qquad n \geqslant N.$$

Ponieważ $r \in (0,1)$, więc z własności 5.2.6, szereg $\sum\limits_{n=N}^{\infty} r^n$ jest zbieżny. Stąd i z kryterium porównawczego zbieżności szeregów 5.5.2 dostajemy zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Ad. (b) Jeśli $\sqrt[n]{|a_n|} \geqslant 1$ dla nieskończenie wielu $n \in \mathbb{N}$, to $|a_n| \geqslant 1$ dla nieskoćzenie wielu $n \in \mathbb{N}$. Zatem szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nie spełnia warunku koniecznego zbieżności szeregów 5.1.3, więc jest to szereg rozbieżny. Jeśli $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, to dla nieskończenie wielu $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $\sqrt[n]{|a_n|} \geqslant 1$, więc z poprzedniej części mamy rozbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. $\square$

Z kryterium Cauchy'ego 5.5.6 i własności 4.8.2 dostajemy natychmiast

**Wniosek 5.5.7. (kryterium Cauchy'ego).** *Niech* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *będzie szeregiem liczbowym oraz niech istnieje granica* $g = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

(a) *Jeśli* $g < 1$, *to szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny bezwzględnie.*

(b) *Jeśli* $g > 1$, *to szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest rozbieżny.*

**Uwaga 5.5.8.** *Rozważmy szereg harmoniczny* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, *gdzie* $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. *Wówczas* $\limsup\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ *oraz* $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, *więc kryteria d'Alemberta i Cauchy'ego nie rozstrzygają zbieżności szeregu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. *Jednak dla* $\alpha > 1$ *szereg ten jest zbieżny, dla* $\alpha \leqslant 1$ *zaś rozbieżny (patrz wniosek 5.3.7).*

**Uwaga 5.5.9.** *Niech* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *będzie ciągiem takim, że* $a_n \neq 0$ *dla* $n \in \mathbb{N}$. *Można udowodnić, że* $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, *zatem z warunku (a) kryterium d'Alemberta wynika warunek (a) kryterium Cauchy'ego.*

## 5.6 Łączność wyrazów szeregu liczbowego

W szeregu liczbowym zbieżnym możemy kolejne wyrazy dowolnie łączyć w grupy. Mianowicie mamy

**Twierdzenie 5.6.1. (prawo łączności dla szeregów).** *Niech* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *będzie szeregiem zbieżnym,* $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ – *ściśle rosnącym ciągiem liczb całkowitych, gdzie* $n_1 = 0$ *oraz niech* $c_k = \sum\limits_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_j$ *dla* $k \in \mathbb{N}$. *Wówczas szereg* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ *jest zbieżny i* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. *Ponadto, jeśli szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny bezwzględnie, to szereg* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ *jest zbieżny bezwzględnie.*

**Dowód.** Oznaczając przez $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ i $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ odpowiednio ciągi sum częściowych szeregów $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$, mamy $t_k = s_{n_{k+1}}$ dla $k \in \mathbb{N}$. Zatem z własności 5.1.2 dostajemy pierwszą część tezy. Druga część tezy wynika z nierówności $\sum\limits_{j=1}^{k}|c_j|\leqslant\sum\limits_{j=1}^{n_{k+1}}|a_j|\leqslant\sum\limits_{j=1}^{\infty}|a_j|$ oraz tego, że ciąg $\sum\limits_{j=1}^{k}|c_j|$, $k=1,2,...$ jest rosnący (patrz twierdzenie 4.2.8). □

**Uwaga 5.6.2.** *Bez założenia zbieżności szeregu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$*, twierdzenie 5.6.1 nie jest prawdziwe. Mianowicie szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ *jest rozbieżny. Łącząc po jednym wyrazie dostajemy, więc szereg rozbieżny lecz po złączeniu po dwa wyrazy dostajemy*

$$\sum_{k=1}^{\infty}((-1)^{2k-1}+(-1)^{2k})=0 \quad \text{oraz} \quad -1+\sum_{k=1}^{\infty}((-1)^{2k}+(-1)^{2k+1})=-1.$$

## 5.7 Zbieżność bezwarunkowa

W punkcie 5.6 pokazaliśmy, że w każdym szeregu zbieżnym można dowolnie łączyć kolejne wyrazy i uzyskamy szereg zbieżny. W tym punkcie pokażemy, że zbieżność szeregu na ogół zależy od porządku jego wyrazów. Jest to, więc sytuacja odmienna od zbieżności ciągu, gdzie zmiana porządku wyrazów nie wpływa na zbieżność (patrz własność 4.2.5).

**Definicja zbieżności bezwarunkowej szeregu.** Mówimy, że szereg liczbowy $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ jest *zbieżny bezwarunkowo*, gdy dla każdej bijekcji $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{\sigma(n)}$ jest zbieżny. Jeśli szereg jest zbieżny lecz nie jest zbieżny bezwarunkowo, to mówimy, że jest on zbieżny *warunkowo.*

**Lemat 5.7.1.** *Niech* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *będzie szeregiem zbieżnym. Jeśli* $a_n\geqslant 0$ *dla wszystkich* $n\in\mathbb{N}$ *lub* $a_n\leqslant 0$ *dla wszystkich* $n\in\mathbb{N}$*, to szereg jest zbieżny bezwarunkowo. Ponadto dla każdej bijekcji* $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ *mamy* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{\sigma(n)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

**Dowód.** Rozważymy przypadek $a_n\geqslant 0$ dla $n\in\mathbb{N}$. Przypadek $a_n\leqslant 0$ dla $n\in\mathbb{N}$ rozważa się analogicznie.

Niech $s=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$. Weźmy dowolną bijekcję $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$. Oznaczmy przez $(s_n)_{n=1}^{\infty}$, $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ ciągi sum częściowych odpowiednio szeregów $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{\sigma(n)}$. Ponieważ $a_n\geqslant 0$ dla $n\in\mathbb{N}$, więc ciągi $(s_n)_{n=1}^{\infty}$, $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ są rosnące. Oznaczając $N_n=\max\{\sigma(k):k\in\mathbb{N},\,k\leqslant n\}$ dla $n\in\mathbb{N}$, mamy

$$t_n=\sum_{j=1}^{n}a_{\sigma(j)}\leqslant\sum_{j=1}^{N_n}a_j=s_{N_n}\leqslant s.$$

W konsekwencji ciąg $(t_n)_{n=1}^{\infty}$, jako rosnący i ograniczony z góry, jest zbieżny oraz $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{\sigma(n)}\leqslant s=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

Analogicznie dostajemy $s=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{\sigma(\sigma^{-1}(n))}\leqslant\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{\sigma(n)}$. Zatem $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{\sigma(n)}=s$. □

**Twierdzenie 5.7.2.** *Niech* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *będzie szeregiem liczbowym oraz* $\beta_n = \max\{0, a_n\}$, $\gamma_n = \min\{0, a_n\}$ *dla* $n \in \mathbb{N}$. *Szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny bezwarunkowo wtedy i tylko wtedy, gdy szeregi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_n$ *są zbieżne.*

**Dowód.** Jeśli szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_n$ są zbieżne, to z lematu 5.7.1 dostajemy, że są one zbieżne bezwarunkowo. Ponieważ $a_n = \beta_n + \gamma_n$ dla $n \in \mathbb{N}$, więc szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny bezwarunkowo, gdyż dla każdej bijekcji $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ jest sumą szeregów zbieżnych $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_{\sigma(n)}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_{\sigma(n)}$.

Załóżmy, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny bezwarunkowo. Wtedy jest on zbieżny i z twierdzenia 5.1.3 mamy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, więc $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = 0$. Stąd, istnieje liczba $M > 0$, że

$$-M < \gamma_n \leqslant 0 \qquad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5.4}$$

Przypuśćmy, że co najmniej jeden z szeregów $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_n$ jest rozbieżny. Niech $(s_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ będą ciągami sum częściowych odpowiednio szeregów $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_n$. Wtedy ciąg $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ jest rosnący, ciąg $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zaś malejący. Zatem, wobec twierdzenia 5.3.1 mamy $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$ lub $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = -\infty$. Ponieważ $s_n = b_n + g_n$ dla $n \in \mathbb{N}$ i ciąg $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny, więc musi być

$$\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty \qquad \text{oraz} \qquad \lim_{n\to\infty} g_n = -\infty. \tag{5.5}$$

Oznaczmy

$$X = \{n \in \mathbb{N} : a_n > 0\}, \qquad Y = \{n \in \mathbb{N} : a_n \leqslant 0\}.$$

Z (5.5) i określenia zbiorów $X$, $Y$ mamy, że

$$X \quad \text{i} \quad Y \quad \text{są zbiorami przeliczalnymi oraz} \quad X \cap Y = \emptyset, \quad X \cup Y = \mathbb{N}. \tag{5.6}$$

Ponadto z (5.5) istnieje ściśle rosnący ciąg liczb całkowitych $(n_k)_{k=0}^{\infty}$, gdzie $n_0 = 0$, że

$$\sum_{\substack{n_{k-1} < n \leqslant n_k \\ n \in X}} a_n > 2M$$

dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$. Zatem $X_k = \{n \in X : n_{k-1} < n \leqslant n_k\}$, $k \in \mathbb{N}$ jest rodziną zbiorów skończonych i niepustych takich, że

(i) $X_k \cap X_j = \emptyset$ dla $k \neq j$,

(ii) $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_k$,

(iii) $\sum\limits_{n\in X_k} a_n > 2M$ dla $k \in \mathbb{N}$.

Oznaczmy przez $m_k \in \mathbb{N}$ ilość elementów zbioru $X_k$. Niech

$$N_1 = 1 \qquad \text{oraz} \qquad N_k = k + \sum_{j=1}^{k} m_j \quad \text{dla} \quad k \geqslant 2.$$

Niech

$$V_k = \{n \in \mathbb{N} : N_k + 1 \leqslant n \leqslant N_k + m_k\}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

$X_k$ i $V_k$ są zbiorami $m_k$ elementowymi, więc istnieje bijekcja $\varphi_k : V_k \to X_k$ dla $k \in \mathbb{N}$. Niech $V = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} V_k$. Oczywiście zbiory $V_k$ są parami rozłączne. Z powyższego, (i) oraz (ii) dostajemy, że

$$\text{funkcja} \quad \varphi : V \to X \quad \text{określona wzorem} \quad \varphi(n) = \varphi_k(n), \quad \text{gdy} \quad n \in V_k, \quad \text{jest bijekcją.}$$

Niech $W = \mathbb{N} \setminus V$. Wtedy $W = \{N_k : k \in \mathbb{N}\}$. Ponieważ $W, Y$ są zbiorami przeliczalnymi, więc istnieje bijekcja $\xi : W \to Y$.

Niech $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie określona wzorem $\sigma(n) = \varphi(n)$, gdy $n \in V$ oraz $\sigma(n) = \xi(n)$, gdy $n \in W$. Ponieważ $W \cap V = \emptyset$, więc $\sigma$ jest poprawnie określona. Ponadto z określenia $\varphi$ i $\xi$ mamy $\sigma(V) = X$, $\sigma(W) = Y$, więc z (5.6) mamy, że $\sigma$ jest bijekcją $\mathbb{N}$ na $\mathbb{N}$. Rozważmy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$. Wtedy, wobec (5.4) i (iii),

$$\sum_{n=1}^{m_k+N_k} a_{\sigma(n)} = \sum_{n\in V_1\cup\ldots\cup V_k} a_{\sigma(n)} + \sum_{\substack{n \in W \\ n \leqslant m_k + N_k}} a_{\sigma(n)} = \sum_{j=1}^{k}\sum_{n\in V_j} a_{\varphi_j(n)} + \sum_{j=1}^{k} a_{\xi(N_j)} \geqslant k2M - kM = kM.$$

Ponieważ $\lim\limits_{k\to\infty} kM = +\infty$, więc sumy częściowe szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ nie mają granicy skończonej. To przeczy zbieżności bezwarunkowej szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i kończy dowód. □

**Twierdzenie 5.7.3. (o zbieżności bezwzględnej i bezwarunkowej szeregu).** *Szereg liczbowy* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny bezwarunkowo wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbieżny bezwzględnie.*

**Dowód.** Niech $\beta_n = \max\{0, a_n\}$, $\gamma_n = \min\{0, a_n\}$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Załóżmy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny bezwarunkowo. Wówczas z twierdzenia 5.7.2 mamy, że szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n$ są zbieżne. W szczególności szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-\gamma_n)$ jest zbieżny. Ponieważ $|a_n| = \beta_n - \gamma_n$ dla $n \in \mathbb{N}$, więc szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny, jako suma szeregów zbieżnych.

Załóżmy teraz, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny bezwzględnie. Ponieważ $0 \leqslant \beta_n \leqslant |a_n|$, $0 \leqslant -\gamma_n \leqslant |a_n|$ dla $n \in \mathbb{N}$, więc z kryterium porównawczego zbieżności szeregów 5.3.2 dostajemy zbieżność szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-\gamma_n)$. W szczególności szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n$ jest zbieżny. Reasumując z twierdzenia 5.7.2 dostajemy zbieżność bezwarunkową szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. □

**Twierdzenie 5.7.4.** *Jeśli szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny bezwarunkowo, to dla dowolnej bijekcji* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *zachodzi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

**Dowód.** Niech $\beta_n = \max\{0, a_n\}$, $\gamma_n = \min\{0, a_n\}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Z założenia i twierdzenia 5.7.2 mamy, że szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_n$ są zbieżne, pierwszy z nich ma wyrazy nieujemne, drugi – niedodatnie. Stąd i z lematu 5.7.1 dostajemy, że szeregi te są zbieżne bezwarunkowo. Ponadto dla dowolnej bijekcji $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mamy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_{\sigma(n)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n$ oraz $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_{\sigma(n)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_n$. W szczególności

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{\sigma(n)} + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

To daje tezę. □

Z twierdzenia 5.7.3 dostajemy natychmiast

**Wniosek 5.7.5.** *Szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest warunkowo zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy jest to szereg zbieżny lecz nie jest on zbieżny bezwzględnie.*

**Uwaga 5.7.6.** *Podobnie jak w dowodzie twierdzenia 5.7.2 można pokazać, że jeśli szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny warunkowo oraz* $s \in \mathbb{R}$*, to istnieje bijekcja* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *taka, że szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ *jest zbieżny do* $s$.

**ZADANIA**

**Zadanie 5.7.1.** *Niech* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *będzie szeregiem liczbowym. Wówczas szereg ten jest zbieżny bezwarunkowo wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia następujący warunek Cauchy'ego: dla każdego* $\varepsilon > 0$ *istnieje zbiór skończony* $H \subset \mathbb{N}$*, że dla każdego niepustego zbioru skończonego* $J \subset \mathbb{N} \setminus H$ *zachodzi* $|\sum\limits_{n \in J} a_n| < \varepsilon$.

**Zadanie 5.7.2.** *Niech* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *będzie szeregiem liczbowym. Wówczas szereg ten jest zbieżny bezwarunkowo do* $s \in \mathbb{R}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego* $\varepsilon > 0$ *istnieje zbiór skończony* $H \subset \mathbb{N}$*, że dla każdego niepustego zbioru skończonego* $J \subset \mathbb{N}$ *takiego, że* $H \subset J$ *zachodzi* $|\sum\limits_{n \in J} a_n - s| < \varepsilon$.

## 5.8 Mnożenie szeregów

**Definicja iloczynu szeregów w sensie Cauchy'ego.** Niech $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ będą szeregami liczbowymi. *Iloczynem w sensie Cauchy'ego* tych *szeregów* nazywamy szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$, gdzie

$$c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}, \qquad n = 0, 1, 2, ...(^3).$$

**Uwaga 5.8.1.** *Iloczyn w sensie Cauchy'ego szeregów jest przemienny.*

**Twierdzenie 5.8.2. (Mertensa).** *Jeśli szeregi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ są zbieżne i jeśli przynajmniej jeden z tych szeregów jest zbieżny bezwzględnie to iloczyn w sensie Cauchy'ego $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ tych szeregów jest zbieżny oraz*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

*Jeśli szeregi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ są bezwzględnie zbieżne, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ jest bezwzględnie zbieżny.*

**Dowód.** Niech $A = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $B = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ oraz $A_k = \sum\limits_{n=0}^{k} a_n$, $B_k = \sum\limits_{n=0}^{k} b_n$, $C_k = \sum\limits_{n=0}^{k} c_n$ dla $k \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant 0$. Niech na przykład szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ będzie zbieżny bezwzględnie oraz $K = \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$. Oczywiście $K \geqslant 0$.

Pokażemy, że

$$\lim_{k\to\infty} (C_k - A_k B) = 0. \tag{5.7}$$

Zauważmy najpierw, że

$$\sum_{n=0}^{k}\sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j} = \sum_{j=0}^{k} a_j \sum_{n=j}^{k} b_{n-j} \quad \text{dla} \quad k \geqslant 0.$$

Istotnie, dla ustalonego $a_j$, $0 \leqslant j \leqslant k$, suma $\sum\limits_{n=j}^{k} b_{n-j}$ jest sumą wszystkich $b_{n-j}$ występujących w $\sum\limits_{n=0}^{k}\sum\limits_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$ w iloczynie z $a_j$. To daje zapowiedzianą uwagę. Stąd mamy

$$C_k = \sum_{n=0}^{k} c_n = \sum_{n=0}^{k}\sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j} = \sum_{j=0}^{k} a_j \sum_{n=j}^{k} b_{n-j} = \sum_{j=0}^{k} a_j \sum_{n=0}^{k-j} b_n = \sum_{j=0}^{k} a_j B_{k-j},$$

więc

$$C_k - A_k B = \sum_{j=0}^{k} a_j B_{k-j} - \sum_{j=0}^{k} a_j B = \sum_{j=0}^{k} a_j (B_{k-j} - B). \tag{5.8}$$

Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. Ponieważ $\lim\limits_{s\to\infty} (B_s - B) = 0$, więc istnieje $N_1 \in \mathbb{N}$, że dla każdego $s > N_1$ zachodzi $|B_s - B| < \frac{\varepsilon}{2(K+1)}$ (oczywiście $K + 1 > 0$). Weźmy dowolne $k > N_1$. Wówczas dla $0 \leqslant j \leqslant k - N_1 - 1$ mamy $k - j > N_1$, zatem z powyższego,

$$\left|\sum_{j=0}^{k-N_1-1} a_j (B_{k-j} - B)\right| \leqslant \sum_{j=0}^{k-N_1-1} |a_j||B_{k-j} - B| \leqslant \sum_{j=0}^{k-N_1-1} |a_j| \frac{\varepsilon}{2(K+1)} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.9}$$

Oczywiście ciąg $(B_s - B)_{s=0}^{\infty}$, jako zbieżny jest ograniczony. Niech więc $M > 0$ będzie taką liczbą, że $|B_s - B| < M$, dla $s = 0, 1, \ldots$ . Z warunku koniecznego zbieżności szeregów mamy $\lim\limits_{j\to\infty} a_j = 0$. Zatem istnieje $N_2 > 0$, że dla każdego $j > N_2$ zachodzi $|a_j| < \frac{\varepsilon}{2M(N_1+1)}$. Weźmy dowolne $k > N_2 + N_1$. Wówczas dla $j \geqslant k - N_1$ mamy $j \geqslant N_2$, więc

$$\left|\sum_{j=k-N_1}^{k} a_j(B_{k-j} - B)\right| \leqslant \sum_{j=k-N_1}^{k} |a_j||B_{k-j} - B| \leqslant \sum_{j=k-N_1}^{k} \frac{\varepsilon}{2M(N_1+1)} M \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Stąd, z (5.8) i (5.9), dla $k > N_2 + N_1$ dostajemy

$$|C_k - A_k B| \leqslant \left|\sum_{j=0}^{k-N_1-1} a_j(B_{k-j} - B)\right| + \left|\sum_{j=k-N_1}^{k} a_j(B_{k-j} - B)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Reasumując mamy (5.7).

Ponieważ

$$0 \leqslant |C_k - AB| = |C_k - A_k B + A_k B - AB| \leqslant |C_k - A_k B| + |A_k B - AB|$$

oraz $\lim\limits_{k\to\infty} A_k B = AB$, więc z (5.7) i twierdzenia o trzech ciągach mamy $\lim\limits_{k\to\infty} C_k = AB$. To daje pierwszą część tezy.

Udowodnimy drugą część tezy. Załóżmy, że szeregi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$ i $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |b_n|$ są zbieżne. Biorąc $d_n = \sum\limits_{k=0}^{n} |a_k||b_{n-k}|$, z pierwszej części twierdzenia dostajemy, że szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n$ jest zbieżny. Ponieważ $|c_n| \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n} |a_k||b_{n-k}| = d_n$, więc z kryterium porównawczego dostajemy, zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n|$. To daje drugą część tezy i kończy dowód. $\square$

**Uwaga 5.8.3.** *W twierdzeniu Mertensa 5.8.2, założenia że przynajmniej jeden z szeregów* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ *jest zbieżny bezwzględnie, nie można opuścić. Biorąc mianowicie* $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$, $n = 0, 1, \ldots$ *mamy, że szeregi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ *są zbieżne warunkowo. Dla iloczynu Cauchy'ego* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ *tych szeregów mamy* $|c_n| = \sum\limits_{j=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{j+1}\sqrt{n-j+1}} \geqslant \sum\limits_{j=0}^{n} \frac{1}{n+1} = 1$, *więc jest to szereg rozbieżny.*

**Uwaga 5.8.4.** *Mertens pokazał, że jeśli szeregi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ *są zbieżne i iloczyn w sensie Cauchy'ego* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ *tych szeregów jest zbieżny, to*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

## 5.9 Szeregi potęgowe

**Definicja szeregu potęgowego.** Niech $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ będzie ciągiem liczbowym oraz $x_0 \in \mathbb{R}$. Szereg postaci $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, gdzie $x \in \mathbb{R}$, nazywamy *szeregiem potęgowym o środku* $x_0$ lub *szeregiem Taylora o środku* $x_0$. Przyjmujemy tutaj $0^0 = 1$. Liczby $a_n$, $n = 0, 1, ...$ nazywamy *współczynnikami szeregu potęgowego.*

**Twierdzenie 5.9.1. (Cauchy'ego-Hadamarda).** *Niech* $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ *będzie ciągiem liczbowym,* $\varrho = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ *oraz*

$$R = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad \varrho = +\infty, \\ 1/\varrho & \text{dla} \quad 0 < \varrho < +\infty, \\ +\infty & \text{dla} \quad \varrho = 0. \end{cases} \tag{5.10}$$

*Wówczas szereg potęgowy* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *o środku* $x_0 \in \mathbb{R}$ *jest zbieżny bezwzględnie dla* $x \in \mathbb{R}$ *takich, że* $|x - x_0| < R$ *oraz rozbieżny dla* $x \in \mathbb{R}$ *takich, że* $|x - x_0| > R$.

**Dowód.** Z wniosku 4.8.5(a) dla $x \neq x_0$ mamy $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} = \varrho|x-x_0|$, gdzie przyjmujemy $\varrho|x - x_0| = +\infty$, gdy $\varrho = +\infty$. Zatem z kryterium Cauchy'ego zbieżności szeregów 5.5.6 oraz z (5.10) dostajemy tezę. □

**Definicja promienia zbieżności szeregu potęgowego.** Niech $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ będzie szeregiem potęgowym. Element $R \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ taki, że powyższy szereg potęgowy jest zbieżny dla $x \in \mathbb{R}$ takich, że $|x - x_0| < R$ oraz rozbieżny dla $|x - x_0| > R$ nazywamy *promieniem zbieżności* tego *szeregu potęgowego.* Zbiór $\{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < R\}$ nazywamy *przedziałem zbieżności szeregu potęgowego.*

**Uwaga 5.9.2.** *Jeśli* $R$ *jest promieniem zbieżności szeregu potęgowego* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, *to wobec twierdzenia 5.9.1, szereg ten jest bezwzględnie zbieżny w przedziale zbieżności. Dla* $x \in \mathbb{R}$ *takich, że* $|x - x_0| = R$, *czyli* $x = x_0 + R$ *oraz* $x = x_0 - R$, *szereg ten może być zbieżny lub rozbieżny. Jeśli* $R = 0$, *to przedział zbieżności tego szeregu jest zbiorem pustym, szereg jest jednak zbieżny dla* $x = x_0$.

**Wniosek 5.9.3.** *Niech* $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ *będzie ciągiem liczbowym takim, że* $a_n \neq 0$ *dla* $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 0$ *oraz niech istnieje granica* $\eta = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. *Wówczas promień zbieżności szeregu potęgowego* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *wyraża się wzorem*

$$R = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad \eta = +\infty, \\ 1/\eta & \text{dla} \quad 0 < \eta < +\infty, \\ +\infty & \text{dla} \quad \eta = 0. \end{cases} \tag{5.11}$$

**Dowód.** Z kryterium d'Alemberta (wniosek 5.5.4) dostajemy, że szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ jest zbieżny bezwzględnie dla $x \in \mathbb{R}$ takich, że $\eta|x-x_0| < 1$ oraz rozbieżny dla $x \in \mathbb{R}$ takich, że $\eta|x-x_0| > 1$, gdzie przyjmujemy $\eta|x-x_0| = +\infty$, gdy $\eta = +\infty$ oraz $|x-x_0| > 0$. Stąd dostajemy (5.11). $\square$

Dla ilustracji, przedstawimy najważniejszą funkcję w analizie $x \mapsto e^x$ w postaci sumy szeregu potęgowego. Zacznijmy od lematu.

**Lemat 5.9.4.** *Szereg potęgowy* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ *jest zbieżny bezwzględnie w* $\mathbb{R}$. *Ponadto*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \qquad \text{dla} \quad x,\, y \in \mathbb{R}. \tag{5.12}$$

**Dowód.** Ponieważ $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} \right| = 0$, więc zbieżność bezwzględna szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ dla $x \in \mathbb{R}$ wynika z wniosku 5.9.3. Weźmy dowolne $x, y \in \mathbb{R}$. Niech $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ będzie iloczynem w sensie Cauchy'ego szeregów $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ oraz $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$. Wówczas, ze wzoru dwumiennego Newtona, dla $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 0$ mamy

$$c_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} \frac{y^{n-j}}{(n-j)!} = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n-j} = \frac{(x+y)^n}{n!}.$$

To, wraz z twierdzeniem Mertensa 5.8.2 daje (5.12) i kończy dowód. $\square$

**Twierdzenie 5.9.5.** *Dla każdego* $x \in \mathbb{R}$ *zachodzi*

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

**Dowód.** Dla $x = 0$ teza jest oczywista. Rozważmy przypadek $x > 0$. Niech

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}, \qquad t_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Ponieważ $x > 0$, więc analogicznie jak w dowodzie twierdzenia 4.5.2 dla każdego $n \in \mathbb{N}$,

$$t_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^k}{n^k} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \frac{x^k}{n^k} \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} = s_n.$$

Z wniosku 4.5.4(b) mamy $e^x = \lim_{n\to\infty} t_n$, więc z powyższego, uwzględniając zbieżność szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ (patrz lemat 5.9.4), dostajemy

$$e^x \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{5.13}$$

Weźmy dowolne $m \in \mathbb{N}$. Wówczas, wobec założenia $x > 0$, dla $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant m$ mamy

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^k}{n^k} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \frac{x^k}{k!} \geqslant 1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \frac{x^k}{k!}.$$

Ponieważ dla każdego $k \in \mathbb{N}$ zachodzi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} = 1$, więc przechodząc w powyższym do granicy przy $n \to \infty$ mamy

$$e^x \geqslant 1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{x^k}{k!} = s_m.$$

Przechodząc teraz do granicy, przy $m \to \infty$, dostajemy $e^x \geqslant \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. To, wraz z (5.13) daje tezę w przypadku $x > 0$.

Dla $x < 0$ mamy $-x > 0$, więc z lematu 5.9.4 i powyżej udowodnionego przypadku,

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Stąd wynika teza w przypadku $x < 0$. To kończy dowód. $\square$

Z twierdzenia 5.9.5 dostajemy natychmiast

**Wniosek 5.9.6.** $e = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

**Wniosek 5.9.7.** *Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi*

$$e^x \geqslant 1 + x. \tag{5.14}$$

**Dowód.** Z twierdzenia 5.9.5 mamy $e^x - 1 - x = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, więc z prawa łączności dla szeregów 5.6.1,

$$e^x - 1 - x = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right). \tag{5.15}$$

Zatem mamy (5.14) dla $x \geqslant 0$. Dla $-1 < x < 0$, (5.14) wynika z (5.15), gdyż wtedy $\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} > 0$. Dla $x \leqslant -1$, (5.14) wynika z nierówności $e^x > 0$ dla $x \in \mathbb{R}$. $\square$

## ZADANIA

**Zadanie 5.9.1.** *Liczba $e$ jest niewymierna.*

Wsk. Udowodnić, że $0 < e - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{1}{n!n}$ dla $n \in \mathbb{N}$.

## 5.10 Funkcje trygonometryczne

W tym punkcie wprowadzimy funkcje trygonometryczne. Zacznijmy od własności.

**Własność 5.10.1.** *Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ szeregi*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \tag{5.16}$$

*są zbieżne bezwzględnie.*

**Dowód.** Dla $x = 0$ zbieżność szeregów jest oczywista. Dla $x \neq 0$, stosując kryterium d'Alemberta zbieżności szeregów (wniosek 5.5.4), łatwo dostajemy tezę. □

**Uwaga 5.10.2.** *Szeregi w (5.16) traktujemy również jako szeregi potęgowe, gdzie przyjmujemy współczynniki $a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$ i $a_{2n} = 0$ dla $n \in \mathbb{N}$ w pierwszym szeregu oraz $b_{2n+1} = 0$ i $b_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!}$ dla $n \in \mathbb{N}$ w drugim. Bowiem stosując prawo łączności, można łatwo pokazać, że opuszczenie wyrazów zerowych nie wpływa na zbieżność szeregu.*

**Definicja funkcji sinus i cosinus.** Dla $x \in \mathbb{R}$ kładziemy

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \qquad \text{oraz} \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

i nazywamy odpowiednio *sinusem* $x$ oraz *cosinusem* $x$. Funkcje $x \mapsto \sin x$ oraz $x \mapsto \cos x$ nazywamy odpowiednio *funkcją sinus* i *funkcją cosinus* i odpowiednio oznaczamy sin, cos.

**Twierdzenie 5.10.3.** *Niech $x, y \in \mathbb{R}$. Wówczas mamy*

(a) $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$,

(b) $\cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$,

(c) $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$, $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$,

(d) $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$, $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$,

(e) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

**Dowód.** Części (a) i (b) wynikaję bezpośrednio z definicji.
Udowodnimy (c). Rozważmy iloczyny w sensie Cauchy'ego

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} y^{2n}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} d_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} y^{2n+1}.$$

W myśl własności 5.10.1 i twierdzenie Mertensa 5.8.2, wszystkie szeregi w powyższym wzorze są zbieżne bezwzględnie. Ponadto dla $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 0$ mamy

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \frac{(-1)^{n-k}}{(2(n-k))!} y^{2(n-k)} = \frac{(-1)^n}{(2n)!} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} x^{2k} y^{2n-2k},$$

więc

$$c_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(2(n+1))!} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{2(n+1)}{2k} x^{2k} y^{2(n+1)-2k}$$

oraz

$$\begin{aligned} d_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \frac{(-1)^{n-k}}{(2(n-k)+1)!} y^{2(n-k)+1} \\ &= -\frac{(-1)^{n+1}}{(2(n+1))!} \sum_{k=0}^{n} \binom{2(n+1)}{2k+1} x^{2k+1} y^{2(n+1)-(2k+1)}. \end{aligned}$$

Stąd mamy $c_0 = 1$ oraz ze wzoru dwumiennego Newtona,

$$c_{n+1} + d_n = \frac{(-1)^{n+1}}{(2(n+1))!}(x-y)^{2(n+1)}, \qquad c_{n+1} - d_n = \frac{(-1)^{n+1}}{(2(n+1))!}(x+y)^{2(n+1)}.$$

Reasumując

$$\cos(x+y) = c_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (c_{n+1} - d_n) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n - \sum_{n=0}^{\infty} d_n = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

oraz

$$\cos(x-y) = c_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (c_{n+1} + d_n) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n + \sum_{n=0}^{\infty} d_n = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

To daje (c).

Podobnie dowodzimy (d). Mianowicie biorąc iloczyny w sensie Cauchy'ego

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} y^{2n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} h_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} y^{2n+1}$$

dostajemy łatwo

$$f_n + h_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(x+y)^{2n+1}, \qquad f_n - h_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(x-y)^{2n+1}.$$

Stąd otrzymujemy (d).

Część (e) wynika natychmiast z drugiej części (c), gdy przyjmiemy $y = x$. □

**Wniosek 5.10.4.** *Niech $x, y \in \mathbb{R}$. Wówczas*

(a) $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, $\qquad -1 \leqslant \cos x \leqslant 1$,

(b) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, $\qquad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$,

(c) $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$, $\qquad \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x-y}{2} \sin \frac{x+y}{2}$,

(d) $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$, $\qquad \sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$.

**Dowód.** (a) i (b) wynikają natychmiast z części (e) i (c), (d) twierdzenia 5.10.3. Kładąc $u = \frac{x+y}{2}$ oraz $v = \frac{x-y}{2}$ mamy $u + v = x$ oraz $u - v = y$. Z części (c) twierdzenia 5.10.3 mamy

$$\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v \quad \text{oraz} \quad \cos(u-v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v.$$

Dodając stronami te równości dostajemy pierwszą część (c), odejmując zaś drugą równość od pierwszej dostajemy drugą część (c). Analogicznie dowodzimy (d). □

**Twierdzenie 5.10.5.** *Zachodzą następujące nierówności:*

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x \qquad \text{dla} \quad x \in (0,1], \tag{5.17}$$

$$x \cos x < \sin x \qquad \text{dla} \quad x \in (0,1]. \tag{5.18}$$

**Dowód.** Udowodnimy (5.17). Ponieważ

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R},$$

więc łącząc w tym szeregu każdy wyraz o wskaźniku parzystym z następnym wyrazem, w myśl twierdzenia 5.6.1 mamy

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} - \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!} \right) > x - \frac{x^3}{6} \quad \text{dla} \quad x \in (0,1], \tag{5.19}$$

gdyż dla $x \in (0,1]$ oraz $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\begin{aligned} \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} - \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!} &= x^{4n+1} \left( \frac{1}{(4n+1)!} - \frac{x^2}{(4n+3)!} \right) \\ &\geqslant x^{4n+1} \left( \frac{1}{(4n+1)!} - \frac{1}{(4n+3)!} \right) > 0. \end{aligned}$$

Z drugiej strony,

$$\sin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1},$$

więc łącząc każdy wyraz o wskaźniku nieparzystym z następnym wyrazem, mamy

$$\sin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!} + \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} \right) < x \quad \text{dla} \quad x \in (0,1], \tag{5.20}$$

gdyż dla $x \in (0,1]$ oraz $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$-\frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!} + \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} = x^{4n-1} \left( -\frac{1}{(4n-1)!} + \frac{x^2}{(4n+1)!} \right)$$

$$\leqslant x^{4n-1}\left(-\frac{1}{(4n-1)!}+\frac{1}{(4n+1)!}\right)<0$$

Reasumując (5.19) i (5.20) dają (5.17).

Podobnie dowodzimy (5.18). Mianowicie dla $x \in \mathbb{R}$ mamy

$$x\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n+1} = x + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{x^{4n-1}}{(4n-2)!}+\frac{x^{4n+1}}{(4n)!}\right).$$

Zatem, wobec (5.20), wystarczy pokazać, że dla $x \in (0,1]$ oraz $n \in \mathbb{N}$ zachodzi:

$$-\frac{x^{4n-1}}{(4n-2)!}+\frac{x^{4n+1}}{(4n)!} < -\frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!}+\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}. \tag{5.21}$$

Ponieważ $2 < (4n-1)^2$, więc $4n+1 < 16n^2-4n$, zatem $4n+1 < 4n(4n-1)$ i w konsekwencji $\frac{1}{(4n-1)!}+\frac{1}{(4n)!} < \frac{1}{(4n-2)!}$. Stąd

$$-\frac{1}{(4n-2)!}+\frac{1}{(4n)!} < -\frac{1}{(4n-1)!},$$

więc dla $x \in (0,1]$ dostajemy

$$-\frac{x^{4n-1}}{(4n-2)!}+\frac{x^{4n+1}}{(4n)!} \leqslant -\frac{x^{4n-1}}{(4n-2)!}+\frac{x^{4n-1}}{(4n)!} < -\frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!} < -\frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!}+\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}.$$

To daje (5.21) i w konsekwencji (5.18). To kończy dowód. □

**Wniosek 5.10.6.** *Jeśli ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do $a \in \mathbb{R}$, to*

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin a_n = \sin a$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \cos a_n = \cos a$,

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1$, *gdy* $a_n \neq 0$ *dla* $n \in \mathbb{N}$ *oraz* $a = 0$.

**Dowód.** Zauważmy najpierw, że jeśli ciąg $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do 0, to

$$\lim_{n\to\infty} \sin b_n = 0. \tag{5.22}$$

Istotnie, ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, więc istnieje $N \in \mathbb{N}$, że dla $n > N$ mamy $|b_n| < 1$. Jeśli $b_n = 0$, to $\sin b_n = 0$. Jeśli $n > N$ oraz $b_n \neq 0$, to $0 < |b_n| < 1$ i z twierdzenia 5.10.5(5.17) mamy $|b_n| - \frac{|b_n|^3}{6} < \sin|b_n| < |b_n|$. W konsekwencji

$$|b_n| - \frac{|b_n|^3}{6} \leqslant \sin|b_n| \leqslant |b_n| \qquad \text{dla} \qquad n > N.$$

Stąd i z twierdzenia o trzech ciągach dostajemy $\lim\limits_{n\to\infty} \sin|b_n| = 0$, a więc $\lim\limits_{n\to\infty} |\sin|b_n|| = 0$. Z twierdzenia 5.10.3(b) mamy $|\sin b_n| = |\sin|b_n||$, więc z poprzedniego, $\lim\limits_{n\to\infty} \sin b_n = 0$, co daje (5.22).

Udowodnimy (a). Z wniosku 5.10.4(d) mamy

$$\sin a_n - \sin a = 2\sin\frac{a_n - a}{2}\cos\frac{a_n + a}{2}.$$

Ponadto ciąg $\left(\frac{a_n-a}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do zera, więc z (5.22) mamy $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{a_n-a}{2} = 0$. Ponieważ ciąg $(\cos\frac{a_n-a}{2})_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony, więc z powyższego i własności 4.2.10 dostajemy $\lim\limits_{n\to\infty}(\sin a_n - \sin a) = 0$. To daje (a).

Ponieważ $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, więc

$$\cos a_n = 1 - 2\sin^2\frac{a_n}{2}$$

i z (a) dostajemy (b).

Udowodnimy (c). Ponieważ $a_n \neq 0$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, więc istnieje $N \in \mathbb{N}$, że dla $n > N$ zachodzi $0 < |a_n| < 1$. Z twierdzenia 5.10.5 dla $x \in (0,1]$ dostajemy $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$, więc dla $n > N$ mamy

$$\cos|a_n| < \frac{\sin|a_n|}{|a_n|} < 1.$$

Zatem z (b) i twierdzenia o trzech ciągach wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin|a_n|}{|a_n|} = 1$. Ponieważ z twierdzenia 5.10.3(b) mamy $\frac{\sin a_n}{a_n} = \frac{\sin|a_n|}{|a_n|}$, więc udowodniliśmy (c). □

**Wniosek 5.10.7.** *Zachodzą następujące nierówności:*

$$0 < \cos x, \qquad 0 < \sin x \qquad \text{dla} \quad x \in (0,1]. \tag{5.23}$$

*Ponadto* $\cos 2 < 0$.

**Dowód.** Z twierdzenia 5.6.1 mamy $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^{4n}}{(4n)!} - \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!}\right)$ dla $x \in \mathbb{R}$ oraz dla $x \in (0,1]$ zachodzi

$$\frac{x^{4n}}{(4n)!} - \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} = x^{4n}\left(\frac{1}{(4n)!} - \frac{x^2}{(4n+2)!}\right) \geqslant x^{4n}\left(\frac{1}{(4n)!} - \frac{1}{(4n+2)!}\right) > 0,$$

zatem otrzymujemy $\cos x > 0$ dla $x \in (0,1]$. Stąd i z twierdzenia 5.10.5(5.18) mamy $0 < x\cos x < \sin x$ dla $x \in (0,1]$, więc udowodniliśmy (5.23).

Ponadto z twierdzenia 5.10.5(5.17) wynika, że $\sin 1 > \frac{5}{6}$. Stąd, z wniosku 5.10.4(b) oraz twierdzenia 5.10.3(e) mamy

$$\cos 2 = 1 - 2\sin^2 1 < 1 - 2\frac{25}{36} = -\frac{14}{36} < 0.$$

To daje tezę i kończy dowód. □

W świetle wniosku 5.10.5 mamy, że funkcje sin i cos nie znokają tożsamościowo. Zatem następująca definicja jest poprawna.

**Definicja funkcji tangens i cotangens.** Niech $x \in \mathbb{R}$.

Liczbę $\frac{\sin x}{\cos x}$, gdy $\cos x \neq 0$ nazywamy *tangensem* $x$ i oznaczamy $\operatorname{tg} x$.

Liczbę $\frac{\cos x}{\sin x}$, gdy $\sin x \neq 0$ nazywamy *cotangensem* $x$ i oznaczamy $\operatorname{ctg} x$.

Funkcje $x \mapsto \operatorname{tg} x$ określoną w zbiorze $\{x \in \mathbb{R} : \cos x \neq 0\}$ nazywamy *funkcją tangens* i oznaczamy $\operatorname{tg}$.

Funkcję $x \mapsto \operatorname{ctg} x$ określoną w zbiorze $\{x \in \mathbb{R} : \sin x \neq 0\}$ nazywamy *funkcją cotangens* i oznaczamy $\operatorname{ctg}$.

Z wniosku 5.10.6 dostajemy natychmiast

**Wniosek 5.10.8.** *Jeśli* $\cos x \neq 0$, *to* $x$ *jest punktem skupienia dziedziny funkcji* $\operatorname{tg}$ *oraz jeśli* $\sin x \neq 0$, *to* $x$ *jest punktem skupienia dziedziny funkcji* $\operatorname{ctg}$.

Z wniosku 5.10.6 i twierdzenia 4.2.9(e) mamy

**Wniosek 5.10.9.** *Niech ciąg* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *będzie zbieżny do* $a \in \mathbb{R}$.

(a) *Jeśli* $\cos a_n \neq 0$ *oraz* $\cos a \neq 0$, *to* $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{tg} a_n = \operatorname{tg} a$,

(b) *Jeśli* $\sin a_n \neq 0$ *oraz* $\sin a \neq 0$, *to* $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{ctg} a_n = \operatorname{ctg} a$.

## 5.11 Rozwinięcie dziesiętne liczby rzeczywistej

**Uwaga 5.11.1.** *Z własności 2.4.3(a) dostajemy, że*

$$\{k \in \mathbb{Z} : 0 \leqslant k < 10\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

**Lemat 5.11.2.** *Niech* $x \in \mathbb{R}$. *Istnieje dokładnie jeden ciąg* $(v_n)_{n=0}^{\infty}$ *liczb całkowitych taki, że*

$$\frac{v_n}{10^n} \leqslant x < \frac{v_n + 1}{10^n} \qquad \text{dla} \quad n = 0, 1, ... \tag{5.24}$$

*Wtedy* $v_0 = [x]$ (4) *i oznaczając* $\alpha_n = v_n - 10v_{n-1}$ *dla* $n = 1, 2, ...$ *mamy*

$$\alpha_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \qquad \text{dla} \quad n = 1, 2, ..., \tag{5.25}$$

*przy czym zbiór* $\{n \in \mathbb{N} : \alpha_n \neq 9\}$ *jest nieskończony i zachodzi*

$$x = [x] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{10^n}. \tag{5.26}$$

[4] $[x]$ oznacza całość z liczby $x$.

**Dowód.** Przyjmując $v_n = [x10^n]$, $n = 0, 1, ...,$ dostajemy (5.24). Jednoznaczność ciągu $(v_n)_{n=0}^{\infty}$ wynika z określenia całości z liczby. Wtedy z (5.24) dla $n = 0, 1, ...$ mamy

$$\frac{10v_n}{10^{n+1}} \leqslant x,$$

więc $10v_n \leqslant v_{n+1}$, czyli $0 \leqslant v_{n+1} - 10v_n$. Ponadto

$$\frac{v_{n+1}}{10^{n+1}} \leqslant x < \frac{v_n + 1}{10^n} = \frac{10v_n + 10}{10^{n+1}},$$

zatem $v_{n+1} < 10v_n + 10$ dla $n = 0, 1, ...,$ co daje (5.25). Z (5.24) mamy

$$x - \frac{1}{10^n} < \frac{v_n}{10^n} \leqslant x \qquad \text{dla} \qquad n = 0, 1, ...,$$

więc z twierdzenia o trzech ciągach 4.2.6 dostajemy $x = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{v_n}{10^n}$. Stąd wynika (5.26), gdyż

$$\frac{v_n}{10^n} = v_0 + \sum_{k=1}^{n} \left( \frac{v_k}{10^k} - \frac{v_{k-1}}{10^{k-1}} \right) = [x] + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{10^k} \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, ...$$

Zauważmy, że zbiór $\{n \in \mathbb{N} : \alpha_n \neq 9\}$ jest nieskończony. Istotnie, w przeciwnym razie oznaczając przez $s$ liczbę 0, gdy $\alpha_n = 9$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $s = \max\{n \in \mathbb{N} : \alpha_n \neq 9\}$, gdy nie wszystkie liczby $\alpha_n$ są równe 9, mamy

$$\sum_{k=s+1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{10^k} = \frac{1}{10^s}.$$

Zatem $x = [x] + 1$, gdy $s = 0$ oraz

$$x = [x] + \sum_{k=1}^{s} \frac{\alpha_k}{10^k} + \frac{1}{10^s}, \qquad \text{gdy} \qquad s > 0.$$

Przypadek $x = [x]+1$ przeczy określeniu całości z liczby. W drugim przypadku zaś, mamy

$$x = \frac{1}{10^s} \left( [x]10^s + \sum_{k=1}^{s-1} \alpha_k 10^{s-k} + \alpha_s + 1 \right),$$

więc

$$v_n = 10^{n-s} \left( [x]10^s + \sum_{k=1}^{s-1} \alpha_k 10^{s-k} + \alpha_s + 1 \right) \text{ dla } n \geqslant s$$

i $\alpha_n = v_n - 10v_{n-1} = 0$ dla $n > s$. To przeczy przypuszczeniu i kończy dowód. □

**Definicja ciągu przybliżeń dziesiętnych liczby rzeczywistej.** Niech $x \in \mathbb{R}$ oraz $(v_n)_{n=0}^{\infty}$ będzie ciągiem liczb całkowitych spełniających (5.24). Ciąg $(w_n)_{n=0}^{\infty}$ określony wzorem $w_n = \frac{v_n}{10^n}$ nazywamy *ciągiem przybliżeń dziesiętnych liczby $x$.*

**Lemat 5.11.3.** *Niech $c \in \mathbb{N}$. Istnieje dokładnie jeden ciąg $(v_n)_{n=0}^{\infty}$ liczb całkowitych taki, że*

$$v_n 10^n \leqslant c < (v_n + 1)10^n \qquad \text{dla} \quad n = 0, 1, ... \tag{5.27}$$

*Wtedy $v_0 = c$ i oznaczając $\beta_n = v_n - 10v_{n+1}$ dla $n = 0, 1, ...$ mamy*

$$\beta_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \qquad \text{dla} \quad n = 0, 1, ... \tag{5.28}$$

*Ponadto istnieje $k \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant 0$, że $10^k \leqslant c < 10^{k+1}$ i wtedy $\beta_k \neq 0$ oraz $\beta_n = 0$ dla $n > k$, przy czym*

$$c = \sum_{n=0}^{k} \beta_n 10^n \tag{5.29}$$

**Dowód.** Przyjmując $v_n = [\frac{c}{10^n}]$, $n = 0, 1, ...$, dostajemy (5.27). Jednoznaczność ciągu $(v_n)_{n=0}^{\infty}$ wynika z określenia całości z liczby. Wtedy $v_0 = c$ i z określenia ciągu $(v_n)_{n=0}^{\infty}$ mamy

$$10v_{n+1}10^n \leqslant v_n 10^n \leqslant c < (v_{n+1} + 1)10^{n+1} \qquad \text{dla} \quad n = 0, 1, ...$$

Zatem $10v_{n+1} \leqslant v_n$ oraz $v_n < 10v_{n+1} + 10$, co daje (5.28). Ponieważ $c \geqslant 1$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{c}{10^n} = 0$, więc istnieje $k \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant 0$, że

$$1 \leqslant \frac{c}{10^k} < 10 \qquad \text{oraz} \qquad 0 < \frac{c}{10^n} < 1 \qquad \text{dla} \qquad n > k.$$

Stąd wynika, że $v_k \neq 0$ oraz $v_n = 0$ dla $n > k$ i w konsekwencji $\beta_k = v_k$ oraz $\beta_n = 0$ dla $n > k$. Jeśli $k = 0$, to $c = \beta_0$, więc mamy (5.29). Jeśli $k > 0$, to

$$c = v_0 = v_k 10^k + \sum_{n=0}^{k-1} (v_n - 10v_{n+1})10^n = \beta_k 10^k + \sum_{n=0}^{k-1} \beta_n 10^n,$$

co daje (5.29) i kończy dowód. □

**Definicja rozwinięcia dziesiętnego liczby rzeczywistej.** Niech $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. Przedstawienie

$$x = \operatorname{sgn}(x) \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\alpha_n}{10^n}, \tag{5.30}$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$, $k \leqslant 0$, $\alpha_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ dla $n = k, k+1, ...$ (przy czym $\alpha_k \neq 0$, gdy $|x| \geqslant 1$ oraz $k = 0$ i $\alpha_k = 0$, gdy $|x| < 1$), nazywamy *rozwinięciem dziesiętnym liczby* $x$ i piszemy

$$x = \alpha_k ... \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 ..., \qquad \text{gdy} \qquad x > 0$$

oraz

$$x = -\alpha_k ... \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 ..., \qquad \text{gdy} \qquad x < 0.$$

Dodatkowo przyjmujemy $0 = 0, 0...$ .

Rozwinięcie (5.30) nazywamy *normalnym*, gdy zbiór $\{n \in \mathbb{Z} : n \geqslant k \wedge \alpha_n \neq 9\}$ jest nieskończony.

**Twierdzenie 5.11.4.** *Każda liczba rzeczywista posiada dokładnie jedno rozwinięcie dziesiętne normalne.*

**Dowód.** Niech $x \in \mathbb{R}$. Wobec definicji rozwinięcia dziesiętnego, wystarczy rozważyć przypadek $x > 0$. Pokażemy najpierw, że liczba $x$ ma rozwinięcie dziesiętne normalne. Niech $c = [x]$. Jeśli $c = 0$, to teza wynika z lematu 5.11.2. Jeśli $c > 0$ i $x = c$, to teza wynika z lematu 5.11.3. Jeśli $c > 0$ oraz $x \neq c$, to przyjmując $y = x - c$ mamy $x = c + y$ oraz $0 < y < 1$, więc biorąc sumę rozwinięć dziesiętnych liczby $y$ (patrz lemat 5.11.2) oraz liczby $c$ (patrz lemat 5.11.3) dostajemy tezę.

Pokażemy teraz jedyność rozwinięcia normalnego. Niech

$$x = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\alpha_n}{10^n} \qquad \text{oraz} \qquad x = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\beta_n}{10^n},$$

gdzie $\alpha_n, \beta_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ dla $n \geqslant k$ oraz zbiory

$$\{n \in \mathbb{Z} : n \geqslant k \wedge \alpha_n \neq 9\}, \ \{n \in \mathbb{Z} : n \geqslant k \wedge \beta_n \neq 9\} \ \text{będą nieskończone.} \tag{5.31}$$

Wystarczy pokazać, że $\alpha_n = \beta_n$ dla $n \geqslant k$. W tym celu zauważmy, że

$$\left| \sum_{n=k}^{s} \frac{\beta_n}{10^n} - \sum_{n=k}^{s} \frac{\alpha_n}{10^n} \right| < \frac{1}{10^s} \qquad \text{dla} \quad s \geqslant k. \tag{5.32}$$

Istotnie dla każdego $s \geqslant k$ mamy $\sum\limits_{n=k}^{s} \frac{\alpha_n}{10^n} \leqslant x$, więc z założenia (5.31),

$$\sum_{n=k}^{s} \frac{\beta_n}{10^n} - \sum_{n=k}^{s} \frac{\alpha_n}{10^n} \leqslant x - \sum_{n=k}^{s} \frac{\alpha_n}{10^n} = \sum_{n=s+1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{10^n} < \sum_{n=s+1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = \frac{1}{10^s}.$$

Analogicznie pokazujemy

$$\sum_{n=k}^{s} \frac{\beta_n}{10^n} - \sum_{n=k}^{s} \frac{\alpha_n}{10^n} < \frac{1}{10^s}.$$

Reasumując mamy (5.32). Z (5.32) indukcyjnie dostajemy, że $\alpha_n = \beta_n$ dla $n \geqslant k$. To kończy dowód. $\square$

**Uwaga 5.11.5.** *Zastępując liczbę* 10 *w powyższych twierdzeniach przez dowolną liczbę naturalną większą od* 1 *dostajemy analogiczne rozwinięcia liczb rzeczywistych.*