Rozdział 8

Ciągi i szeregi funkcyjne

8.1 Zbieżność ciągu i szeregu funkcyjnego

Dla skrócenia zapisu przyjmijmy pewne oznaczenie.

Definicja. Niech $X, Y \neq \emptyset$. Przez Y^X oznaczamy zbiór wszystkich funkcji określonych na zbiorze X o wartościach w zbiorze Y.

Definicja ciągu funkcyjnego. Niech $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$. Funkcję określoną na zbiorze $\mathbb{N}$ o wartościach w zbiorze funkcji $\mathbb{R}^X$ nazywamy *ciągiem funkcyjnym* i oznaczamy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lub $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ lub $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, ...$, piszemy również $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^X$ lub $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^X$.

Definicja zbieżności ciągu funkcyjnego. Niech $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^X$. Mówimy, że *ciąg funkcyjny* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jest *zbieżny*, gdy istnieje funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ taka, że dla każdego $x \in X$ zachodzi $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Funkcję f nazywamy *granicą* ciągu $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ i piszemy $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$. Ciąg funkcyjny, który nie jest zbieżny, nazywamy *rozbieżnym.*

Uwaga 8.1.1. *Niech $(f_n)_{n=1}^{\infty}, (g_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^X$ będą ciągami funkcyjnymi zbieżnymi odpowiednio do $f, g : X \to \mathbb{R}$. Wprost z własności granic ciągów liczbowych dostajemy, że: suma $(f_n + g_n)_{n=1}^{\infty}$, różnica $(f_n - g_n)_{n=1}^{\infty}$ i iloczyn $(f_n g_n)_{n=1}^{\infty}$ są ciągami zbieżnymi odpowiednio do $f + g$, $f - g$ i fg. Jeśli ponadto $g(x) \neq 0$, $g_n(x) \neq 0$ dla $x \in X$ oraz $n \in \mathbb{N}$, to ciąg $\left(\frac{f_n}{g_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do $\frac{f}{g}$.*

Definicja szeregu funkcyjnego. Niech $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^X$ będzie ciągiem funkcyjnym.

Ciąg funkcyjny $s_n = f_1 + \cdots + f_n$, $n = 1, 2, ...$ nazywamy *ciągiem sum częściowych ciągu* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$.

Szeregiem funkcyjnym nazywamy parę uporządkowaną $((f_n)_{n=1}^{\infty}, (s_n)_{n=1}^{\infty})$ i oznaczamy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$. Wtedy ciąg $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ nazywamy *ciągiem sum częściowych szeregu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$.

Definicja zbieżności szeregu funkcyjnego. *Szereg funkcyjny* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$, gdzie $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^X$ nazywamy *zbieżnym*, gdy zbieżny jest jego ciąg sum częściowych. Jeśli $s : X \to \mathbb{R}$ jest granicą ciągu sum częściowych szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$, to mówimy, że szereg ten jest zbieżny do s, funkcję s zaś nazywamy *sumą tego szeregu* i piszemy $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$.

Szereg funkcyjny, który nie jest zbieżny nazywamy *rozbieżnym*.

Uwaga 8.1.2. *Niech $f_n(x) = x^n$, $x \in (-1,1]$, n=1,2,... Ciąg ten jest zbieżny do funkcji $g : (-1,1] \to \mathbb{R}$ określonej wzorem $g(x) = 0$ dla $x \in (-1,1)$ oraz $g(1) = 1$. Szereg funkcyjny zaś $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest rozbieżny, gdyż rozbieżny jest w punkcie $x = 1$. Szereg ten rozważany w zbiorze $(-1,1)$ jest zbieżny i jego sumą jest $\frac{x}{1-x}$.*

Uwaga 8.1.3. *Przypomnijmy, że dla $k \in \mathbb{Z}$ oznaczamy $\mathbb{Z}_k = \{m \in \mathbb{Z} : m \geqslant k\}$. Podobnie jak w przypadku ciągów i szeregów liczbowych, w wielu zagadnieniach wygodnie jest rozważać ciągi i szeregi funkcyjne w nieco ogólniejszym sensie, gdzie wskaźniki przebiegają zbiór $\mathbb{Z}_k$. Dokładniej, niech $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$. Funkcję określoną na zbiorze $\mathbb{Z}_k$ o wartościach w zbiorze funkcji $\mathbb{R}^X$ nazywamy ciągiem funkcyjnym i oznaczamy $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}_k}$ lub $(f_n)_{n=k}^{\infty}$ lub $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n = k, k+1, ...$ lub $f_k, f_{k+1}, ...$, piszemy również $(f_n)_{n=k}^{\infty} \subset \mathbb{R}^X$.*

Podobnie postępujemy dla szeregów funkcyjnych. Niech $(f_n)_{n=k}^{\infty} \subset \mathbb{R}^X$ będzie ciągiem funkcyjnym. Ciąg funkcyjny $s_n = f_k + \cdots + f_n$, $n = k, k+1, ...$ nazywamy ciągiem sum częściowych ciągu $(f_n)_{n=k}^{\infty}$.

Szeregiem funkcyjnym nazywamy parę uporządkowaną $((f_n)_{n=k}^{\infty}, (s_n)_{n=k}^{\infty})$ i oznaczamy $\sum\limits_{n=k}^{\infty} f_n$. Wtedy ciąg $(s_n)_{n=k}^{\infty}$ nazywamy ciągiem sum częściowych szeregu $\sum\limits_{n=k}^{\infty} f_n$.

Podobnie jak wyżej deiniujemy pojęcia zbieżności ciągu i szeregu funkcyjnego. W dalszym ciągu ograniczymy się głównie do ciągów i szeregów których wskaźniki przebiegają zbiór liczb naturalnych (wyjątek stanowią szeregi potęgowe). Wprowadzone dalej pojęcia i udowodnione twierdzenia przenoszą się łatwo na ogólny przypadek.

8.2 Jednostajna zbieżność ciągu funkcyjnego

Definicja jednostajnej zbieżności ciągu funkcyjnego. Mówimy, że ciąg funkcyjny $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^X$jest *jednostajnie zbieżny*, gdy istnieje funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ taka, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $N \in \mathbb{R}$, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ takiego, że $n > N$ oraz dla każdego $x \in X$ zachodzi $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Wtedy mówimy, że *ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jest jednostajnie zbieżny do funkcji f* i piszemy $f_n \rightrightarrows f$.

Uwaga 8.2.1. *Niech $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^X$ oraz niech $f : X \to \mathbb{R}$. Z definicji zbieżności mamy*

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n \quad \Leftrightarrow \quad \forall_{x\in X}\, \forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{N\in\mathbb{R}}\, \forall_{n>N}\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

oraz

$$f_n \rightrightarrows f \quad \Leftrightarrow \quad \forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{N\in\mathbb{R}}\, \forall_{n>N}\, \forall_{x\in X}\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Różnica między definicją zbieżności ciągu funkcyjnego i zbieżności jednostajną polega na tym, że w pierwszej definicji dobieramy N do x oraz do ε, w drugiej zaś dobieramy N do ε, wspólne dla wszystkich $x \in X$

Bezpośrednio z definicji dostajemy następującą własność.

Własność 8.2.2. *Jeśli ciąg funkcyjny* $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^X$ *jest jednostajnie zbieżny do funkcji* $f : X \to \mathbb{R}$*, to ciąg ten jest zbieżny do* f*.*

Uwaga 8.2.3. *Definicje zbieżności i zbieżności jednostajnej nie są równoważne. Na przykład ciąg funkcyjny* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*,* $n \in \mathbb{N}$ *określony wzorem* $f_n(x) = \frac{x}{n}$*,* $x \in \mathbb{R}$ *jest zbieżny do funkcji* $f(x) = 0$ *dla* $x \in \mathbb{R}$*. Ciąg ten nie jest jednak zbieżny jednostajnie do funkcji* f*.*

Podobnie jak dla szeregów liczbowych dostajemy

Własność 8.2.4. *Niech* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$*,* $(g_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^X$ *oraz niech* $f, g : X \to \mathbb{R}$*. Jeśli* $f_n \rightrightarrows f$ *i* $g_n \rightrightarrows g$*,to* $(f_n + g_n) \rightrightarrows (f + g)$ *oraz* $(f_n - g_n) \rightrightarrows (f - g)$*.*

Dowód. Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. Ponieważ $f_n \rightrightarrows f$, $g_n \rightrightarrows g$, to istnieje $N \in \mathbb{R}$, że dla każdego $n > N$ oraz $x \in X$ zachodzi

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{oraz} \qquad |g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wówczas dla $n > N$ oraz $x \in X$ mamy

$$|f_n(x) + g_n(x) - f(x) - g(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

oraz

$$|f_n(x) - g_n(x) - f(x) + g(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

To daje tezę. □

Własność 8.2.5. *Niech* $(f_n)_{n=1}^{\infty}, (g_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^X$ *oraz* $f, g : X \to \mathbb{R}$*. Jeśli* $f_n \rightrightarrows f$*,* $g_n \rightrightarrows g$ *oraz istnieje* $M \in \mathbb{R}$*,* $M > 0$*, że* $|f_n(x)|, |g_n(x)| \leqslant M$ *dla wszystkich* $x \in X$ *oraz* $n \in \mathbb{N}$*, to* $(f_n g_n) \rightrightarrows (fg)$*.*

Dowód. Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. Ponieważ $f_n \rightrightarrows f$, $g_n \rightrightarrows g$, to istnieje $N \in \mathbb{R}$, że dla każdego $n > N$ oraz $x \in X$ zachodzi

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2M} \qquad \text{oraz} \qquad |g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Ponieważ $|g_n(x)| \leqslant M$ dla $x \in X$ oraz $n \in \mathbb{N}$, więc przechodząc do granicy mamy $|g(x)| \leqslant M$ dla $x \in X$. W konsekwencji dla $n > N$ oraz $x \in X$ mamy

$$|f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| \leqslant |f_n(x)||g_n(x) - g(x)| + |g(x)||f_n(x) - f(x)| < M\frac{\varepsilon}{2M} + M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

To daje tezę. □

Uwaga 8.2.6. *W powyższej własności założenia, że funkcje* f_n, g_n *są ograniczone nie można opuścić. Mianowicie ciągi* $f_n(x) = x$*,* $g_n(x) = \frac{1}{n}$*,* $x \in \mathbb{R}$*,* $n \in \mathbb{N}$ *są jednostajnie zbieżne lecz ciąg* $(f_n g_n)_{n=1}^{\infty}$ *nie jest jednostajnie zbieżny. Ponadto ciąg* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *nie jest ograniczony.*

Podobnie jak własność 8.2.5 dowodzimy

Własność 8.2.7. *Niech* $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^X$ *oraz* $f_n \rightrightarrows f$, *gdzie* $f : X \to \mathbb{R}$. *Jeśli* $g : X \to \mathbb{R}$ *jest funkcją ograniczoną, to* $(f_n g) \rightrightarrows (fg)$.

Własność 8.2.8. *Niech* $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^X$ *będzie ciągiem funkcyjnym oraz niech* $f : X \to \mathbb{R}$. *Oznaczmy*

$$M_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in X\} \qquad \text{dla} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Wówczas następujące warunki są równoważne:

(a) $f_n \rightrightarrows f$.

(b) *istnieje* $m \in \mathbb{N}$, *że* $M_n \in \mathbb{R}$ *dla* $n \geqslant m$ *oraz* $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = 0$.

Dowód. Ad. (a)⇒(b) Ponieważ $f_n \rightrightarrows f$, więc istnieje $m \in \mathbb{N}$, że dla każdego $n \geqslant m$ oraz $x \in X$ mamy $|f_n(x) - f(x)| < 1$. Zatem $0 \leqslant M_n \leqslant 1$, a więc $M_n \in \mathbb{R}$ dla $n \geqslant m$.

Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. Wówczas, wobec (a), istnieje $N \geqslant m$ takie, że dla $n > N$ oraz $x \in X$ zachodzi $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Stąd i z określenia M_n dla $n > N$ mamy $|M_n - 0| = M_n \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. To daje, że $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = 0$.

Ad. (b)⇒(a) Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. Wówczas, wobec (b), istnieje $N \geqslant m$, że dla $n > N$ zachodzi $M_n < \varepsilon$. Ponieważ z określenia M_n dostajemy, że dla $x \in X$ zachodzi $|f_n(x) - f(x)| \leqslant M_n$, więc dla $n > N$ oraz $x \in X$ mamy $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. To daje jednostajną zbieżność ciągu $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ do funkcji f. □

Twierdzenie 8.2.9. (warunek Cauchy'ego zbieżności jednostajnej ciągu funkcyjnego). *Niech* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *będzie ciągiem funkcyjnym, gdzie* $f_n : X \to \mathbb{R}$ *dla* $n \in \mathbb{N}$. *Wówczas ciąg* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *jest jednostajnie zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia następujący warunek Cauchy'ego:*

$$\forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{N\in\mathbb{R}}\, \forall_{n,l>N}\, \forall_{x\in X}\ |f_n(x) - f_l(x)| < \varepsilon. \tag{8.1}$$

Dowód. Załóżmy najpierw, że ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jest jednostajnie zbieżny, powiedzmy do funkcji $f : X \to \mathbb{R}$. Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. Wtedy istnieje $N \in \mathbb{R}$, że dla $n > N$ oraz $x \in X$ mamy $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Zatem dla każdych $n, l > N$ oraz $x \in X$ mamy

$$|f_n(x) - f_l(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_l(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

To daje, że ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ spełnia warunek Cauchy'ego (8.1).

Załóżmy teraz, że ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ spełnia warunek Cauchy'ego (8.1). Wówczas dla każdego $x \in X$ ciąg liczbowy $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ spełnia warunek Cauchy'ego. Zatem na podstawie twierdzenia Cauchy'ego 4.7.3 dla każdego $x \in X$ istnieje skończona granica $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Oznaczając tę granicę przez $f(x)$ dla $x \in X$ mamy określoną funkcję $f : X \to \mathbb{R}$ do której jest zbieżny ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$.

Pokażemy, że $f_n \rightrightarrows f$. Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. W myśl (8.1) istnieje $N \in \mathbb{R}$, że dla $n, l > N$ oraz $x \in X$ zachodzi $|f_n(x) - f_l(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Zatem przechodząc do granicy przy $l \to \infty$ dostajemy, że dla $n > N$ oraz $x \in X$ zachodzi $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. To daje $f_n \rightrightarrows f$. □

ZADANIA

Zadanie 8.2.1. *Niech* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ *będą ciągami funkcyjnymi, gdzie* $f_n, g_n : X \to \mathbb{R}$ *dla* $n \in \mathbb{N}$. *Niech* $f_n \rightrightarrows f$, $g_n \rightrightarrows g$, *gdzie* $f, g : X \to \mathbb{R}$. *Wówczas jeśli istnieją* $M, K \in \mathbb{R}$, $M, K > 0$ *że* $|g_n(x)| \geqslant M$, $|f(x)| \leqslant K$ *dla* $x \in X$ *oraz* $n \in \mathbb{N}$, *to* $\frac{f_n}{g_n} \rightrightarrows \frac{f}{g}$.

8.3 Jednostajna zbieżność szeregu funkcyjnego

Definicja jednostajnej zbieżności szeregu funkcyjnego. Mówimy, że szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$, gdzie $f_n : X \to \mathbb{R}$ dla $n \in \mathbb{N}$, jest *jednostajnie zbieżny*, gdy ciąg sum częściowych tego szeregu jest jednostajnie zbieżny.

Bezpośrednio z definicji dostajemy następującą własność.

Własność 8.3.1. *Każdy szereg funkcyjny zbieżny jednostajnie jest zbieżny.*

Z własności 8.2.4 i 8.2.7 dostajemy natychmiast

Własność 8.3.2. *Niech szeregi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *i* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n$ *będą zbieżne jednostajnie, przy czym* $(f_n)_{n=1}^{\infty}, (g_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^X$. *Wówczas*

(a) *szeregi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (f_n + g_n)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (f_n - g_n)$ *są zbieżne jednostajnie.*

(b) *jeśli funkcja* $g : X \to \mathbb{R}$ *jest ograniczona, to szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n g$ *jest zbieżny jednostajnie.*

Z warunku Cauchy'ego zbieżności jednostajnej ciągu funkcyjnego 8.2.9 dostajemy

Twierdzenie 8.3.3. (warunek Cauchy'ego zbieżności jednostajnej szeregu funkcyjnego). *Niech* $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^X$ *będzie ciągiem funkcyjnym. Wówczas szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *jest jednostajnie zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia następujący warunek Cauchy'ego:*

$$\forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{N\in\mathbb{R}}\, \forall_{m\geqslant l>N}\, \forall_{x\in X} \quad \left| \sum_{n=l}^{m} f_n(x) \right| < \varepsilon. \tag{8.2}$$

Udowodnimy kryterium Weierstrassa jednostajnej zbieżności szeregu funkcyjnego

Twierdzenie 8.3.4. (kryterium Weierstrassa jednostajnej zbieżności szeregu funkcyjnego). *Niech* $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^X$ *będzie ciągiem funkcyjnym. Jeśli istnieje ciąg liczbowy* $(M_n)_{n=1}^{\infty}$ *taki, że dla każdego* $n \in \mathbb{N}$ *zachodzi* $|f_n(x)| \leqslant M_n$ *dla* $x \in X$ *oraz szereg liczbowy* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ *jest zbieżny, to szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *jest jednostajnie zbieżny.*

Dowód. Pokażemy, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ spełnia warunek Cauchy'ego (8.2). Istotnie, weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. Ponieważ szereg liczbowy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ jest zbieżny, więc z twierdzenia

Cauchy'ego 5.1.6, istnieje $N \in \mathbb{R}$, że dla każdych $m \geqslant l > N$ mamy $|M_l + \cdots + M_m| < \varepsilon$. Zatem dla każdego $m \geqslant l > N$ oraz $x \in X$ mamy

$$|f_l(x) + \cdots + f_m(x)| \leqslant |f_l(x)| + \cdots + |f_m(x)| \leqslant M_l + \cdots + M_m < \varepsilon.$$

To daje, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ spełnia warunek Cauchy'ego (8.2). Stąd i z twierdzenia 8.3.3 dostajemy tezę. □

Uwaga 8.3.5. *Nie zachodzi twierdzenie odwrotne do kryterium Weierstrassa. Na przykład szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n}$ *jest w przedziale* $[0,1]$ *zbieżny jednostajnie (co czytelnik sprawdzi bez trudu) lecz dla* $x \in (0,1]$, *szereg ten nie jest zbieżny bezwzględnie.*

Udowodnimy kryterium Abela jednostajnej zbieżności szeregu funkcyjnego.

Twierdzenie 8.3.6. (kryterium Abela jednostajnej zbieżności szeregu funkcyjnego). *Niech* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, $(g_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^X$ *będą ciągami funkcyjnymi. Jeśli*

(i) *istnieje* $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$, *że dla każdego* $n \in \mathbb{N}$ *oraz* $x \in X$ *zachodzi* $|f_n(x)| \leqslant M$,

(ii) *dla każdego* $x \in X$ *ciąg* $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ *jest malejący,*

(iii) *szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n$ *jest jednostajnie zbieżny,*

to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ *jest zbieżny jednostajnie.*

Dowód. Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. Ponieważ, wobec (iii), szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n$ jest zbieżny jednostajnie, więc z warunku Cauchy'ego 8.3.3 istnieje $N \in \mathbb{N}$, że dla każdego $m \geqslant l \geqslant N$ oraz $x \in X$ zachodzi

$$\left|\sum_{n=l}^{m} g_n(x)\right| < \frac{\varepsilon}{4M}.$$

Ustalmy $l \geqslant N$. Zatem, oznaczając

$$A_n(x) = \sum_{j=l}^{n} g_j(x) \qquad \text{dla} \qquad x \in X, \qquad n = l, l+1, ...,$$

mamy

$$|A_n(x)| < \frac{\varepsilon}{4M} \qquad \text{dla} \qquad n = l, l+1, ... \tag{8.3}$$

Stosując przekształcenie Abela (patrz dowód kryterium Dirichleta 5.4.1) i uwzględniając (8.3), (i) oraz (ii) dla $m > l$ oraz $x \in X$ dostajemy

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=l}^{m} f_n(x) g_n(x)\right| &= \left|\sum_{n=l}^{m-1} A_n(x)(f_n(x) - f_{n+1}(x)) + A_m(x) f_m(x)\right| \\
&\leqslant \sum_{n=l}^{m-1} |A_n(x)||f_n(x) - f_{n+1}(x)| + |A_m(x)||f_m(x)| \\
&\leqslant \sum_{n=l}^{m-1} \tfrac{\varepsilon}{4M}(f_n(x) - f_{n+1}(x)) + \tfrac{\varepsilon}{4M}|f_m(x)| \\
&= \tfrac{\varepsilon}{4M} f_l(x) - \tfrac{\varepsilon}{4M} f_m(x) + \tfrac{\varepsilon}{4M}|f_m(x)| \leqslant \tfrac{\varepsilon}{4M}M + \tfrac{\varepsilon}{4M}M + \tfrac{\varepsilon}{4M}M < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Dla $m = l$ zaś mamy

$$\left|\sum_{n=l}^{m} f_n(x)g_n(x)\right| = |f_l||g_l| \leqslant M\frac{\varepsilon}{4M} < \varepsilon.$$

Reasumując szereg $\sum\limits_{n=k}^{\infty} f_n g_n$ spełnia warunek Cauchyego zbieżności jednostajnej szeregów 8.3.3, więc jest to szereg zbieżny jednostajnie. To kończy dowód. □

Powtarzając dowód kryterium Dirichleta zbieżności szeregu liczbowego 5.4.1 dostajemy

Twierdzenie 8.3.7. (kryterium Dirichleta jednostajnej zbieżności szeregu funkcyjnego). *Niech* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, $(g_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^X$ *będą ciągami funkcyjnymi. Jeśli*

(i) *istnieje* $M \in \mathbb{R}$, *że dla każdego* $m \in \mathbb{N}$ *oraz* $x \in X$ *zachodzi* $|\sum\limits_{n=1}^{m} f_n(x)| \leqslant M$,

(ii) *dla każdego* $x \in X$ *ciąg* $(g_n(x))_{n=1}^{\infty}$ *jest malejący,*

(iii) *Ciąg* $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ *jest jednostajnie zbieżny do funkcji tożsamościowo równej zeru,*

to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ *jest zbieżny jednostajnie.*

8.4 Zbieżność jednostajna a ciągłość

Twierdzenie 8.4.1. *Niech ciąg funkcyjny* $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^X$, *gdzie* $X \subset \mathbb{R}$, *będzie zbieżny jednostajnie do funkcji* $f : X \to \mathbb{R}$. *Jeśli wszystkie funkcje* f_n, $n \in \mathbb{N}$, *są ciągłe w punkcie* $x_0 \in X$, *to* f *jest funkcją ciągłą w punkcie* x_0.

Dowód. Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. Ponieważ $f_n \rightrightarrows f$, więc istnieje $N \in \mathbb{N}$, że dla każdego $n \geqslant N$ oraz $x \in X$ zachodzi $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. W szczególności dla $n = N$ mamy

$$|f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{dla} \quad x \in X. \tag{8.4}$$

Ponieważ f_N jest funkcją ciągłą, więc istnieje $\delta > 0$, że dla każdego $x \in X$ takiego, że $|x - x_0| < \delta$ mamy

$$|f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{8.5}$$

Reasumując z (8.4) i (8.5) dla każdego $x \in X$ takiego, że $|x - x_0| < \delta$ mamy

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

To daje ciągłość funkcji f w punkcie x_0. □

Z twierdzenia 8.4.1 dostajemy natychmiast

Twierdzenie 8.4.2. *Jeśli ciąg* $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^X$, *gdzie* $X \subset \mathbb{R}$, *funkcji ciągłych jest zbieżny jednostajnie do funkcji* $f : X \to \mathbb{R}$, *to* f *jest funkcją ciągłą.*

Analogicznie jak twierdzenia 8.4.1 dowodzimy

Twierdzenie 8.4.3. *Jeśli ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^X$, gdzie $X \subset \mathbb{R}$, funkcji jednostajnie ciągłych jest zbieżny jednostajnie do funkcji $f : X \to \mathbb{R}$, to f jest funkcją jednostajnie ciągłą.*

Z twierdzenia 8.4.1 dostajemy

Twierdzenie 8.4.4. *Niech $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^X$, gdzie $X \subset \mathbb{R}$, będzie ciągiem funkcyjnym zbieżnym jednostajnie do funkcji $f : X \to \mathbb{R}$. Niech x_0 będzie punktem skupienia zbioru X oraz dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje skończona granica $a_n = \lim\limits_{x \to x_0} f_n(x)$. Wówczas ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny, funkcja f ma granicę skończoną w punkcie x_0 oraz*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{n \to \infty} a_n \quad (^1).$$

Dowód. Dla $n \in \mathbb{N}$ określmy funkcje $h_n : X \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}$ wzorami $h_n(x) = f_n(x)$ dla $x \in X \setminus \{x_0\}$ oraz $h_n(x_0) = a_n$. Wtedy z założenia, że $a_n = \lim\limits_{x \to x_0} f_n(x)$ dostajemy, że funkcje h_n są ciągłe w punkcie x_0.

Pokażemy, że ciąg funkcyjny $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ jest jednostajnie zbieżny. Istotnie, weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. Ponieważ ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jest jednostajnie zbieżny, więc z warunku Cauchy'ego zbieżności jednostajnej ciągu funkcyjnego 8.2.9 dostajemy, że istnieje $N \in \mathbb{R}$, że dla każdych $m, l \geqslant N$ oraz $x \in X$ zachodzi

$$|f_m(x) - f_l(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Przechodząc w powyższej nierówności do granicy przy $x \to x_0$ dostajemy $|h_m(x_0) - h_l(x_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ dla $m, l \geqslant N$. Stąd mamy

$$|h_m(x) - h_l(x)| < \varepsilon \qquad \text{dla} \quad x \in X \cup \{x_0\}, \quad m, l \geqslant N.$$

Zatem z twierdzenia 8.2.9 dostajemy jednostajną zbieżność ciągu $(h_n)_{n=1}^{\infty}$. W szczególności ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny. Niech $a = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$.

Określmy funkcję $h : X \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}$ wzorami $h(x) = f(x)$ dla $x \in X \setminus \{x_0\}$ oraz $h(x_0) = a$. Wówczas ciąg $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do h. Ponieważ ciąg ten jest jednostajnie zbieżny, więc jest on jednostajnie zbieżny do h. W konsekwencji z twierdzenia 8.4.1 wynika ciągłość funkcji h w punkcie x_0. Ponadto

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = h(x_0) = a.$$

To kończy dowód. □

Z twierdzenia 8.4.1 dostajemy

Wniosek 8.4.5. *Jeśli szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$, gdzie $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^X$, $X \subset \mathbb{R}$, jest jednostajnie zbieżny i wszystkie funkcje f_n, $n \in \mathbb{N}$, są ciągłe w punkcie $x_0 \in X$, to suma tego szeregu jest funkcją ciągłą w punkcie x_0.*

[1] inaczej $\lim\limits_{x \to x_0} (\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)) = \lim\limits_{n \to \infty} (\lim\limits_{x \to x_0} f_n(x))$.

Dowód. Istotnie, sumy częściowe szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ są funkcjami ciągłymi w punkcie x_0, jako sumy skończonej ilości funkcji ciągłych w punkcie x_0. Zatem z twierdzenia 8.4.1 dostajemy tezę. $\square$

Z wniosku 8.4.5 dostajemy

Wniosek 8.4.6. *Jeśli szereg funkcyjny* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$, *gdzie* $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^X$, $X \subset \mathbb{R}$, *jest jednostajnie zbieżny i wszystkie funkcje* f_n, $n \in \mathbb{N}$, *są ciągłe, to suma tego szeregu jest funkcją ciągłą.*

Wobec faktu, że suma funkcji jednostajnie ciągłych jest jednostajnie ciągła, z twierdzenia 8.4.3 dostajemy

Wniosek 8.4.7. *Jeśli szereg funkcyjny* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$, *gdzie* $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^X$, $X \subset \mathbb{R}$, *jest jednostajnie zbieżny i wszystkie funkcje* f_n, $n \in \mathbb{N}$, *są jednostajnie ciągłe, to suma tego szeregu jest funkcją jednostajnie ciągłą.*

8.5 Zbieżność jednostajna a różniczkowalność

Twierdzenie 8.5.1. *Niech* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *będzie ciągiem funkcji różniczkowalnych na przedziale* $[a,b]$. *Jeśli ciąg* $(f_n')_{n=1}^{\infty}$ *jest jednostajnie zbieżny (na* $[a,b]$*) oraz dla pewnego* $x_0 \in [a,b]$ *ciąg* $(f_n(x_0))_{n=1}^{\infty}$ *jest zbieżny, to*

(a) *ciąg* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *jest jednostajnie zbieżny do pewnej funkcji różniczkowalnej* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$,

(b) $f' = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'$, *to znaczy* $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$ *dla* $x \in [a,b]$.

Dowód. Ponieważ ciąg $(f_n')_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny jednostajnie oraz ciąg $(f_n(x_0))_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny, więc z warunku Cauchy'ego dostajemy, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $N_\varepsilon \in \mathbb{R}$, że

$$(8.6) \qquad |f_m'(x) - f_l'(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \qquad \text{dla każdych} \quad m,l > N_\varepsilon \quad \text{oraz} \quad x \in [a,b],$$

$$(8.7) \qquad |f_m(x_0) - f_l(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{dla każdych} \quad m,l > N_\varepsilon.$$

Pokażemy, że ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny jednostajnie w $[a,b]$. Istotnie, wystarczy pokazać, że ciąg ten spełnia warunek Cauchy'ego zbieżności jednostajnej. Weźmy więc dowolne $\varepsilon > 0$ i niech $N = N_\varepsilon$. Zauważmy, że

$$(8.8) \qquad |f_m(x) - f_l(x)| < \varepsilon \qquad \text{dla każdych} \quad m,l > N \quad \text{oraz} \quad x \in [a,b].$$

Istotnie, niech $m,l > N$. Dla $x = x_0$ (8.8) wynika z (8.7). Dla $x \in [a,b] \setminus \{x_0\}$ z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej 7.3.7 istnieje c leżący między x i x_0, że

$$(f_m(x) - f_l(x)) - (f_m(x_0) - f_l(x_0)) = (f_m'(c) - f_l'(c))(x - x_0),$$

więc z (8.6),

$$|f_m(x) - f_l(x) - f_m(x_0) + f_l(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}|x - x_0| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Stąd i z (8.7) mamy

$$|f_m(x) - f_l(x)| \leqslant |f_m(x) - f_l(x) - f_m(x_0) + f_l(x_0)| + |f_m(x_0) - f_l(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

To daje (8.8). Z dowolności $\varepsilon > 0$ oraz z (8.8) wynika, że ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ spełnia warunek Cauchy'ego zbieżności jednostajnej ciągów funkcyjnych, więc z twierdzenia 8.2.9 jest to ciąg zbieżny jednostajnie. Niech więc $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie granicą ciągu $(f_n)_{n=1}^{\infty}$.

Pokażemy teraz, że

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \qquad \text{dla} \quad x \in [a, b]. \tag{8.9}$$

Istotnie, weźmy dowolny $x_1 \in [a, b]$ i rozważmy ilorazy różnicowe

$$\varphi_n(x) = \frac{f_n(x) - f_n(x_1)}{x - x_1}, \qquad \varphi(x) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}, \qquad x \in [a, b] \setminus \{x_1\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Z określenia funkcji f dostajemy, że

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x) \qquad \text{dla} \quad x \in [a, b] \setminus \{x_1\}. \tag{8.10}$$

Ponadto z założenia o różniczkowalności funkcji f_n dla $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\lim_{x\to x_1} \varphi_n(x) = f_n'(x_1) \qquad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{8.11}$$

Pokażemy, że ciąg $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny jednostajnie. Istotnie, weźmy dowolne $\eta > 0$ i niech $\varepsilon > 0$ będzie takie, że

$$\frac{\varepsilon}{2(b-a)} < \eta.$$

Niech $N = N_\varepsilon$, gdzie N_ε jest dobrane na początku dowodu tak, że zachodzi (8.6). Niech $m, l > N$. Wówczas, z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej, dla dowolnego $x \in [a, b] \setminus \{x_1\}$ istnieje c leżący między x i x_1 taki, że

$$|f_m(x) - f_l(x) - f_m(x_1) + f_l(x_1)| = |f_m'(c) - f_l'(c)||x - x_1| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}|x - x_1| < \eta|x - x_1|,$$

więc

$$|\varphi_m(x) - \varphi_l(x)| = \left|\frac{f_m(x) - f_l(x) - f_m(x_1) + f_l(x_1)}{x - x_1}\right| < \frac{\eta|x - x_1|}{|x - x_1|} = \eta.$$

To daje, że ciąg $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ spełnia warunek Cauchy'ego zbieżności jednostajnej ciągu funkcyjnego i w konsekwencji jest to ciąg jednostajnie zbieżny. To, wraz z (8.10) daje, że ciąg $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ jest jednostajnie zbieżny do φ. Stąd, wobec (8.11), mamy spełnione wszystkie założenia twierdzenia 8.4.4. Zatem istnieje skończona granica $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x_1)$ oraz

$$f'(x_1) = \lim_{x\to x_1} \varphi(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x_1).$$

To daje, że funkcja f jest różniczkowalna oraz zachodzi (b). W konsekwencji, wobec jednostajnej zbieżności ciągu $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ do f, mamy (a). To kończy dowód. $\square$

Uwaga 8.5.2. *W twierdzeniu 8.5.1 nie można opuścić założenia o jednostajnej zbieżności ciągu* $(f'_n)_{n=1}^{\infty}$*, nawet kosztem wzmocnienia założenia o zbieżności ciągu* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$*. Istotnie, rozważmy ciąg funkcyjny* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*,* $n \in \mathbb{N}$ *określony wzorami*

$$f_n(x) = 2|x| \quad \text{dla} \quad |x| \geqslant \frac{1}{n} \qquad \text{oraz} \quad f_n(x) = \frac{n^2x^2+1}{n} \quad \text{dla} \quad |x| < \frac{1}{n}.$$

Można pokazać, że

(a) *ciąg* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *jest jednostajnie zbieżny do funkcji* $f(x) = 2|x|$*,* $x \in \mathbb{R}$*, która nie jest różniczkowalna,*

(b) *ciąg pochodnych jest zbieżny do funkcji* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *określonej wzorami* $g(x) = -2$ *dla* $x < 0$*,* $g(0) = 0$ *oraz* $g(x) = 2$ *dla* $x > 0$*.*

Wniosek 8.5.3. *Niech* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *będzie szeregiem funkcji różniczkowalnych na przedziale* $[a,b]$*. Jeśli szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f'_n$ *jest jednostajnie zbieżny (na* $[a,b]$*) oraz dla pewnego* $x_0 \in [a,b]$ *szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ *jest zbieżny, to*

(a) *szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *jest jednostajnie zbieżny i jego suma* $s : [a,b] \to \mathbb{R}$ *jest funkcją różniczkowalną,*

(b) $s' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f'_n$*, to znaczy* $s'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ *dla* $x \in [a,b]$*.*

8.6 Szeregi potęgowe

W punkcie 5.9 wprowadziliśmy pojęcie szeregu potęgowego. W świetle wprowadzonych w tym rozdziale pojąć, jest to szereg funkcyjny postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \quad x \in \mathbb{R} \qquad \text{gdzie } (a_n)_{n=0}^{\infty} \text{ jest ustalonym ciągiem liczbowym oraz } x_0 \text{ ustalonym punktem.} \tag{8.12}$$

Biorąc $\varrho = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, zgodnie z (5.10), promieniem zbieżności szeregu (8.12) jest

$$R = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad \varrho = +\infty, \\ 1/\varrho & \text{dla} \quad 0 < \varrho < +\infty, \\ +\infty & \text{dla} \quad \varrho = 0. \end{cases}$$

Z twierdzenia Cauchy'ego-Hadamarda 5.9.1 wiadomo, że szereg (8.12) jest zbieżny bezwzględnie w przedziale $\{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < R\}$ (zwanym przedziałem zbieżności szeregu potęgowego) oraz rozbieżny dla $x \in \mathbb{R}$ takich, że $|x - x_0| > R$.

Twierdzenie 8.6.1. *Niech* $R > 0$ *będzie promieniem zbieżności szeregu potęgowego (8.12). Wówczas dla każdego* $r \in \mathbb{R}$ *takiego, że* $0 < r < R$*, szereg (8.12) jest jednostajnie zbieżny w przedziale* $\{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| \leqslant r\}$*.*

Dowód. Weźmy dowolne $r \in \mathbb{R}$ takie, że $0 < r < R$. Wówczas $x_0 + r$ należy do przedziału zbieżności szeregu (8.12). Ponieważ szereg potęgowy jest zbieżny bezwzględnie w swoim przedziale zbieżności, więc szereg $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ jest zbieżny. Ponadto dla $x \in \mathbb{R}$ takich, że $|x - x_0| \leqslant r$ mamy $|a_n(x - x_0)^n| \leqslant |a_n| r^n$ dla $n \geqslant 0$. Zatem z kryterium Weierstrassa zbieżności jednostajnej szeregów 8.3.4 dostajemy zbieżność jednostajną szeregu (8.12) w $\{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| \leqslant r\}$. To daje tezę. □

Definicja . *Szeregiem pochodnych szeregu* (8.12) nazywamy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$.

Uwaga 8.6.2. *Szereg pochodnych szeregu potęgowego można traktować jako szereg potęgowy, bowiem można go zapisać w postaci* $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x - x_0)^n$.

Własność 8.6.3. *Promienie zbieżności szeregu potęgowego (8.12) i szeregu pochodnych* $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$ *są równe.*

Dowód. Ponieważ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, więc

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n a_n|}.$$

Zatem promienie zbieżności szeregu (8.12) i szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x - x_0)^n$ są równe. Dla $x \neq x_0$ szereg $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x - x_0)^n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg pochodnych $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$. Reasumując mamy tezę. □

Twierdzenie 8.6.4. *Niech $R > 0$ będzie promieniem zbieżności szeregu potęgowego (8.12) oraz niech f będzie sumą tego szeregu w przedziale zbieżności $P = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < R\}$. Wówczas funkcja f jest klasy C^∞ w P oraz*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n! a_n}{(n-k)!} (x - x_0)^{n-k} \qquad \text{dla} \quad x \in P. \tag{8.13}$$

Dowód. W myśl własności 8.6.3, promienie zbieżności szeregu (8.12) i szeregu pochodnych $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$ są równe. Pokażemy (8.13) dla $k = 1$. Istotnie, weźmy dowolny $x_1 \in P$ i niech $r \in \mathbb{R}$ będzie takie, że $|x_1 - x_0| < r < R$. Wobec twierdzenia 8.6.1, szereg (8.12) i jego szereg pochodnych są jednostajnie zbieżne w przedziale otwartym $\{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\}$. Zatem z wniosku 8.5.3 dostajemy (8.13) dla $k = 1$. Postępując dalej indukcyjnie dostajemy (8.13) dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$. W konsekwencji f jest funkcją klasy C^∞. To daje tezę. □

Z twierdzenia 8.6.4 dostajemy natychmiast

Wniosek 8.6.5. *Niech $R > 0$ będzie promieniem zbieżności szeregu potęgowego (8.12) oraz niech f będzie sumą tego szeregu w przedziale zbieżności $P = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < R\}$. Wówczas funkcja f jest ciągła w P.*

Definicja rozwinięcia funkcji w szereg potęgowy. Jeśli funkcja f w pewnym otoczeniu punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ jest sumą szeregu potęgowego o środku x_0 postaci,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \qquad \text{w pewnym otoczeniu punktu} \quad x_0, \tag{8.14}$$

to mówimy, że *funkcja f rozwija się w otoczeniu punktu x_0 w szereg potęgowy* lub *w szereg Taylora.* Wtedy szereg w (8.14) nazywamy *rozwinięciem funkcji f w szereg potęgowy w otoczeniu punktu x_0* lub *rozwinięciem w szereg Taylora.*

Twierdzenie 8.6.6. *Jeśli funkcja f rozwija się w pewnym otoczeniu punktu x_0 w szereg potęgowy $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, to rozwinięcie to jest określone jednoznacznie, ponadto*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \qquad \text{dla} \quad n = 0, 1, \ldots \tag{8.15}$$

W szczególności rozwinięcie funkcji f w szereg Taylora jest szeregiem Taylora tej funkcji.

Dowód. W myśl twierdzenia 8.6.4 mamy, że f jest funkcją klasy C^∞ w pewnym otoczeniu punktu x_0, ponadto, z (8.13) mamy $f^{(k)}(x_0) = k!a_k$ dla $k \in \mathbb{N}$ i oczywiście $f(x_0) = a_0$. To daje (8.15) i, że współczynniki rozwinięcia funkcji w szereg potęgowy są określone jednoznacznie, a więc rozwinięcie jest określone jednoznacznie. □

Uwaga 8.6.7. *Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określona wzorami $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ dla $x > 0$ oraz $f(x) = 0$ dla $x \leqslant 0$ jest klasy C^∞, ponadto $f^{(n)}(0) = 0$ dla $n = 0, 1, \ldots$, więc suma szeregu Taylora tej funkcji znika tożsamościowo. Zatem, wobec twierdzenia 8.6.6 funkcja ta nie rozwija się w szereg potęgowy w otoczeniu punktu* 0

Twierdzenie 8.6.8. *Rozwinięciem funkcji $f(x) = \ln(1 + x)$, $x \in (-1, 1)$, w szereg potęgowy w otoczeniu zera jest*

$$\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \quad \text{dla} \quad x \in (-1, 1). \tag{8.16}$$

Dowód. Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right|} = 1$, więc z twierdzenia Cauchy'ego-Hadamarda 5.9.1 dostajemy, że szereg potęgowy po prawej stronie (8.16) jest zbieżny w $(-1, 1)$. Zatem z twierdzenia 8.6.4, suma $g : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ tego szeregu jest różniczkowalna oraz

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{n-1} = \frac{1}{1 + x} \qquad \text{dla} \quad x \in (-1, 1).$$

Z drugiej strony $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ dla $x \in (-1, 1)$, więc $f' = g'$. Stąd i z wniosku 7.3.11, funkcja $f - g$ jest stała w $(-1, 1)$. Ponieważ $f(0) = 0$ i $g(0) = 0$, więc $f = g$. To daje tezę. □

Definicja funkcji analitycznej. Niech $X \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem otwartym oraz $f : X \to \mathbb{R}$. Mówimy, że f jest *funkcją analityczną w punkcie $x_0 \in X$*, gdy f rozwija się w szereg potęgowy w otoczeniu punktu x_0. Mówimy, że f jest *funkcją analityczną*, gdy f jest funkcją analityczną w każdym punkcie zbioru X.

Uwaga 8.6.9. *Wprost z definicji funkcji sinus i cosinus mamy,*

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \qquad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Zatem dla każdego $x_0 \in \mathbb{R}$ mamy

$$\sin x = \sin(x - x_0)\cos x_0 + \cos(x - x_0)\sin x_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad x \in \mathbb{R}$$

gdzie $a_{2n+1} = \frac{(-1)^n \cos x_0}{(2n+1)!}$ oraz $a_{2n} = \frac{(-1)^n \sin x_0}{(2n)!}$ dla $n = 0, 1, \ldots$ Stąd wynika, że funkcja sinus jest analityczna. Analogicznie pokazujemy, że funkcja cosinus jest analityczna.

Uwaga 8.6.10. *Z twierdzenia 5.9.5 mamy $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ dla $x \in \mathbb{R}$. Zatem dla każdego $x_0 \in \mathbb{R}$ mamy*

$$e^x = e^{x - x_0} e^{x_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{x_0}}{n!} (x - x_0)^n, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

W konsekwencji funkcja $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ jest analityczna.

Uwaga 8.6.11. *W uwagach 8.6.9 i 8.6.10 funkcje analityczne w $\mathbb{R}$ rozwijały się w szereg potęgowy zbieżny w całym zbiorze $\mathbb{R}$. Nie musi to zachodzić dla każdej funkcji analitycznej. Na przykład można sprawdzić, że funkcja $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, jest analityczna lecz jej rozwinięcie w otoczeniu punktu 0 jest postaci*

$$\frac{1}{x^2 + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \qquad x \in (-1, 1).$$

Promieniem zbieżności powyższego szeregu potęgowego jest 1, więc szereg ten nie jest zbieżny w całym zbiorze $\mathbb{R}$.

8.7 Rozwinięcie funkcji potęgowej w szereg potęgowy

Definicja ciągu reszt we wzorze Taylora. Niech $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^∞ oraz $x_0 \in (a, b)$. Dla $n \in \mathbb{N}$, funkcję $R_n : (a, b) \to \mathbb{R}$ taką, że

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x) \qquad \text{dla} \quad x \in (a, b) \tag{8.17}$$

nazywamy *n-tę resztą we wzorze Taylora.* Ciąg funkcyjny $(R_n)_{n=1}^{\infty}$ nazywamy *ciągiem reszt we wzorze Taylora.*

Uwaga 8.7.1. *Niech $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^∞ oraz $x_0 \in (a, b)$. Ze wzoru Taylora I, II, III (twierdzenia 7.5.4, 7.5.10, 7.5.11) mamy istnienie reszt R_n. Ponadto można przyjąć $R_n(x_0) = 0$ oraz dla $x \neq x_0$ reszta w postaci Lagrange'a ma postać*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - x_0)^n, \qquad \text{gdzie } c \text{ jest pewnym punktem leżącym między } x \text{ i } x_0,$$

reszta w postaci Cauchy'ego ma zaś postać

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}(x-x_0)^n,$$ gdzie c jest pewnym punktem leżącym między x i x_0 oraz $\theta = \frac{c-x_0}{x-x_0}$,

Bezpośrednio z definicji (8.17) dostajemy

Twierdzenie 8.7.2. *Niech $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^∞, $x_0 \in (a,b)$ oraz $(R_n)_{n=1}^\infty$ będzie ciągiem reszt we wzorze Taylora. Wówczas funkcja f rozwija się w otoczeniu $\Omega \subset (a,b)$ punktu x_0 w szereg potęgowy wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in \Omega$ zachodzi $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.*

Definicja . Niech $\alpha \in \mathbb{R}$. Wówczas przyjmujemy

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N} \quad \text{oraz} \quad \binom{\alpha}{0} = 1.$$

Uwaga 8.7.3. *Dla $\alpha \in \mathbb{R}$ oraz $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 0$, symbol $\binom{\alpha}{n}$ jest naturalnym uogólnieniem symbolu Newtona.*

Naturalnym uogólnieniem wzoru dwumiennego Newtona jest następujące

Twierdzenie 8.7.4. *Niech $\alpha \in \mathbb{R}$. Wówczas*

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \qquad \text{dla} \quad x \in (-1,1). \tag{8.18}$$

Dowód. Niech $f(x) = (1+x)^\alpha$, $x \in (-1,1)$. Dla $x = 0$ równość (8.18) jest oczywista. Pokażemy (8.18) dla $x \in (-1,1) \setminus \{0\}$.

Jeśli $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\alpha \geqslant 0$, to teza wynika ze wzoru dwumiennego Newtona, gdyż wtedy $\binom{\alpha}{n} = 0$ dla $n > \alpha$. Załóżmy więc, że $\alpha \in \mathbb{R}$ nie jest liczbą całkowitę nieujemną. Wtedy $\binom{\alpha}{n} \neq 0$ dla $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 0$.

Stosując kryterium d'Alemberta zbieżności szeregów dostajemy, że szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} n x^n$ jest zbieżny dla $x \in (-1,1)$. Zatem z warunku koniecznego zbieżności szeregów mamy

$$\lim_{n\to\infty} \binom{\alpha}{n} n x^n = 0 \qquad \text{dla} \quad x \in (-1,1). \tag{8.19}$$

Indukcyjnie pokazujemy, że dla $x \in (-1,1)$ mamy

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

więc na mocy wzoru Taylora III 7.5.11 dla $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{\alpha}{k} x^k + R_n(x) \qquad \text{dla} \quad x \in (-1,1) \setminus \{0\}, \tag{8.20}$$

gdzie R_n jest resztą w postaci Cauchy'ego. Weźmy dowolny $x \in (-1,1) \setminus \{0\}$. Wówczas dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje $c_n \in \mathbb{R}$ leżący między x i 0, że kładąc

$$\theta_n = \frac{c_n}{x},$$

mamy $0 < \theta_n < 1$ oraz

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c_n)(1-\theta_n)^{n-1}}{(n-1)!}x^n = \binom{\alpha}{n} n x^n (1-\theta_n)^{n-1}(1+c_n)^{\alpha-n}. \tag{8.21}$$

Jeśli $x \in (0,1)$, to $c_n \in (0,1)$, więc $1 + c_n > 1$ i dla $n \geqslant \alpha$ mamy $0 < (1+c_n)^{\alpha-n} \leqslant 1$. Ponadto $0 < (1-\theta_n)^{n-1} \leqslant 1$, więc

$$0 < (1-\theta_n)^{n-1}(1+c_n)^{\alpha-n} \leqslant 1 \qquad \text{dla} \qquad n \geqslant \alpha.$$

Zatem wobec (8.19) mamy $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Stąd i z (8.20) dostajemy (8.18) dla $x \in (0,1)$.

Załóżmy, że $x \in (-1,0)$. Ponieważ $x < c_n < 0$, więc $0 < \frac{1-\theta_n}{1+c_n} \leqslant 1$, zatem

$$|(1-\theta_n)^{n-1}(1+c_n)^{\alpha-n}| = \left(\frac{1-\theta_n}{1+c_n}\right)^{n-1}(1+c_n)^{\alpha-1} \leqslant (1+c_n)^{\alpha-1}.$$

W konsekwencji

$$|(1-\theta_n)^{n-1}(1+c_n)^{\alpha-n}| \leqslant 1, \qquad \text{gdy} \quad \alpha \geqslant 1,$$
$$|(1-\theta_n)^{n-1}(1+c_n)^{\alpha-n}| \leqslant (1+x)^{\alpha-1}, \qquad \text{gdy} \quad \alpha \leqslant 1.$$

Reasumując z (8.21) i (8.19) dostajemy $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Stąd i z (8.20) dostajemy (8.18) dla $x \in (-1,0)$. To kończy dowód. □

8.8 Twierdzenie Weierstrassa o aproksymacji

Każda funkcja analityczna jest lokalnie sumą szeregu potęgowego, więc lokalnie jest granicą jednostajnie zbieżnego ciągu wielomianów. W punkcie tym udowodnimy twierdzenie Weierstrassa mówiące o tym, że każda funkcja ciągła w przedziale domkniętym jest granicą jednostajnie zbieżnego ciągu wielomianów. Jest to uogólnienie wspomnianego faktu. Jednak pojęcie analityczności niesie znacznie większe konsekwencje niż zapowiadane twierdzenie Weierstrassa.

Twierdzenie 8.8.1. (nierówność Schwarza). *Jeśli* $a_0, ..., a_n$, $b_0, ..., b_n \in \mathbb{R}$, *to*

$$\left|\sum_{i=0}^{n} a_i b_i\right|^2 \leqslant \sum_{i=0}^{n} a_i^2 \sum_{i=0}^{n} b_i^2. \tag{8.22}$$

Dowód. Niech $A = \sum_{i=0}^{n} a_i^2$, $B = \sum_{i=0}^{n} b_i^2$, $C = \sum_{i=0}^{n} a_i b_i$. Wówczas mamy

$$\sum_{i=0}^{n}(Ba_i - Cb_i)^2 = B^2\sum_{i=0}^{n} a_i^2 - 2BC\sum_{i=0}^{n} a_i b_i + C^2\sum_{i=0}^{n} b_i^2 = B^2A - BC^2 = B(AB - C^2).$$

Ponieważ pierwsza suma w powyższym wzorze jest nieujemna, więc $B(AB - C^2) \geqslant 0$. Jeśli $B = 0$, to $b_0 = \cdots = b_n = 0$, więc $C = 0$ i teza jest oczywista. Jeśli zaś $B > 0$, to $AB - C^2 \geqslant 0$, co daje (8.22) i kończy dowód. □

Lemat 8.8.2. *Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $x \in [0,1]$ zachodzi nierówność*

$$\sqrt{n}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left|\frac{i}{n}-x\right|x^i(1-x)^{n-i} \leqslant \frac{1}{2}. \tag{8.23}$$

Dowód. Ze wzoru dwumiennego Newtona mamy

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i} = 1 \qquad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R} \tag{8.24}$$

oraz

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}e^{iy}(1-x)^{n-i} = (e^y+(1-x))^n \qquad \text{dla} \quad x, y \in \mathbb{R}. \tag{8.25}$$

Różniczkując dwukrotnie względem y równość (8.25), otrzymujemy

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}ie^{iy}(1-x)^{n-i} &= ne^y(e^y+(1-x))^{n-1},\\ \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}i^2e^{iy}(1-x)^{n-i} &= ne^y(e^y+(1-x))^{n-1}+n(n-1)e^{2y}(e^y+(1-x))^{n-2}.\end{aligned}$$

Stąd dla $x = e^y$, a więc dla $x > 0$ mamy

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}ix^i(1-x)^{n-i} = nx, \quad \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}i^2x^i(1-x)^{n-i} = nx+n(n-1)x^2. \tag{8.26}$$

Powyższe równości zachodzą również dla $x = 0$. Z (8.26) i (8.24) dla $x \geqslant 0$ dostajemy

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(i-nx)^2x^i(1-x)^{n-i}\\ &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}i^2x^i(1-x)^{n-i} - 2nx\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}ix^i(1-x)^{n-i} + n^2x^2\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}\\ &= nx+n(n-1)x^2-2nxnx+n^2x^2 = nx(1-x).\end{aligned}$$

Dzieląc tę równość przez n^2 dostajemy

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(\frac{i}{n}-x)^2x^i(1-x)^{n-i} = \frac{1}{n}x(1-x).$$

Stąd i z nierówności $x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$ dla $x \in [0,1]$, mamy

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(\frac{i}{n}-x\right)^2x^i(1-x)^{n-i} \leqslant \frac{1}{4n}, \qquad x \in [0,1]. \tag{8.27}$$

Oznaczając

$$a_i = \left|\frac{i}{n} - x\right| \sqrt{\binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}}, \qquad b_i = \sqrt{\binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}}, \qquad i = 0, ..., n,$$

z nierówności Schwarza 8.8.1 dostajemy

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left|\frac{i}{n} - x\right| x^i (1-x)^{n-i} \leqslant \sqrt{\sum_{i=0}^{n} \left(\frac{i}{n} - x\right)^2 x^i (1-x)^{n-i}} \sqrt{\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}}.$$

Stąd, z (8.24) i (8.27) wynika (8.23). To kończy dowód. □

Definicja modułu ciągłości funkcji. Niech f będzie funkcją ciągłą w przedziale $[a, b]$. *Modułem ciągłości funkcji f na przedziale* $[a, b]$ nazywamy funkcję $\omega : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ określoną wzorem:

$$\omega(\delta) = \sup\{|f(x') - f(x'')| : x', x'' \in [a, b],\ |x' - x''| < \delta\}, \qquad \text{gdzie} \quad \delta > 0.$$

Uwaga 8.8.3. *Definicja modułu ciągłości jest poprawna, bowiem funkcja ciągła na zbiorze zwartym jest ograniczona.*

Własność 8.8.4. *Niech f będzie funkcją ciągłą w przedziale $[a, b]$ oraz ω będzie modułem ciągłości funkcji f na przedziale $[a, b]$. Wówczas $\lim_{\delta \to 0} \omega(\delta) = 0$.*

Dowód. Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. Ponieważ f jest funkcją ciągłą na zbiorze zwartym $[a, b]$, więc jest to funkcja jednostajnie ciągła, a więc istnieje $\delta_0 > 0$ taka, że dla każdego $0 < \delta < \delta_0$ i każdych $x', x'' \in [a, b]$ takich, że $|x' - x''| < \delta$ zachodzi $|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}$. Zatem, z definicji modułu ciągłości mamy $|\omega(\delta) - 0| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ dla $0 < \delta < \delta_0$. To daje tezę. □

Lemat 8.8.5. *Niech f będzie funkcją ciągłą w przedziale $[a, b]$ oraz ω będzie modułem ciągłości funkcji f na przedziale $[a, b]$. Wówczas dla każdych $x_1, x_2 \in [a, b]$ mamy*

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant (|x_1 - x_2|\frac{1}{\delta} + 1)\omega(\delta) \qquad \text{dla każdego} \quad \delta > 0. \tag{8.28}$$

Dowód. Weźmy dowolne $x_1, x_2 \in [a, b]$. Jeśli $x_1 = x_2$, to (8.28) jest oczywiste. Zatem, bez zmniejszenia ogólności możemy założyć, że $x_1 < x_2$. Weźmy dowolne $\delta > 0$ i niech $n \in \mathbb{N}$ będzie takie, że

$$(x_2 - x_1)\frac{1}{\delta} < n \leqslant (x_2 - x_1)\frac{1}{\delta} + 1. \tag{8.29}$$

Oczywiście taka liczba n istnieje. Połóżmy $a_i = x_1 + \frac{i}{n}(x_2 - x_1)$ dla $i = 0, ..., n$. Wówczas $x_1 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = x_2$ i z (8.29) mamy $|a_i - a_{i+1}| < \delta$, więc $|f(a_i) - f(a_{i+1})| \leqslant \omega(\delta)$ dla $i = 0, ..., n-1$. Zatem,

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= |(f(a_0) - f(a_1)) + (f(a_1) - f(a_2)) + \cdots + (f(a_{n-1}) - f(a_n))| \\ &\leqslant |f(a_0) - f(a_1)| + |f(a_1) - f(a_2)| + \cdots + |f(a_{n-1}) - f(a_n)| \leqslant n\omega(\delta). \end{aligned}$$

Stąd i z (8.29) dostajemy $|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant (|x_1 - x_2|\frac{1}{\delta} + 1)\omega(\delta)$, czyli mamy (8.28). □

Definicja wielomianów Bernsteina. Niech f będzie funkcją ciągłą w przedziale $[0, 1]$. Wielomian

$$B_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f\left(\frac{i}{n}\right) x^i (1-x)^{n-i}$$

nazywamy *n-tym wielomianem Bernsteina* dla funkcji f (2).

Twierdzenie 8.8.6. *Niech f będzie funkcją ciągłą w przedziale $[0, 1]$. Wówczas ciąg $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ wielomianów Bernsteina dla funkcji f jest jednostajnie zbieżny do funkcji f w przedziale $[0, 1]$. Ponadto*

$$|B_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{3}{2}\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \qquad \text{dla} \quad x \in [0, 1], \tag{8.30}$$

gdzie ω jest modułem ciągłości funkcji f na przedziale $[0, 1]$.

Dowód. Wobec własności 8.8.4 i 8.2.8, wystarczy wykazać nierówność (8.30). Ze wzoru dwumiennego Newtona mamy

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} = 1 \qquad \text{dla} \quad x \in [0, 1].$$

Zatem z lematu 8.8.5 dla $x \in [0, 1]$, dostajemy

$$\begin{aligned} |B_n(x) - f(x)| &= \left| \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left[f\left(\tfrac{i}{n}\right) - f(x) \right] x^i (1-x)^{n-i} \right| \\ &\leqslant \omega\left(\tfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \left[1 + \sqrt{n} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left| \tfrac{i}{n} - x \right| x^i (1-x)^{n-i} \right]. \end{aligned}$$

Ponieważ z lematu 8.8.2 mamy

$$\sqrt{n} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left| \frac{i}{n} - x \right| x^i (1-x)^{n-i} \leqslant \frac{1}{2} \qquad \text{dla} \quad x \in [0, 1],$$

więc dostajemy (8.30). □

Udowodnimy teraz tytułowe twierdzenie tego punktu

Twierdzenie 8.8.7. (Weierstrassa). *Każda funkcja f ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$ jest granicą pewnego jednostajnie zbieżnego w $[a, b]$ ciągu wielomianów.*

Dowód. Niech f będzie funkcją ciągłą w przedziale domkniętym $[a, b]$. Weźmy funkcję $\varphi : [0, 1] \to [a, b]$ określoną wzorem

$$\varphi(t) = a + t(b - a) \qquad \text{dla} \qquad t \in [0, 1].$$

[2] Przyjmujemy tutaj $0^0 = 1$

Łatwo sprawdzamy, że φ jest homeomorfizmem i funkcją odwrotną do φ jest wielomian

$$\varphi^{-1}(x) = \frac{1}{b-a}x - \frac{a}{b-a}, \qquad x \in [a,b].$$

Zatem $f \circ \varphi$ jest funkcją ciągłą w przedziale $[0,1]$ i z twierdzenia 8.8.6 istnieje ciąg wielomianów $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ zbieżny jednostajnie w przedziale $[0,1]$ do funkcji $f \circ \varphi$. Oznaczmy

$$M_n = \sup\{|B_n(t) - f \circ \varphi(t)| : t \in [0,1]\} \qquad \text{dla} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Wówczas z własności 8.2.8 mamy

$$\lim_{n\to\infty} M_n = 0. \tag{8.31}$$

Funkcje

$$W_n(x) = B_n\left(\frac{1}{b-a}x - \frac{a}{b-a}\right), \qquad x \in \mathbb{R},$$

są wielomianami, ponadto $W_n(\varphi(t)) = B_n(t)$ dla $t \in [0,1]$. Zatem

$$\sup\{|W_n(x) - f(x)| : x \in [a,b]\} = \sup\{|B_n(t) - f \circ \varphi(t)| : t \in [0,1]\} = M_n \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Stąd, z (8.31) i własności 8.2.8 dostajemy, że ciąg wielomianów $\{W_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest jednostajnie zbieżny w $[a,b]$ do funkcji f. To kończy dowód. □

Uwaga 8.8.8. *Można pokazać, że jeśli funkcja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ jest klasy C^p, to dla ciągu i-tych pochodnych, $i \leqslant p$, wielomianów Bernsteina, mamy $B_n^{(i)} \rightrightarrows f^{(i)}$ w $[0,1]$.*

8.9 Twierdzenie Ascoliego-Arzeli

Definicja ograniczonej rodziny funkcji. Niech $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$ oraz niech $\mathcal{R}$ będzie rodziną funkcji rzeczywistych określonych na zbiorze X.

Mówimy, że *rodzina $\mathcal{R}$ jest ograniczona w punkcie* $x_0 \in X$, gdy istnieje $M \in \mathbb{R}$, że dla każdej funkcji $f \in \mathcal{R}$ zachodzi $|f(x_0)| \leqslant M$.

Mówimy, że *rodzina $\mathcal{R}$ jest ograniczona*, gdy istnieje $M \in \mathbb{R}$, że dla każdej funkcji $f \in \mathcal{R}$ oraz każdego $x \in X$ zachodzi $|f(x)| \leqslant M$.

Definicja jednakowo ciągłej rodziny funkcji. Niech $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$ oraz niech $\mathcal{R}$ będzie rodziną funkcji rzeczywistych określonych na zbiorze X. Mówimy, że *rodzina $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^X$ jest jednakowo ciągła*, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$, że dla każdej funkcji $f \in \mathcal{R}$ oraz każdych $x', x'' \in X$ takich, że $|x' - x''| < \delta$ zachodzi $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Udowodnimy twierdzenie Ascoliego-Arzeli. Zacznijmy od dwóch lematów.

Lemat 8.9.1. *Niech $\mathcal{R}$ będzie rodziną funkcji rzeczywistych określonych na przedziale ograniczonym P o końcach $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Jeśli $\mathcal{R}$ jest rodziną jednakowo ciągłą, to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieją $l \in \mathbb{N}$, $l \geqslant 2$, liczby $a_0, ..., a_l \in \mathbb{R}$, że $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_l = b$ oraz dla każdej funkcji $f \in \mathcal{R}$ i*

$$\text{dla każdego} \quad x \in P, \quad \text{jeśli} \quad a_{i-1} \leqslant x \leqslant a_{i+1}, \quad \text{to} \quad |f(x) - f(a_i)| < \varepsilon. \tag{8.32}$$

Dowód. Weźmy dowolny $\varepsilon > 0$. Ponieważ $\mathcal{R}$ jest rodziną jednakowo ciągłą, więc istnieje $\delta > 0$, że dla każdej funkcji $f \in \mathcal{R}$ oraz

$$\text{dla każdych} \quad x', x'' \in P \quad \text{takich, że} \quad |x' - x''| < \delta \quad \text{zachodzi} \quad |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Niech, wobec zasady Archimedesa, $l \in \mathbb{N}$ będzie taką liczbą, że

$$\frac{b-a}{l} < \delta.$$

Połóżmy

$$a_i = a + \frac{(b-a)i}{l}, \qquad i = 0, ..., l.$$

Wtedy $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_l = b$ oraz

$$|a_{i-1} - a_i| < \delta \qquad \text{dla} \qquad i = 1, ..., l.$$

Zatem dla każdego $x \in P$, takiego, że $a_{i-1} \leqslant x \leqslant a_{i+1}$ mamy $|x - a_i| < \delta$ i w konsekwencji $|f(x) - f(a_i)| < \varepsilon$. Reasumując mamy (8.32). □

Lemat 8.9.2. *Niech $\mathcal{R}$ będzie rodziną funkcji rzeczywistych określonych na przedziale ograniczonym P. Jeśli $\mathcal{R}$ jest rodziną jednakowo ciągłą i ograniczoną w pewnym punkcie x_0 przedziału P, to $\mathcal{R}$ jest rodziną ograniczoną.*

Dowód. Z założenia, że rodzina $\mathcal{R}$ jest ograniczona w punkcie x_0, istnieje $M \in \mathbb{R}$, że

(8.33) $$\text{dla każdej funkcji} \quad f \in \mathcal{R} \quad \text{zachodzi} \quad |f(x_0)| \leqslant M.$$

Weźmy $\varepsilon = \frac{1}{2}$ i niech $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ będą końcami przedziału P. W myśl lematu 8.9.1 istnieje $l \in \mathbb{N}$, $l \geqslant 2$, liczby $a_0, ..., a_l \in \mathbb{R}$, że $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_l = b$ oraz

(8.34) $$\text{dla każdego} \quad x \in P, \quad \text{jeśli} \quad a_{i-1} \leqslant x \leqslant a_{i+1}, \quad \text{to} \quad |f(x) - f(a_i)| < \frac{1}{2}.$$

Weźmy dowolną funkcję $f \in \mathcal{R}$. Z (8.34) dostajemy, że

(8.35) $$|f(a_i)| \leqslant M + \frac{l}{2} \qquad \text{dla} \qquad i = 0, ..., l.$$

Istotnie, z wyboru liczb $a_0, ..., a_n$ mamy, że istnieje $i_0 \in \{1, ..., l-1\}$, że $a_{i_0-1} \leqslant x_0 \leqslant a_{i_0+1}$. Jeśli $i \geqslant i_0$, to z (8.34) i (8.33) dostajemy

$$|f(a_i)| \leqslant |f(a_i) - f(a_{i-1})| + \cdots + |f(a_{i_0}) - f(x_0)| + |f(x_0)| \leqslant \frac{l}{2} + M.$$

jeśli $i < i_0$, to analogicznie dostajemy

$$|f(a_i)| \leqslant |f(a_i) - f(a_{i+1})| + \cdots + |f(a_{i_0}) - f(x_0)| + |f(x_0)| \leqslant \frac{l}{2} + M.$$

Zatem udowodniliśmy (8.35). Weźmy dowolny $x \in P$. Wówczas istnieje $i \in \{1, ..., l-1\}$, że $a_{i-1} \leqslant x \leqslant a_i$. Wówczas z (8.34) (8.35) wynika, że

$$|f(x)| \leqslant |f(x) - f(a_i)| + |f(a_i)| \leqslant \frac{1}{2} + M + \frac{l}{2}.$$

To daje tezę. □

Twierdzenie 8.9.3. (Ascoliego-Arzeli). *Niech $\mathcal{R}$ będzie rodziną funkcji rzeczywistych określonych na przedziale ograniczonym P. Jeśli $\mathcal{R}$ jest rodziną jednakowo ciągłą i ograniczoną w pewnym punkcie $x_0 \in P$, to z każdego ciągu $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{R}$ tej rodziny można wybrać podciąg jednostajnie zbieżny.*

Dowód. Ponieważ P jest przedziałem ograniczonym i $\mathcal{R}$ rodziną jednakowo ciągłą i ograniczoną w punkcie $x_0 \in P$, więc z lematu 8.9.2, rodzina $\mathcal{R}$ jest ograniczona.

Niech $E = P \cap \mathbb{Q}$. E jest zbiorem gęstym w P i przeliczalnym. Istnieje więc bijekcja $\sigma : \mathbb{N} \to E$. Oznaczając $e_m = \sigma(m)$ dla $m \in \mathbb{N}$, mamy $E = \{e_m : m \in \mathbb{N}\}$.

Weźmy dowolny ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{R}$.

Pokażemy, że istnieje rodzina podciągów $(f_{n_k,j})_{k=1}^{\infty}$, $j \in \mathbb{N}$, ciągu $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ takich, że

$$\text{(8.36)} \qquad \text{każdy ciąg} \quad (f_{n_k,j})_{k=1}^{\infty} \quad \text{jest podciągiem ciągu} \quad (f_{n_k,j-1})_{k=1}^{\infty} \quad \text{dla} \quad j > 1,$$

$$\text{(8.37)} \qquad \text{każdy ciąg} \quad (f_{n_k,j}(e_m))_{k=1}^{\infty} \quad \text{jest zbieżny dla} \quad j \geqslant m.$$

Istotnie, ponieważ $(f_n(e_1))_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem ograniczonym, więc z twierdzenia Bolzano-Weierstrassa 4.6.4 istnieje podciąg $(f_{n_k,1})_{k=1}^{\infty}$ ciągu $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ taki, że ciąg $(f_{n_k,1}(e_1))_{k=1}^{\infty}$ jest zbieżny. Analogicznie istnieje podciąg $(f_{n_k,2})_{k=1}^{\infty}$ ciągu $(f_{n_k,1})_{k=1}^{\infty}$ taki, że ciąg $(f_{n_k,2}(e_2))_{k=1}^{\infty}$ jest zbieżny. Wtedy również ciąg $(f_{n_k,2}(e_1))_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny. Postępujęc dalej indukcyjnie, dostajemy (8.36) i (8.37) ([3]).

Weźmy podciąg $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ ciągu $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ określony wzorem $f_{n_k} = f_{n_k,k}$ dla $k \in \mathbb{N}$. Pokażemy, że podciąg $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ jest jednostajnie zbieżny. Wystarczy pokazać, że podciąg ten spełnia warunek Cauchy'ego zbieżności jednostajnej ciągu funkcyjnego (patrz twierdzenie 8.2.9). Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$ i niech a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$ będą końcami przedziału P. Z lematu 8.9.1 istnieje $l \in \mathbb{N}$, $l \geqslant 2$ oraz liczby $a_0, ..., a_l \in \mathbb{R}$ takie, że $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_l = b$ oraz

$$\text{dla każdego} \quad x \in P, \quad \text{jeśli} \quad a_{i-1} \leqslant x \leqslant a_{i+1}, \quad \text{to} \quad |f(x) - f(a_i)| < \frac{\varepsilon}{6}$$

dla wszystkich $f \in \mathcal{R}$. Zatem dla każdej funkcji $f \in \mathcal{R}$ oraz każdych $x', x'' \in P$,

$$\text{(8.38)} \qquad \text{jeśli} \quad x', x'' \in [a_{i-1}, a_{i+1}], \quad \text{to} \quad |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Zbiór E jest gęsty w P, więc w każdym przedziale (a_{i-1}, a_{i+1}), gdzie $i \in \{1, ..., l-1\}$ istnieje element b_i zbioru E. W konsekwencji ciąg $(f_{n_k}(b_i))_{k=1}^{\infty}$ jest zbieżny, więc z własności 4.7.2 jest ciągiem Cauchy'ego. Zatem istnieje $N \in \mathbb{N}$, że

$$\text{(8.39)} \qquad |f_{n_p}(b_i) - f_{n_r}(b_i)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{dla} \quad p, r \in \mathbb{N}, \quad p, r \geqslant N \quad \text{oraz} \quad i = 1, ..., l-1.$$

Weźmy dowolny $x \in P$. Wówczas istnieje $i \in \{1, ..., l-1\}$, że $a_{i-1} \leqslant x \leqslant a_{i+1}$, zatem z (8.39) i (8.38) dla $p, r \geqslant N$ mamy

$$|f_{n_p}(x) - f_{n_r}(x)| \leqslant |f_{n_p}(x) - f_{n_p}(b_i)| + |f_{n_p}(b_i) - f_{n_r}(b_i)| + |f_{n_r}(b_i) - f_{n_r}(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

To daje tezę. □

[3] Zakładając, że istnieje podciąg $(f_{n_k,j})_{k=1}^{\infty}$ ciągu $(f_{n_k,j-1})_{k=1}^{\infty}$ zbieżny w punktach $e_1, ..., e_j$, wobec ograniczoności ciągu $(f_{n_k,j})_{k=1}^{\infty}$, znajdziemy podciąg $(f_{n_k,j+1})_{k=1}^{\infty}$ ciągu $(f_{n_k,j})_{k=1}^{\infty}$, zbieżny w punktach $e_1, ..., e_{j+1}$. W ten sposób określimy rodzinę ciągów $(f_{n_k,j})_{k=1}^{\infty}$ dla $j \in \mathbb{N}$ takich, że każdy następny jest podciągiem poprzedniego oraz każdy ciąg $(f_{n_k,j}(e_m))_{k=1}^{\infty}$ dla $j \geqslant m$ jest zbieżny.

Uwaga 8.9.4. *W twierdzeniu Ascoliego-Arzeli 8.9.3 założenia o ograniczoności przedziału P nie można opuścić. Istotnie, ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ określony wzorami $f_n(x) = 0$ dla $x \leqslant n$, $f_n(x) = x - n$ dla $x \in (n, n+1)$ oraz $f_n(x) = 1$ dla $x \geqslant n$ jest rodziną ograniczoną i jednakowo ciągłą (dla każdego $\varepsilon > 0$ wystarczy przyjąć $\delta = \varepsilon$). Ponadto $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ dla $x \in \mathbb{R}$ oraz $M_n = \sup\{|f_n(x) - 0| : x \in \mathbb{R}\} = 1$. Zatem wobec własności 8.2.8 ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ nie jest jednostajnie zbieżny w $\mathbb{R}$.*

Wprowadza się również pojęcie jednakowej ciągłości w punkcie rodziny funkcji.

Definicja jednakowo ciągłej w punkcie rodziny funkcji. Niech $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$ oraz niech $\mathcal{R}$ będzie rodziną funkcji rzeczywistych określonych na zbiorze X. Mówimy, że *rodzina $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^X$ jest jednakowo ciągła w punkcie $x_0 \in X$*, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$, że dla każdej funkcji $f \in \mathcal{R}$ oraz każdego $x \in X$ takiego, że $|x - x_0| < \delta$ zachodzi $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Uwaga 8.9.5. *Można pokazać, następującą ogólniejszą wersję twierdzenia Ascoliego-Arzeli:*

(Ascoliego-Arzeli). *Niech $\mathcal{R}$ będzie rodziną funkcji rzeczywistych określonych na zbiorze zwartym $X \subset \mathbb{R}$. Wówczas z każdego ciągu $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{R}$ tej rodziny można wybrać podciąg jednostajnie zbieżny, wtedy i tylko wtedy, gdy rodzina ta jest jednakowo ciągłą w każdym punkcie zbioru X i jest ograniczona w każdym punkcie zbioru X.*