Wstęp do geometrii różniczkowej

Paweł G. Walczak

1 Wstęp

Przedmiotem badań geometrii różniczkowej są krzywe, powierzchnie i ich wielowymiarowe uogólnienia zwane hiperpowierzchniami i rozmaitościami. Metody geometrii różniczkowej oparte są na rachunku różniczkowym: krzywe (powierzchnie, hiperpowierzchnie itp.) opisuje się przy pomocy funkcji różniczkowalnych (tj. gładkich, jednej i wielu zmiennych), a ich własności geometryczne bada się przy pomocy pochodnych (pierwszych, drugich i wyższych) zwyczajnych i cząstkowych tych funkcji. Wykład oparty będzie na wybranych fragmentach książki [**Op**], a słuchaczom proponujemy również lekturę odpowiednich framentów jednej (lub kilku) z pozostałych książek wymienionych w Bibliografii.

Spis treści

1 Wstęp **1**

2 Geometria krzywych **2**
2.1 Pojęcie krzywej 2
2.2 Długość krzywej regularnej, parametryzacja naturalna 4
2.3 Krzywizna i skręcenie, trójścian Freneta 6

3 Powierzchnie **9**
3.1 Definicja i przykłady 9
3.2 Przestrzeń styczna, wektor normalny, orientacja 11
3.3 Pierwsza forma podstawowa 13
3.4 Koneksja Levi-Civita i współczynniki Christoffela 14
3.5 Przeniesienie równoległe i geodezyjne 17

3.6 Druga forma podstawowa 20
3.7 Krzywizna normalna 24
3.8 Odwzorowanie i krzywizna Gaussa 25
3.9 Wzory Codazziego i podstawowe twierdzenie teorii powierzchni 29

2 Geometria krzywych

2.1 Pojęcie krzywej

Intuicyjnie, przez krzywą rozumie się jednowymiarowy podzbiór pewnej przestrzeni (metrycznej, topologicznej, płaszczyzny, trójwymiarowej lub n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej itp.). W fizyce, krzywa to trajektoria ruchu punktu materialnego. Tu rozważać będziemy przede wszystkim krzywe położone w przestrzeni trójwymiarowej lub na płaszczyźnie. Ponieważ niektóre pojęcia i fakty przenoszą się "automatycznie" na przypadek przestrzeni o dowolnym wymiarze przyjmiemy następującą definicję.

Definicja 1 *Krzywą* w n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ nazywamy ciągłe przekształcenie γ przedziału (otwartego lub domkniętego, właściwego lub nie) $J \subset \mathbb{R}$ w $\mathbb{R}^n$.

Ciągłość przekształcenia $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ jest równoważna ciągłości wszystkich jego *współrzędnych* γ_j, $j = 1, \dots, n$.

Ponieważ trajektoria opisywana przez poruszający się punkt nie zależy od prędkości ruchu przyjmuje się często, że dwie krzywe $\gamma : J \to \mathbb{R}^n$ i $\delta : I \to \mathbb{R}^n$ są *równoważne*, gdy istnieje funkcja $f : J \to I$ ciągła, rosnąca i taka, że $f(J) = I$ oraz $\delta = \gamma \circ f$. Oczywiście, tak określona relacja równoważności jest zwrotna, symetryczna i przechodnia, można więc mówić o jej klasach abstrakcji. Każda taka klasa jest wyznaczone jednoznacznie przez dowolnego swego reprezentanta, a każda krzywa (w sensie Def. 1) należy do pewnej klasy abstrakcji. Dlatego można też przyjąć inne określenie krzywej:

Definicja 2 *Krzywą* w $\mathbb{R}^n$ nazywamy klasę abstrakcji (względem relacji opisanej powyżej) dowolnego ciągłego przekształcenia γ pewnego przedziału $J \subset \mathbb{R}$ w $\mathbb{R}^n$. Wtedy, każde przekształcenie reprezentujące tę klasę nazywamy *parametryzacją* krzywej przez nie reprezentowanej. Jeżeli $J = [a, b]$ jest przedziałem domkniętym i $\gamma(a) = \gamma(b)$, to krzywą o parametryzacji γ nazywamy *zamkniętą.* (Oczywiście, określenie to jest poprawne, to czy krzywa jest zamknięta czy nie nie zależy od wyboru jej parametryzacji.)

Dobrze znanymi przykładami krzywych są m. in. prosta ($\gamma(t) = x_0 + ta$, $t \in \mathbb{R}$, gdzie $x_0 \in \mathbb{R}$ jest ustalonym punktem zaś $a \in \mathbb{R}^n$ ustalonym elementem zwanym czasem *wektorem kierunkowym* prostej), okrąg ($\gamma(t) = (x_0 + r\cos t, y_0 + r\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, gdzie $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$ jest jego *środkiem*, a $r > 0$ - jego promieniem) oraz *krzywe stożkowe*: *elipsa* o parametryzacji $\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t)$, *hiperbola* o parametryzacji $\gamma(t) = (a\cosh t, b\sinh t)$ i parabola o parametryzacji $\gamma(t) = (t^2, t)$, $t \in \mathbb{R}$. Krzywą płaską (o parametryzacji $\gamma(t) = (t, f(t))$) jest też wykres dowolnej funkcji ciągłej $f : J \to \mathbb{R}$. Niektóre krzywe (np. okrąg) można opisać równaniem postaci $F(x, y) = 0$, gdzie F jest funkcją ciągłą dwu zmiennych rzeczywistych; w przypadku okręgu o środku (x_0, y_0) i promieniu r równaniem takim jest - jak dobrze wiemy - $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$. Z twierdzenia o funkcji uwikłanej (por. wykład analizy matematycznej) wynika, że jeśli F jest funkcją różniczkowalną klasy C^1, to równanie $F(x, y) = 0$ opisuje pewną krzywą przechodzącą przez taki punkt (x_0, y_0) dziedziny funkcji F w którym $F(x_0, y_0) = 0$ i wektor

$$dF(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$$

jest niezerowy.

Krzywe w sensie powyższej definicji mogą być bardzo skomplikowane i trudne do zbadania. Np., Peano (1890) wykazał istnienie krzywej przechodzącej przez wszystkie punkty pewnego obszaru płaszczyzny (np. kwadratu). Dlatego ograniczymy się tu do badania krzywych znacznie węższej klasy:

Definicja 3 Krzywą $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) : J \to \mathbb{R}^n$ nazywamy *różniczkowalną* lub *gładką* (klasy C^k, $k = 1, 2, \ldots, \infty$), gdy wszystkie funkcje γ_j, $j = 1, \ldots, n$, są k-krotnie różniczkowalne, a ich k-te pochodne $\gamma^{(k)}$ są ciągłe. Wektor $\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \ldots \gamma_n'(t))$ nazywamy *stycznym* do krzywej γ w chwili $t \in J$. Krzywą γ nazywamy *regularną*, gdy jest gładka klasy (przynajmniej) C^1 i $\gamma'(t) \neq 0$ dla dowolnego $t \in J$. Prostą $\mathbb{R} \ni s \mapsto \gamma(t) + s \cdot \gamma'(t)$ nazywamy *styczną* do krzywej regularnej γ w chwili t (lub w punkcie $\gamma(t)$).

Uwaga 1 Jeśli J jest przedziałem (jedno- lub obustronnie) domkniętym i a jest jednym z jego końców, to przez $\gamma_j'(a)$ rozumiemy odpowiednią pochodną jednostronną funkcji γ_j.

Wspomniane powyżej krzywe: prosta, okrąg i krzywe stożkowe są różniczkowalne klasy C^∞ i regularne. Nie wszystkie krzywe opisujące nawet proste zjawiska fizyczne są regularne:

Przykład 1 Przypuśćmy, że koło o promieniu r toczy się (bez poślizgu) po prostej doń stycznej. Dowolny punkt okręgu tego koła porusza się po krzywej $\gamma(t) = (r(t - \sin t), r(1 - \cos t))$ zwanej *cykloidą*. Cykloida jest oczywiście różniczkowalna klasy C^∞ ale nie jest regularna: $\gamma'(t) = 0$ gdy t jest całkowitą wielokrotmością liczby 2π. Krzywą $\gamma(t) = (rt - a\sin t, r - a\sin t)$ nazywa się (dlaczego ?) *cykloidą wydłużoną* (odp., *skróconą*), gdy $r < a$ (odp., $r > a$). Słuchacz bez trudu zbada (!) różniczkowalność i regularność tych krzywych.

Przykład 2 Prostym przykładem krzywej przestrzennej jest *linia śrubowa* $\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, $t \in \mathbb{R}$, gdzie a *i* b są stałymi dodatnimi. Krzywa ta jest położona na powierzchni walca, którego osią jest trzecia oś układu współrzędnych, a promień wynosi a; liczbę b nazywa się *skokiem* linii śrubowj γ.

2.2 Długość krzywej regularnej, parametryzacja naturalna

Jeżeli $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ (lub $\gamma : [a, b] \to X$, gdzie X jest przestrzenią metryczną) jest dowolną krzywą, to jej długość $L(\gamma)$ określamy jako kres górny długości łamanych wpisanych w γ; dokładniej,

$$L(\gamma) = \sup\{\sum_{j=1}^{m} d(\gamma(t_j), \gamma(t_{j+1}); a \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \cdots \leqslant t_m \leqslant t_{m+1} \leqslant b, m \in \mathbb{N}\},$$

gdzie d jest odległością w $\mathbb{R}^n$ (odp. w X).

Definicja 4 Krzywa γ jest *prostowalna*, gdy $L(\gamma) < \infty$.

Bardzo łatwo skonstruować przykłady krzywych nieprostowalnych (np., na płaszczyźnie). Stosując nierówność trójkąta można też sprawdzić, że jeśli krzywa γ jest prostowalna, to

$$L(\gamma) = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} d(\gamma(t_{k,j}, t_{k,j+1}),$$

gdzie $\tau_k = \{t_{k,1}, \ldots, t_{k,k+1}\}$, $k = 1, 2, \ldots$, jest dowolnym normalnym ciągiem podziałów przedziału $[a, b]$ (tzn., $a = t_{k,1} < t_{k,2} < \cdots < t_{k+1} = b$ i średnica

$$\delta_k = \max_j |t_{k,j} - t_{k,j+1}|$$

podziału τ_k dąży do 0, gdy $k \to \infty$.

Jeżeli $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ jest krzywą regularną, to funkcja $\|\gamma'(t)\|$, $t \in [a, b]$, jest funkcją ciągłą, jest więc całkowalna w sensie Riemanna.

Twierdzenie 1 *Dowolna krzywa regularna $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ jest prostowalna oraz*

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt. \tag{2.2.1}$$

Dowód. Z twierdzenia o wartości średniej wynika, że dla dowolnych $s, t \in [a, b]$ $(s < t)$ istnieją liczby $\theta_i \in (s, t)$ takie, że

$$\gamma_i(t) - \gamma_i(s) = (t - s)\gamma_i'(\theta_i),$$

gdzie γ_i, $i = 1, \ldots, n$, są współrzędnymi krzywej γ. Jeśli więc τ_k, $k \in \mathbb{N}$, jest - tak jak powyżej - ciągiem normalnym podziałów przedziału $[a, b]$, to

$$\sum_{j=1}^{k} d(\gamma(t_{k,i}, \gamma(t_{k,i+1}) = \sum_{j=1}^{k} (t_{k,i+1} - t_{k,i}) \cdot \sqrt{\sum_i (\gamma_i')^2(\theta_{k,i,j})}$$

dla pewnych $\theta_{k,i,j} \in (t_{k,j}, t_{k,j+1})$. Łatwo zauważyć, że powyższe sumy przybliżają (z dowolną dokładnością, gdy k jest dostatecznie duże) sumy Riemanna całki w (2.2.1). ■

Jeżeli symbolem $L(t)$ oznaczymy długość krzywej $\gamma|[a, t]$, to otrzymamy funkcję różniczkowalną $L : [a, b] \to \mathbb{R}$ określoną wzorem

$$L(t) = \int_a^t \|\gamma'(s)\| ds,$$

której pochodna w dowolnym punkcie t wynosi $L'(t) = \|\gamma'(t)\|$ i jest dodatnia. Funkcja L jest więc ściśle rosnąca i $L([a, b]) = [0, L(\gamma)]$. Niech $\phi = L^{-1}$ będzie funkcją doń odwrotną. Złożenie $\gamma \circ \phi$ przedstawia tę samą krzywą, przy czym

$$(\gamma \circ \phi)'(s) = \frac{1}{L'(\phi(s))} \cdot (\gamma'(\phi(s))$$

dla wszystkich $s \in [0, L(\gamma)]$. Zatem,

$$\|(\gamma \circ \phi(s)\| = 1$$

dla dowolnego s.

Definicja 5 Parametryzację γ krzywej regularnej nazywamy *naturalną*, gdy $\|\gamma'(t)\| = 1$ dla wszystkich t.

Z powyższego rozumowania wynika co następuje.

Twierdzenie 2 *Każda krzywa regularna posiada parametryzację naturalną.*
■

Uwaga 2 Słuchacz bez trudu odpowie na pytanie następujące: Czym różnią się dwie parametryzacje naturalne tej samej krzywej regularnej ?

Z powyższego twierdzenia wynika, że w zasadzie możnaby mówić wyłącznie o krzywych sparametryzowanych w sposób naturalny, jednak ponieważ w wielu przypadkach całki wyrażające długość krzywej są trudne do wyliczenia, będziemy często wracali do krzywych o parametryzacji dowolnej.

Przykład 3 Funkcja $t \mapsto x_0 + tv$ jest parametryzacją naturalną prostej wtedy i tylko wtedy, gdy $\|v\| = 1$. Funkcja $t \mapsto (r \cos \frac{t}{r}, r \sin \frac{t}{r})$ jest parametryzacją naturalną okręgu o promieniu r.

2.3 Krzywizna i skręcenie, trójścian Freneta

Niech $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ będzie przestrzenną krzywą regularną klasy C^3 o parametryzacji naturalnej. Niech $T(t) = \gamma'(t)$ będzie wektorem stycznym do γ w chwili t. $T(t)$ jest - dla dowolnego t - wektorem jednostkowym, a zatem

$$0 = \frac{d}{dt}\|T\|^2 = 2(T \cdot T')$$

i wektor $T'(t)$ jest prostopadły do krzywej γ w punkcie $\gamma(t)$.

Definicja 6 Liczbę $\kappa(t) = \|T'(t)\|$ nazywamy *krzywizną* krzywej γ w chwili t.

Jeśli $\kappa(t) \neq 0$, to wzór

$$T'(t) = \kappa(t)N(t) \tag{2.3.1}$$

wyznacza jednoznacznie wektor jednostkowy $N(t)$. Niech $B(t) = T(t) \times N(t)$. Wtedy $B(t)$ jest wektorem jednostkowym prostopadłym do $T(t)$ i $N(t)$. Ponieważ $\|N(t)\| = 1$ dla każdego t, więc wektor $N'(t)$ jest prostopadły do

$N(t)$, jest zatem liniową kombinacją wektorów $T(t)$ i $B(t)$, a ponieważ ponadto $0 = (T \cdot N)' = T' \cdot N + T \cdot N' = \kappa N + T \cdot N'$, więc zachodzi wzór

$$N'(t) = -\kappa(t)T(t) + \tau(t)B(t) \tag{2.3.2}$$

dla pewnej liczby $\tau(t)$. Ponadto,

$$B' = T' \times N + T \times N' = \kappa N \times N - \kappa T \times T + \tau T \times B,$$

a więc

$$B'(t) = -\tau(t)N(t). \tag{2.3.3}$$

Wzory (2.3.1), (2.3.2), (2.3.3) nazywa się *wzorami Freneta*.

Wektory $T(t)$, $N(t)$ i $B(t)$ zaczepione w punkcie $\gamma(t)$ tworzą tzw. *trójścian Freneta* i noszą odpowiednio nazwy: *wektor styczny*, *normalny główny* i *binormalny*. Podobnie (*styczna*, *normalna główna* i *binormalna*) nazywają się przechodzące przez $\gamma(t)$ proste o kierunkach tych wektorów. Płaszczyzny przechodzące przez $\gamma(t)$ i rozpięte przez pary $(T(t), N(t))$, $(T(t), B(t))$ i $(N(t), B(t))$ nazywa się odpowiednio płaszczyzną *ścisle styczną*, *prostującą* i *normalną*. Jak widać z wcześniejszych rozważań, trójścian Freneta (i wszystkie jego elementy) jest dobrze określony we wszystkich punktach t, dla których $\kappa(t) \neq 0$. Punkty t, dla których $\kappa(t) = 0$ nazywa się *punktami wyprostowania* krzywej γ, podczas, gdy te punkty t, dla których $\tau(t) = 0$ nazywa się *punktami spłaszczenia* tej krzywej. Jest tak dlatego, że (jak łatwo sprawdzić !) krzywa złożona z samych punktów wyprostowania jest fragmentem linii prostej, podczas gdy krzywa złożona z samych punktów spłaszczenia leży na pewnej płaszczyźnie. Krzywiznę i skręcenie można więc zinterpretować odpowiednio jako miarę odchylenia krzywej od prostej stycznej i płaszczyzny ściśle stycznej. Znak skręcenia wyznacza kierunek odchylenia od płaszczyzny ściśle stycznej.

Z definicji wynika, że krzywizna $\kappa(t)$ krzywej przestrzennej γ jest liczbą nieujemną. W przypadku krzywej płaskiej można też zdefiniować krzywiznę opatrzoną stosownym znakiem: Jeżeli $\mathfrak{n}(t)$ jest wektorem jednostkowym, prostopadłym do $T(t)$ i takim, że para $(T(t), \mathfrak{n}(t))$ tworzy na płaszczyźnie bazę zorientowaną dodatnio, to $T'(t) = k(t)\mathfrak{n}(t)$ dla pewnej liczby rzeczywistej $k(t)$. Liczbe tę nazywa się *krzywizną krzywej płaskiej*. Oczywiście, $\kappa(t) = |k(t)|$.

Zauważmy, że jeżeli $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ jest dowolną krzywą regularną klasy C^3, a $\delta = \gamma \circ \phi : [0, L(\gamma)] \to \mathbb{R}^3$ jej parametryzacją naturalną, to

$$T = \delta' = \phi' \cdot \gamma' \circ \phi,$$

$$\phi' = \|\gamma' \circ \phi\|^{-1},$$
$$T' = \delta'' = \phi'' \cdot \gamma' \circ \phi + (\phi')^2 \cdot \gamma'' \circ \phi = \kappa \cdot N.$$

Mnożąc obie strony ostatniej równości wektorowo przez T otrzymujemy, że

$$\kappa \cdot T \times N = (\phi')^3 \cdot (\gamma' \times \gamma'') \circ \phi,$$

a więc krzywizna krzywej γ (rozumiana jako krzywizna jej reparametryzacji naturalnej) w dowolnym punkcie $t \in [a, b]$ wynosi

$$\kappa(t) = \frac{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|\|^3}. \qquad (2.3.4)$$

Podobnie, (słuchacz sprawdzi bez trudu, że) skręcenie τ krzywej γ (znowu rozumiane jako skręcenie jej repramatryzacji naturalnej) dane jest wzorem

$$\tau(t) = \frac{(\gamma'(t) \times \gamma''(t)) \cdot \gamma'''(t)}{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|^2}. \qquad (2.3.5)$$

Łatwo też sprawdzić, że jeśli krzywa γ jest dana od razu w parametryzacji naturalnej, to wzory (2.3.4) i (2.3.5) redukują się do tych wynikajacych bezpośrednio ze wzorów Freneta.

Przykład 4 Okrąg o promieniu r ma krzywiznę $1/r$. Linia prosta ma krzywiznę tożsamościowo równą zeru. Linia śrubowa z przykładu 2 ma krzywiznę i skręcenie stałe i równe odpowiednio

$$\kappa = \frac{a}{a^2 + b^2}, \qquad \tau = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Krzywizna i skręcenie wyznaczają krzywą z dokładnością do izometrii. Z twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności dla układów równań różniczkowych zwyczajnych wynika łatwo następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3 *Dla dowolnych funkcji rzeczywistych gładkich κ i τ określonych na przedziale I istnieje krzywa $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$, której krzywzina wynosi κ, a skręcenie – τ. Dwie takie krzywe γ_1 i γ_2 różnią się tylko położeniem w przestrzeni: $\gamma_2 = \iota \circ \gamma_1$ dla pewnej izometrii ι przestrzeni $\mathbb{R}^3$ (i stosownie dobranych* (jak ?) *parametryzacji naturalnych).*

Dowód. Równania Freneta prowadzą do następującego układu liniowych równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu:

$$\gamma' = T, \ T' = \kappa N, \ N' = -\kappa T + \tau B, \ B' = -\tau B, \tag{2.3.6}$$

o niewiadomych γ, T, N, B i danych współczynnikach κ i τ. Przy danych warunkach początkowych $\gamma(t_0) = x_0$, $T(n_0) = T_0$, $N(t_0) = N_0$ i $B(t_0) = B_0$, układ ten posiada dokładnie jedno rozwiązanie. Jeśli wektory (T_0, N_0, B_0) tworzą bazę ortonormalną, to i wektory $(T(t), N(t), B(t))$ tworzą takąż bazę dla dowolnego t. Istotnie, jeżeli $T = (u_1, u_2, u_3)$, $N = (v_1, v_2, v_3)$ i $B = (w_1, w_2, w_3)$, to dla dowolnych i i j mamy

$$\begin{aligned}(d/dt)(u_i u_j + v_i v_j + w_i w_j) &= u_i' u_j + u_i u_j' + v_i' v_j + v_i v_j' + w_i' w_j + w_i w_j' \\ &= \kappa v_i u_j + \kappa u_i v_j + \ldots ... = 0.\end{aligned}$$

Zatem funkcje $u_i u_j + v_i v_j + w_i w_j$, $i, j = 1, 2, 3$, są stałe i (wobec ortonormalności warunków początkowych) przyjmują wartości δ_{ij} (równe zeru gdy $i \neq j$ i jedności gdy $i = j$). Oznacza to, że macierz

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

jest ortogonalna, co dowodzi iż nasze wektory są ortonormalne. Oczywiście, krzywa γ otrzymana z rozwiązania układu (2.3.6) ma krzywiznę κ i skręcenie τ. Ponadto, zmiana warunków początkowych (x_0, T_0, N_0, B_0) na inne (spełniające też powyższe warunki ortonormalności) powoduje zastąpienie rozwiązania γ przez $A \cdot \gamma + b$, gdzie A jest ustaloną macierzą ortonormalną, zaś b ustalonym elementem przestrzeni $\mathbb{R}^3$. ■

3 Powierzchnie

3.1 Definicja i przykłady

Przypomnijmy najpierw, że odwzorowanie $F : X \to Y$ między przestrzeniami metrycznymi (ogólniej, topologicznymi) jest *homeomorfizmem*, gdy jest ciągłe, różnowartościowe, $F(X) = Y$ i przekształcenie odwrotne F^{-1} jest też ciagłe. Przypomnijmy także, iż odwzorowanie $F = (F_1, \ldots, F_n)$ zbioru otwartego $V \subset \mathbb{R}^k$ w $\mathbb{R}^n$ jest różniczkowalne klasy C^r $(r = 1, 2, \ldots, \infty)$, gdy wszystkie jego współrzędne posiadają wszystkie pochodne cząstkowe rzędu $\leqslant r$ ciągłe. Odwzorowanie takie jest *dyfeomorfizmem klasy* C^r, gdy jest różnowartościowe i rząd macierzy

$$\left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x); i \leqslant n, j \leqslant k\right]$$

wynosi k w każdym punkcie $x \in V$.

Definicja 7 Podzbiór S przestrzeni $\mathbb{R}^n$ nazywamy *hiperpowierzchnią* k-wymiarową, gdy każdy punkt $p \in S$ posiada otoczenie $U \subset \mathbb{R}^m$ takie, że $S \cap U$ jest homeomorficzne z pewnym podzbiorem otwartym V *przestrzeni* $\mathbb{R}^k$. Hiperpowierzchnię S nazywamy *regularną klasy* C^r, gdy każdy punkt $p \in S$ posiada otoczenie C^r dyfeomorficzne z podzbiorem otwartym przestrzeni $\mathbb{R}^k$. Hiperpowierzchnię 2-wymiarową nazywamy po prostu *powierzchnią.* Liczbę $n-k$ nazywamy *kowymiarem* hiperpowierzchni S.

Przykład 5 Układ równań liniowych

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i = b_j, j = 1, \dots n-k,$$

o macierzy $[a_{ij}]$ rzędu $n-k$ wyznacza w $\mathbb{R}^n$ *hiperpłaszczyznę* k*-wymiarową.* Hiperpłaszczyzna taka jest hiperpowierzchnią wymiaru k i klasy C^∞. Sfera

$$S^n(r) = \left\{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^n; \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = r^2\right\}$$

jest hiperpowierzchnią kowymiaru 1 i klasy C^∞. Istotnie, jeżeli $x, y \in S^n$ sa punktami antypodycznymi, to rzut stereograficzny z punktu y jest homeomorfizmem otoczenia $S^n \setminus \{y\}$ punktu x na $\mathbb{R}^n$, a jego odwrócenie jest dyfeomorfizmem klasy C^∞. Powierzchnia stożka

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z^2 = x^2 + y^2, z \geqslant 0\}$$

jest powierzchnią (odpowiednim homeomorfizmem jest rzutowanie na płaszczyznę $O_{x,y}$), ale nie jest powierzchnią regularną. Powierzchniami regularnymi w $\mathbb{R}^3$ są też paraboloidy (eliptyczna i hiperboliczna) oraz hiperboloidy (jedno - i dwupowłokowa). Słuchacz bez trudu znajdzie odpowiednie dyfeomorfizmy.

Inne przykłady powierzchni pojawią się póżniej i na ćwiczeniach.

3.2 Przestrzeń styczna, wektor normalny, orientacja

Niech $S \subset \mathbb{R}^n$ będzie hiperpowierzchnią regularną wymiaru k i niech $p \in S$. Symbolem T_pS oznaczmy zbiór wszystkich (zaczepionych w p) wektorów stycznych w p do krzywych regularnych położonych na S:

$$v \in T_pS \qquad \Leftrightarrow \qquad v = \gamma'(0),$$

gdzie $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to S \subset \mathbb{R}^n$ ($\epsilon > 0$) jest krzywą regularną i $\gamma(0) = p$.

Lemat 1 *T_pS jest k-wymiarową przestrzenią liniową.*

Dowód. Niech $F : V \to S$ będzie takim dyfeomorizmem pewnego otoczenia $V \subset \mathbb{R}^k$ punktu $0 \in \mathbb{R}^k$, że $F(0) = p$. Niech

$$v_i = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_i}(0), \ldots, \frac{\partial F_n}{\partial x_i}(0)\right) \in \mathbb{R}^n, i = 1, \ldots, k.$$

Wtedy $v_i = \gamma_i'(0)$, gdzie $\gamma_i(t) = F(0, \ldots, t, \ldots, 0)$ dla $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, $\epsilon > 0$ jest dostatecznie małe i t "stoi" na "i"-tym miejscu w ciągu współrzędnych. Zatem, $v_i \in T_pS$ dla wszystkich $i \leqslant k$. Z regularności odwzorowania F wynika, że wektory $v_1, \ldots, v_k$ są liniowo niezależne. Wreszcie, jeżeli $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to S$ jest dowolną krzywą na S taką, że $\gamma(0) = p$, to $\gamma = F \circ (F^{-1} \circ \gamma)$ i z twierdzenia o rózniczkowaniu funkcji złożonej wynika, że $\gamma'(0)$ jest liniową kombinacją wektorów $v_1, \ldots, v_k$. T_pS jest więc przestrzenią liniową o bazie $v_1, \ldots, v_k$. ∎

Przykład 6 Przestrzenią styczną do hiperpłaszczyzny jest ta sama hiperpłaszczyzna. Przestrzenią styczną do sfery (o środku w początku układu współrzędnych) w punkcie p jest przestrzeń złożona ze wszystkich wektorów prostopadłych do p.

Jeżeli $S \subset \mathbb{R}^3$ jest (dwuwymiarową) powierzchnią regularną i $p \in S$, to istnieją dokładnie dwa jednostkowe wektory prostopadłe do płaszczyzny stycznej T_pS. Np., jesli $F : V \to \mathbb{R}^3$, $V \subset \mathbb{R}^2$, jest odwzorowaniem regularnym opisującym S w otoczeniu punktu p, to wektorem takim jest zaczepiony w p wektor

$$N(p) = \frac{v_1 \times v_2}{\|v_1 \times v_2\|}, \tag{3.2.1}$$

gdzie $v_i = \partial F / \partial u_i$ i (u_1, u_2) są współrzędnymi na płaszczyznie $\mathbb{R}^2$. Wektor ten nazywamy *normalnym* do powierzchni.

Zmieniajac w powyższym wzorze punkt p otrzymujemy przyporządkowanie $p \mapsto N(p)$, tj. funkcję N o wartosciach wektorowych. Funkcje takie nazywamy *polami wektorowymi.* N jest wiec polem wektorowym określonym w pewnym otoczeniu punktu $p \in S$.

Definicja 8 Powierzchnię regularną S nazywamy *orientowalną,* gdy istnieje na niej globalne (tj. określone na całym S ciągłe pole normalne N. *Wybór takiego pola nazywa się orientacją* powierzchni. (Każda powierzchnia orientowalna ma więc dokładnie dwie orientacje.)

Przykład 7 *Hiperpłaszczyzny, sfery, paraboloidy i hiperboloidy sa orientowalne. Przykładem powierzchni nieorientowalnej jest tzw. wstega Möbiusa* którą otrzymuje się z prostokątnego paska papieru poprzez sklejenie krótszych jego boków po uprzednim skręceniu jednego z nich w stosunku do drugiego o 180°. Dokładniej, wtęga Möbiusa jest obrazem w $\mathbb{R}^3$ obszaru płaskiego

$$V = \{(u_1, u_2); u_1 \in \mathbb{R}, |u_2| < 1\}$$

w odwzorowaniu F danym wzorem

$$F(u_1, u_2) = \left((2 - u_2 \sin\frac{u_1}{2}) \cos u_1, (2 - u_2 \sin\frac{u_1}{2}) \sin u_1, u_2 \cos\frac{u_1}{2}\right).$$

(Łatwo sprawdzić, że F jet regularne...)

Można wykazać, że każda regularna powierzchnia zwarta w $\mathbb{R}^3$ jest orientowalna. Przykładem zwartej powierzchni nieorientowalnej (w $\mathbb{R}^4$) jest tzw. *butelka Kleina*, którą otrzymuje sie z powierzchni bocznej walca obrotowego poprzez skejenie brzegowych okręgów "zorientowanych przeciwnie". (Ćwiczenie: Opisz butelkę Kleina równaniami.)

Twierdzenie 4 *Powierzchnia regularna S jest orientowalna wtedy i tylko wtedy, gdy posiada pokrycie otwarte $(U_i; i \in \mathbb{N})$ takie, że $U_i = F_i(V_i)$, gdzie $V_i \subset \mathbb{R}^2$, $F_i : V_i \to U_i$ jest dyfeomorfizmem i dla dowolnych $i, j \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność*

$$\det\left[\frac{\partial G_{ijr}(u_1, u_2)}{\partial u_s}; r, s = 1, 2\right] > 0, \tag{3.2.2}$$

gdzie $G_{ij} = (G_{ij1}, G_{ij2}) = (F_i^{-1} \circ F_j)$.

Dowód. Jeżeli (U_i) jest takim pokryciem jak w Twierdzeniu, to pola normalne N_i określone na U_i wzorem (3.2.1) z F zastąpionym przez F_i wyznaczają jedno globalne pole normalne N. Istotnie, z (3.2.2) wynika, że $N_i = N_j$ na $U_i \cap N_j$.

Odwrotnie, jeżeli N jest globalnym polem normalnym na powierzchni S i (U_i), jest dowolnym pokryciem otwartym S zbiorami postaci $U_i = f_i(V_i)$, gdzie V_i są spójnymi podzbiorami otwartymi płaszczyzny, zaś $f_i : V_i \to U_i$ - różnowartościowymi odwzorowaniami regularnymi (istnienie takiego pokrycia wynika bezpośrednio z określenia powierzchni regularnej), to to samo pokrycie wraz z odwzorowaniami F_i określonymi następująco: $F_i = f_i$, gdy wyznaczone przez f_i wzorem (3.2.1) pole normalne N_i pokrywa się z N na U_i, zaś $F_i = f_i \circ s$, gdzie $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jest dane wzorem

$$s(u_1, u_2) = (u_2 \circ u_1),$$

w przeciwnym razie, spełnia warunek (3.2.2). ■

Twierdzenie to pozwala uogólnić (uważny Słuchacz odgadnie bez trudu jak) pojęcia orientowalności i orientacji na przypadek dowolnej hiperpowierzchni.

3.3 Pierwsza forma podstawowa

Niech S będzie znowu k-wymiarową hiperpowierzchnią regularną w $\mathbb{R}^n$. Naturalny iloczyn skalarny $\langle \cdot, \cdot \rangle$ w $\mathbb{R}^n$ indukuje iloczyn skalarny w każdej przestrzeni stycznej T_pS, $p \in S$. Jeżeli $F = (f_1, \dots f_n) : V \to \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^k$, jest odwzorowaniem regularnym opisującym powierzchnię S w pewnym otoczeniu U, zaś

$$X_j = \frac{\partial F}{\partial u_j} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_j}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial u_j} \right),$$

$j = 1, \dots, k$, są bazowymi polami wektorowymi na U stycznymi do S, to wspomniany powyżej iloczyn skalarny wyznacza, dla każdego $p \in U$, dodatnio określoną, symetryczną formę dwuliniową g daną wzorem

$$g(X, Y) = \sum_{i,j=1}^{k} g_{ij} x_i y_j, \tag{3.3.1}$$

gdzie $X = \sum_i x_i X_i$ i $Y = \sum_j y_j Y_j$ są polami wektorowymi na U stycznymi do S, zaś

$$g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial f_l}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial f_l}{\partial u_j}. \tag{3.3.2}$$

Definicja 9 Formę g daną wzorami *(3.3.1), (3.3.2)* nazywa się *pierwszą formą podstawową powierzchni S.*

Jak zobaczymy później, pierwsza forma podstawowa zawiera w sobie wiele informacji o geometrii powierzchni S.

Przykład 8 Słuchacz bez trudu wyznaczy współczynniki pierwszej formy podstawowej dowolnej hiperpłaszczyzny. Dla sfery jednostkowej $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ i odwzorowania F, będącego odwróceniem rzutu stereograficznego z bieguna północnego $n = (1, 0, \ldots, 0)$ mamy $g_{ij} = 0$ gdy $i \neq j$ oraz

$$g_{ii}(u) = (1 + \|u\|^2)^2$$

(por. przykład 5). *Torus* otrzymany przez obrót okręgu o promieniu r wokół osi położonej w płaszczyźnie tego okręgu i oddalonej od jego środka o R, $R > r$, można opisać parametrycznie przy pomocy równań:

$$x = (R + r\cos u_1)\cos u_2,\ \ y = (R + r\cos u_1)\sin u_2,\ \ z = r\sin u_1.$$

Wtedy pierwsza forma podstawowa torusa przyjmuje postać:

$$g_{11}(u) = r^2, g_{12}(u) = g_{21}(u) = 0, g_{22}(u) = (R + r\cos u_1)^2.$$

dla wszystkich $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$.

3.4 Koneksja Levi-Civita i współczynniki Christoffela

Przez *pole wektorowe* na hiperpowierzchni $S \subset \mathbb{R}^n$ ($\dim S = m$) rozumiemy funkcję X, która każdemu punktowi $p \in S$ przypisuje wektor $X(p)$ styczny do S w punkcie p: $X(p) \in T_pS$ dla wszystkich $p \in S$. Lokalnie, w obrazie $F(U) \subset S$ odwzorowania F parametryzującego S, pole takie jest postaci

$$X = \sum_{j=1}^{m} f_j \frac{\partial F}{\partial u_j}, \tag{3.4.1}$$

gdzie $f_j : U \to \mathbb{R}$ są funkcjami rzeczywistymi. Pole X jest *gładkie*, gdy funkcje f_j są różniczkowalne (klasy conajmniej C^1).

Ponieważ odzworowanie F jest lokalnie odwracalne, więc gładkie pole wektorowe przedłuża się lokalnie do pola w otoczeniu V otwartym w $\mathbb{R}^n$: $X|V \cap S = Y|V \cap S$, gdzie $Y = (Y_1, \ldots Y_n)$, $Y_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, jest gladkim polem wektorowym na $\mathbb{R}^n$. Mając takie pole Y i wektor $v = (v_1, \dots v_n) \in \mathbb{R}^n$, można różniczkować Y w kierunku v. Pochodna kierunkowa $D_vY(p)$ ($p \in \mathbb{R}^n$) dana jest oczywiście wzorem

$$D_vY(p) = \left(\sum_j v_j \frac{\partial Y_1}{\partial x_j}(p), \dots, \sum_j v_j \frac{\partial Y_n}{\partial x_j}(p) \right), \tag{3.4.2}$$

jest więc wektorem złożonym z pochodnych kierunkowych składowych Y_j pola Y (w kierunku v i w punkcie p). Z określenia pochodnej kierunkowej wynika, że

$$D_vY(p) = (d/dt)(Y \circ \gamma)(0), \tag{3.4.3}$$

gdy $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^n$ jest krzywą przechodzącą w chwili $t = 0$ przez p i styczną tam do v: $\gamma(0) = p$ i $\gamma'(0) = v$. Pochodna ta zależy więc tylko od wartości pola Y wzdłuż takiej krzywej γ. Jeżeli $v \in T_pS$, to $v = \gamma'(0)$ dla pewnej krzywej γ położonej na S, a więc $D_vY(p)$ zalezy tylko od wartości pola Y na S. W szczególności, pochodna $D_vX(p)$ jest dobrze określona, gdy X jest polem wektorowym na S i $v \in T_pS$, $p \in S$.

A priori, wektor $D_vX(p)$ nie jest styczny do S i można go rozłożyć na sumę składowej stycznej $\nabla_vX(p)$ i składowej normalnej (której przyjrzymy się później).

Definicja 10 Odwzorowanie ∇ przyporządkowujące wektorowi v stycznemu do S i polu wektorowemu X na S pochodną ∇_vX nazywa się *koneksją Leci-Civita* na S.

Z własności pochodnej kierunkowej wynikają od razu następujące własności koneksji ∇:

$$\begin{aligned}
&\nabla_{a_1v_1+a_2v_2} = a_1\nabla_{v_1} + a_2\nabla_{v_2}, \\
&\nabla(X_1 + X_2) = \nabla X_1 + \nabla X_2, \\
&\nabla_v(fX) = D_v(f)Y(p) + f(p)\nabla_vX,
\end{aligned}$$

gdy $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $v, v_1, v_2 \in T_pS$, $p \in S$, $f$jest gładką funkcją rzeczywistą na S, zaś X, X_1 i X_2 są polami wektorowymi na S. Tutaj, D_vf oznacza oczywiście pochodną kierunkową funkcji f, która jest określona wzorem analogicznym do (3.4.3); dla wektorów v stycznych do S określenie to jest poprawne mimo iż f nie jest określona w otwartym podzbiorze przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

Jeżeli pola wektorowe $X_1, \ldots, X_m$ są liniowo niezależne w każdym punkcie (podzbioru otwartego) hiperpowierzchni S, to dowolne pole wektorowe X, w szczególności pochodne $\nabla_{X_i} X_j$, $i, j \leqslant m$, można przedstawić jednoznacznie w postaci liniowej kombinacji pól X_k:

$$\nabla_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^{m} \Gamma_{ij}^k X_k. \tag{3.4.4}$$

Funkcje Γ_{ij}^k, $i, j, k = 1, \ldots m$, nazywa się *współrzędnymi koneksji* ∇ lub *symbolami Chrsitoffela (drugiego rodzaju)*. Jeżeli $F : U \to S$ jest parametryzacją lokalną powierzchni S i $X_i = \partial F / \partial u_i$, to mamy natępujące

Twierdzenie 5 *Dla dowolnych i, j i $k \leqslant m$ zachodzi równość*

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \cdot \sum_{r=1}^{m} g^{kr} \left(\frac{\partial g_{ir}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jr}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_r} \right), \tag{3.4.5}$$

gdzie g_{rs}, $r, s \leqslant m$, są współrzędnymi pierwszej formy podstawowej powierzchni S, zaś (g^{rs}) jest macierzą odwrotną do (g_{rs}).

Dowód. Niech $X_i = \partial F / \partial u_i$ będą polami bazowymi pochodzącymi od parametryzacji F. Wtedy

$$D_{X_i} X_j = \frac{\partial^2 F}{\partial u_i u_j}, \tag{3.4.6}$$

a więc

$$D_{X_i} X_j = D_{X_j} X_i$$

dla wszystkich i oraz j. Z określenia funkcji Γ_{ij}^k wynika, że

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_r g^{rk} \Gamma_{ijr},. \tag{3.4.7}$$

gdzie

$$\Gamma_{ijr} = \langle D_{X_i} X_j, X_r \rangle.$$

Ponadto,

$$\frac{\partial}{\partial u_k} g_{ij} = \Gamma_{kij} + \Gamma_{kji}. \tag{3.4.8}$$

Podobnie,

$$\frac{\partial}{\partial u_i} g_{jk} = \Gamma_{ijk} + \Gamma_{ikj} \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial}{\partial u_j} g_{ik} = \Gamma_{jil} + \Gamma_{jki}. \tag{3.4.9}$$

Wreszcie, (3.4.6) oznacza, że

$$\Gamma_{ijk} = \Gamma_{jik} \tag{3.4.10}$$

dla wszystkich i, j i k. Odejmując stronami (3.4.8) od sumy równości (3.4.9) i redukując wyrazy podobne (po zastosowaniu (3.4.10)) otrzymujemy (3.4.5). ■

3.5 Przeniesienie równoległe i geodezyjne

Z rozważań paragrafu 3.4 wynika, że jeżeli $\gamma : J \to S$ jest określoną na przedziale J krzywą (gładką) na (hiper-)powierzchni S, zaś $X : J \to TS$ jest *polem wektorowym wzdłuż* γ, tzn. X jest funkcją przypisującą liczbom $t \in J$ wektory $X(t)$ styczne do S w punkcie $\gamma(t)$, to dobrze określona jest pochodna kowariantna $X' = \nabla_{\dot\gamma} X$. Pochodna ta jest znowu polem wzdłuż γ. Jeżeli krzywa γ przebiega w zbiorze $F(U)$, gdzie $F : U \to \mathbb{R}^n$ jest prametryzacją hiperpowierzchni S i — jak poprzednio — $X_i = \partial F / \partial u_i$, to $X = \sum_{i=1}^m h_i X_i \circ \gamma$ i $\dot\gamma = \sum_{i=1}^m \gamma_i' X_i \circ \gamma$ dla pewnych funkcji $h_i : J \to \mathbb{R}$; tu $m = \dim S$ i γ_i jest i-tą współrzędną złożenia $F^{-1} \circ \gamma$. Wtedy

$$X' = \sum_{k=1}^m \left(h_k' + \sum_{i,j=1}^m \gamma_i' h_j \Gamma_{ij}^k \right) \cdot X_k. \tag{3.5.1}$$

Pole X wzdłuż krzywej γ na S nazywamy *równoległym*, gdy $X' = 0$. Z (3.5.1) wynika, że warunek równoległości jest równoważny jednorodnemu układowi liniowych równań różniczkowych zwyczajnych

$$h_k' + \sum_{i,j=1}^m \gamma_i' h_j \Gamma_{ij}^k \circ \gamma = 0, \quad k = 1, \ldots m, \tag{3.5.2}$$

o niewiadomych $h_1, \ldots, h_m$. Z twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań dla takich układów wynika, że jeżeli $a \in J$ i v jest wektorem stycznym do S w punkcie $\gamma(a)$, to istnieje dokładnie jedno pole $X_v : J \to TS$ wzdłuż γ, które jest równoległe i spełnia warunek początkowy $X_v(a) = v$. Przy tym,

$X_{a_1v_1+a_2v_2} = a_1X_{v_1} + a_2X_{v_2}$ dla dowolnych liczb $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ i wektorów v_1, v_2 stycznych do S w $\gamma(a)$. Zatem, jeżeli $a, b \in J$ i $c = \gamma|J$, to przyporządkowanie

$$\tau_c : T_{\gamma(a)}S \ni v \mapsto X_v(b) \tag{3.5.3}$$

jest przekształceniem liniowym przestrzeni stycznej do S w punkcie początkowym krzywej c w przestrzeń styczną do S w punkcie końcowym tej krzywej.

Definicja 11 Przekształcenie liniowe $\tau_c : T_{c(a)}S \to T_{c(b)}S$ nazywamy *przeniesieniem równoległym* wzdłuż krzywej c.

Łatwo zaobserwować, że τ_c jest izomorfizmem przestrzeni stycznych. Istotnie, jeśli c^- jest krzywą daną wzorem $c^-(t) = c(a + b - t)$ dla $t \in [a, b]$, to przeniesienie τ_{c^-} jest przekształceniem odwrotnym do τ_c. Podobnie, jeśli dwie krzywe $c_1 : [a, b] \to S$ i $c_2 : [b, d] \to S$ mają wspólny koniec $c_1(b) = c_2(b)$, to wzory $c(t) = c_1(t)$ dla $t \leqslant b$ i $c(t) = c_2(t)$ dla $t \geqslant b$ określają krzywą $c : [a, d] \to S$ oznaczaną zwykle przez $c_2 * c_1$. Na ogół, krzywa ta jest tylko *kawałkami gładka*, tzn. przedział $[a, d]$ można podzielić na części $[t_i, t_{i+1}]$, gdzie $a = t_0 < t_1 < \dots t_k = d$, tak by $c|[t_i, t_{i+1}]$ było krzywą gładką dla każdego i; jeśli jest ona gładka, to

$$\tau_{c_2 * c_1} = \tau_{c_2} \circ \tau_{c_1}, \tag{3.5.4}$$

co pozwala w naturalny sposób (tzn. jak ?) określić przeniesienie równoległe wzdłuż dowolnej krzywej kawałkami gładkiej; przy tym równość (3.5.4) zachowuje się.

Definicja 12 *Krzywą $\gamma : J \to S$ nazywamy geodezyjną, gdy pole $\dot\gamma$ jest równoległe, tj. wtedy, gdy*

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0. \tag{3.5.5}$$

Zapisując układ (3.5.2) dla pola $X = \dot\gamma$ otrzymujemy układ równań różniczkowych drugiego rzędu

$$\gamma_k'' + \sum_{i,j=1}^{m} \gamma_i'\gamma_j'\Gamma_{ij}^k \circ \gamma = 0, \quad k = 1, \dots m, \tag{3.5.6}$$

równoważny warunkowi (3.5.5). Korzystając znowu ze stosownych twierdzeń teorii równań różniczkowych zwyczajnych otrzymujemy

Twierdzenie 6 *Dla dowolnego punktu $x \in S$ i dowolnego wektora v stycznego w x do S istnieje geodezyjna $\gamma : J \to S$ określona na pewnym przedziale J, $0 \in J$, taka, że*

$$\gamma(0) = x \quad i \quad \dot{\gamma}(0) = v. \tag{3.5.7}$$

Dwie takie geodezjne $\gamma_1 : J_1 \to S$ i $\gamma_2 : J_2 \to S$ pokrywają się na zbiorze $J_1 \cap J_2$. Zatem, istnieje dokładnie jedna maksymalna geodezyjna spełniająca warunki początkowe (3.5.7). ∎

Z (3.5.5) wynika łatwo, że

$$\|\dot{\gamma}\|' = 0 \quad \text{i} \quad \|\dot{\gamma}\| = \text{const.},$$

tj., że geodezyjne są sprametryzowane proporcjonalnie do długości łuku.

Przykład 9 Geodezyjnymi na (hiper-)płaszczyznach są (sparametryzowane proporcjonalnie do długości łuku) linie proste, na sferach — okręgi kół wielkich, na powierzchniach obrotowych — m. in. tworzące i "równoleżniki" odpowiadające punktom ekstremalnego oddalenia tworzącej od osi obrotu.

Pojawia się naturalne pytanie o geometryczne znaczenie linii geodezyjnych. Aby je wyjaśnić rozważmy dowolną *wariację* krzywej regularnej $\gamma : [a,b] \to S$, tj. takie odwzorowanie gładkie $f : [a,b] \times (-\epsilon, \epsilon) \to S$, że $\gamma = f(\cdot, 0)$. Wobec twierdzenia 1, nie zmniejszymy ogólności zakładając, że γ ma parametryzację naturalną, tj. $\|\dot{\gamma}(s)\| = 1$ dla wszystkich $s \in [a,b]$. Oznaczmy przez $L(t)$ długość krzywej $\gamma_t = f(\cdot, t)$. Ponieważ f jest gładkie, a krzywa γ – regularna, więc funkcja L jest różniczkowalna w pewnym otoczeniu punktu 0. Wyznaczymy pochodną $L'(0)$:

$$\begin{aligned}
L'(0) &= \frac{d}{dt}\int_a^b \|(\partial f/\partial s)(s,t)\|\ ds\ (0) = \int_a^b \frac{d}{dt}\|(\partial f/\partial s)(s,t)\| ds\ (0) \\
&= \int_a^b \frac{\langle(\partial^2 f/\partial t \partial s)(s,0), (\partial f/\partial s)(s,0)\rangle}{\|(\partial f/\partial s)(s,0)\|(s,0)\|}\ ds \\
&= \int_a^b \langle(\partial^2 f/\partial s \partial t)(s,0), (\partial f/\partial s)(s,0)\rangle ds \\
&= \int_a^b \langle \nabla_{\dot{\gamma}} X, \dot{\gamma}\rangle\ ds = \int_a^b ((d/ds)\langle X, \dot{\gamma}\rangle - \langle X, \nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}\rangle)\ ds \\
&= \langle X, \dot{\gamma}\rangle|_a^b - \int_a^b \langle X, \nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}\rangle\ ds,
\end{aligned}$$

gdzie $X = (\partial f/\partial t)(\cdot, 0)$ jest tzw. *polem wariacji* f. Jeżeli wariacja f jest właściwa, tzn. gdy $f(a,t) = \gamma(a)$ i $f(b,t) = \gamma(b)$ dla wszystkich t, to $X(a) = X(b) = 0$ i powyższy wzór redukuje się do następującego:

$$L'(0) = -\int_a^b \langle X, \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma\rangle \, ds. \tag{3.5.8}$$

Jeśli więc krzywa γ jest najkrótszą spośród krzywych na S łączących dane punkty $x = \gamma(a)$ i $y = \gamma(b)$, to równość (3.5.8) zachodzi dla dowolnego pola X wzdłuż γ zerującego się na końcach przedziału $[a, b]$, skąd łatwo (!) wywnioskować, że γ jest geodezyjną. Innymi słowy mamy następujące

Twierdzenie 7 *Jeżeli krzywa γ jest najkrótszą krzywą na hiperpowierzchni S łączącą dane punkty $x, y \in S$, to γ jest geodezyjną.* ■

Odnotujmy, że twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe, bo np. okrąg koła wielkiego na sferze jest geodezyjną zamkniętą, a więc łączącą pewien punkt x ze sobą, podczas gdy najkrótszą krzywą łączącą x ze sobą jest oczywiście krzywa stała (o długości 0). Jest tak dlatego, że — jak dobrze wiemy – punkt krytyczny funkcji rzeczywistej zmiennej rzeczywistej nie musi być punktem ekstremum tej funkcji.

3.6 Druga forma podstawowa

Załóżmy, że S jest n-wymiarową hiperpowierzchnią w $\mathbb{R}^{n+1}$ zaś N jednostkowym polem wektorowym prostopadłym do S. Wtedy

$$\langle N(x), N(x)\rangle = 1 \quad \text{i}\langle N(x), v\rangle = 0 \tag{3.6.1}$$

dla wszystkich $x \in S$ i $v \in T_xS$. Z (3.6.1) wynika, że

$$\langle N(x), D_vN\rangle = \frac{1}{2}v(\|N\|^2) = 0,$$

. Zatem, wzór

$$A(v) = -\nabla_v N, v \in T_xS, x \in S, \tag{3.6.2}$$

określa endomorfizm przestrzeni stycznych T_xS; jest on zwany *operatorem Weingartena* hiperpowierzchni S. Oczywiście, A zależy od wyboru N: jeśli zastąpimy N przez $-N$, to A przejdzie na $-A$.

Definicja 13 *Druga forma podstawowa* hiperpowierzchni S jest to forma dwuliniowa b dualna do A w sensie następującym:

$$b(v,w) = \langle Av, w\rangle, \quad v,w \in T_xS,\ x \in S. \tag{3.6.3}$$

Innymi słowy,

$$b(v,w) = \langle D_v N, w\rangle. \tag{3.6.4}$$

Jeżeli $F : U \to S$ jest parametryzacją lokalną hiperpowierzchni S, to forma b jest (na $F(U)$) jest wyznaczona jednoznacznie przez macierz $[b_{ij}]$ jej współczynników danych wzorami

$$b_{ij} = b(\partial F/\partial u_i, \partial F/\partial u_j).$$

Ponieważ

$$D_{\partial F/\partial u_i}\frac{\partial F}{\partial u_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial u_i \partial u_j}$$

oraz

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u_i \partial u_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial u_j \partial u_i},$$

więc z (3.6.4) wynika od razu, że $b_{ij} = b_{ji}$ dla wszystkich i, j, że więc b jest dwuformą symetryczną. Wracając do operatora Weingartena otrzymujemy

Lemat 2 *Operator Weingartena na dowolnej hiperpowierzchni jest samosprzężony, tj.*

$$\langle Av, w\rangle = \langle v, Aw\rangle, \quad v,w \in T_xS,\ x \in S. \tag{3.6.5}$$

■

Z powyższego lematu i *twierdzenia spektralnego* (por. np. [**La**]) wynika, że operator Weingartena A posiada tylko rzeczywiste wartości własne $k_1, \ldots, k_n$ zwane *krzywiznami głównymi* hiperpowierzchni S. Odpowiadające im wektory własne e_i ($Ae_i = k_i e_i$) tworzą bazę ortonormalną przestrzeni stycznej T_xS i wyznaczają tzw. *kierunki główne* na S. Krzywe na S styczne we wszystkich swoich punktach do kierunków głównych nazywa się *liniami krzywiznowymi.* Jeżeli w pewnym punkcie x_0 hiperpowierzchni S wszystkie krzywizny główne są różne, to w pewnym otoczeniu punktu x_0 istnieje ortogonalna siatka złożona z linii krzywiznowych.

Przykład 10 Druga forma podstawowa hiperpłaszczyzny jest równa tożsamościowo zeru; mówimy więc, że hiperpłaszczyzna jest hiperpowierzchnią *całkowicie geodezyjną*. Punkt x_0 hiperpowierzchni S, w którym wszystkie krzywizny główne są równe nazywamy *umbilikalnym* (lub *kulistym*); sfera $S^n(r)$ o promieniu r składa się z samych punktów kulistych bo jej operator Weingartena wynosi $A = (1/r) \cdot \mathrm{id}$ i $k_1 = \cdots = k_n = 1/r$, mówimy więc, że sfera jest hiperpowierzchnią *całkowicie umbilikalną*. Na takiej sferze druga forma podstawowa jest proporcjonalna do pierwszej: $b_{ij} = (1/r)g_{ij}$ dla wszystkich i, j. (Można wykazać, że każda hiperpowierzchnia całkowicie umbilikalna w $\mathbb{R}^{n+1}$ jest kawałkiem hiperpłaszczyzny lub sfery, a każda hiperpowierzchnia całkowicie geodezyjna — kawałkiem hiperpłaszczyzny.) Tworzące i równoleżniki na powierzchniach obrotowych są liniami krzywiznowymi: istotnie, wzdłuż danego południka γ pole N leży w płaszczyźnie zawierającej γ, zatem i $N' = D_{\dot\gamma}N$ leży w tej płaszczyźnie, skąd wynika iż $\nabla_{\dot\gamma}N$ jest równoległe do $\dot\gamma$ i — w konsekwencji — γ jest linią krzywiznową.

Elementarne funkcje symetryczne σ_j wartości własnych endomorfizmu A dostarczają najbardziej naturalnych niezmienników endomorfizmu. W przypadku operatora Weingartena A,

$$\sigma_j = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_j \leqslant n} k_{i_1} k_{i_2} \cdot \cdots \cdot k_{i_j},$$

jest tzw. *j-tą krzywizną średnią* hiperpowierzchni S ($n = \dim S$). Szczególnie ważną rolę w geometrii odgrywa pierwsza krzywizna średnia σ_1 (lub jej "uśredniony" odpowiednik $H = \frac{1}{n}\sum_i k_i$ zwany po prostu *krzywizną średnią*) oraz *krzywizna Gaussa-Kroneckera* $\sigma_n = k_1 k_2 \cdot \cdots \cdot k_n$. Zauważmy, że σ_1 to po prostu ślad operatora Weingartena A.

Hiperpowierzchnie o zerowej krzywiźnie średniej nazywa się *minimalnymi* gdyż są punktami krytycznymi funkcjonału pola przypisującego hiperpowierzchniom zwartym (ew. z brzegiem) S ich n-wymiarową miarę Lebesgue'a $|S|$:

$$|S| = \int_U \sqrt{\det[g_{ij}]}\,du, \tag{3.6.6}$$

gdy hiperpowierzchnia S jest opisana przy pomocy jednego odwzorowania $F : U \to S$, a g_{ij} są współrzędnymi jej pierwszej formy podstawowej (por. wzór (3.3.2)). Istotnie, z (3.6.6) wynika poprzez proste różniczkowanie, że jeżeli F_t, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, jest jednoparametrową rodziną odwzorowań regularnych określonych na wspólnej dziedzinie U i takich, że $F_t = F_0$ poza pewnym zbiorem zwartym zawartym w U, to

Twierdzenie 8 *Zachodzi równość*

$$\frac{d}{dt}|S_t|(0) = -n\int_U H \cdot \langle N, X\rangle \sqrt{\det[g_{ij}]}du, \tag{3.6.7}$$

gdzie $X = (t \mapsto F_t)'(0)$ *jest polem wariacji* (F_t), *a* $S_t = F_t(U)$ *jest hiperpowierzchnią daną przez* F_t.

Dowód. Dla uproszczenia rozważań załóżmy, że pole $X = \langle X, N\rangle \cdot N$ jest ortogonalne do S i zróżniczkujmy funkcję $P : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$ daną wzorem

$$P(t) = \int_U \sqrt{\det[g_{ij}(t)]}du,$$

gdzie

$$g_{ij}(t) = \langle \frac{\partial F_t}{\partial u_i}, \frac{\partial F_t}{\partial u_j}\rangle$$

są współrzędnymi pierwszej formy podstawowej na S_t. Korzystając z definicji wyznacznika otrzymujemy

$$P'(0) = \frac{1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{n}\int_U \det\begin{pmatrix} g_{11}(0) & \dots & \frac{\partial g_{1k}}{dt}(0) & \dots & g_{1n}(0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n1}(0) & \dots & \frac{\partial g_{nk}}{dt}(0) & \dots & g_{nn}(0)\end{pmatrix}\cdot(\det[g_{ij}(0)])^{-1/2}\,du.$$

Ponadto,

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{kk}}{dt}(0) &= 2\langle \frac{\partial^2 F_t}{dtdu_k}, \frac{\partial F}{\partial u_k}\rangle = 2\langle \frac{\partial X}{\partial u_k}, \frac{\partial F}{\partial u_k}\rangle \\ &= 2\langle \nabla_{\partial F/\partial u_k} X, \frac{\partial F}{\partial u_k}\rangle = -2b(\frac{\partial F}{\partial u_k}, \frac{\partial F}{\partial u_k}) \cdot \langle X, N\rangle.\end{aligned}$$

Obliczając wyrażenie podcałkowe w powyższym wzorze na $P'(0)$ możemy przyjąć, że w danym punkcie x mamy $g_{ij}(x) = \delta_{ij}$. Wtedy rozwinięcie Laplace'a daje, że wyrażenie to w punkcie x wynosi

$$-\sum_k b_{kk}(x)\langle X, N\rangle = -nH\langle X, N\rangle(x).$$

Zestawiając powyższe równości otrzymujemy (3.6.7). ∎

Najprostszymi przykładami powierzchni minimalnych w $\mathbb{R}^3$ są płaszczyzna (tu $b \equiv 0$, więc i $H = 0$), helikoida (powierzchnia zbudowana z "poziomych" linii prostych przechodzących przez punkty linii śrubowej i odpowiednie punkty osi "z") i katenoida (powierzchnia otrzymana przez obrót linii łańcuchowej $y = \cosh x$). Teoria (hiper-) powierzchni minimalnych jest bardzo rozwinięta i pełna pięknych przykładów oraz interesujących i zaskakujących wyników. Zainteresowanego Słuchacza odsyłamy do bogatej literatury; zob. np. [**Ni**] i bibliografia tamże.

3.7 Krzywizna normalna

Niech γ będzie krzywą regularną o parametryzacji naturalnej na hiperpowierzchni S. Na ogół, wektor krzywizny γ'' nie jest styczny do S, ale zawsze można go rozłożyć na składowe: styczną do S $(\gamma'')^\top$ i prostopadłą do S $(\gamma'')^\perp$. Długości tych składowych (opatrzone ewentulanie stosownym znakiem) nazywa się odpowiednio *krzywizną geodezyjną* k_g i *krzywizną normalną* k_n krzywej γ. Ponieważ $\gamma'' = D_{\gamma'}\gamma'$, więc k_g jest długością wektora $\nabla_{\gamma'}\gamma'$ i γ jest geodezyjną wtedy i tylko wtedy, gdy $k_g \equiv 0$. Krzywizna normalna k_n jest równa

$$k_n = \langle \gamma'', N \circ \gamma \rangle, \tag{3.7.1}$$

gdzie N jest ustalonym jednostkowym polem wektorowym prostopadłym do S. Oczywiście, k_n zależy (tak jak operator Weingartena i krzywizny główne) od N. Z (3.7.1) i określenia drugiej formy podstawowej wynika od razu, że

$$k_n = b(\gamma', \gamma'). \tag{3.7.2}$$

Zachodzi zatem natępujące

Twierdzenie 9 *Krzywizna normalna krzywej γ położonej na hiperpowierzchni S zależy tylko od wektora γ' stycznego do γ.* ■

Innymi słowy, *dowolne dwie krzywe położone na S, przechodzące w chwili t_0 przez punkt $x_0 \in S$ i styczne tam do tego samego wektora v_0 mają tą samą krzywiznę normalną w chwili t_0.*

Co więcej, w przypadku "zwykłej" powierzchni (tj. gdy $\dim S = 2$ i $S \subset \mathbb{R}^3$), krzywizna normalna krzywej γ położonej na S pokrywa się ze "zwykłą" krzywizną krzywej otrzymanej jako przekrój normalny powierzchni S płaszczyzną styczną do γ. W tym przypadku mamy też kolejne

Twierdzenie 10 (Meusnier) *Środek z_0 okręgu ściśle stycznego w punkcie x_0 do krzywej regularnej γ na powierzchni S jest rzutem prostokątnym na płaszczyznę ściśle styczną w x_0 do γ środka okręgu ściśle stycznego w x_0 do przekroju normalnego powierzchni S płaszczyzną styczną w x_0 do γ.*

Przypomnijmy, że *okrąg ściśle styczny* do krzywej regularnej γ w jej punkcie $x_0 \in \mathbb{R}^3$, to jedyny okrąg $\mathcal{O}$ przechodzący przez x_0 i posiadający tam z krzywą γ rząd styczności > 1. Okrąg taki leży w płaszczyźnie ściśle stycznej do γ i ma promień równy odwrotności krzywizny κ tej krzywej ($= \infty$, gdy $\kappa = 0$; wtedy okrąg ścisle styczny staje się prostą i — oczywiście — pokrywa się z prostą styczną do γ).

Dowód. Niech z_0' będzie środkiem krzywizny wspomnianego przekroju normalnego. Wtedy

$$z_0' - x_0 = \frac{1}{k_n} \cdot N(x_0).$$

Rzutując punkt z_0' na płaszczyznę ściśle styczną do γ otrzymujemy punkt z_0'' taki, że

$$z_0'' - x_0 = \langle (z_0' - x_0), n(x_0) \rangle \cdot n(x_0) = \frac{1}{\kappa} \cdot n(x_0),$$

gdzie n oznacza wektor normalny główny krzywej γ, a κ jest jej krzywizną. Zatem, $z_0'' = z_0$. ■

Zauważmy jeszcze, że w przypadku powierzchni dwuwymiarowej krzywizny główne są maksymalną i minimalną wartością krzywizny normalnej pośród wszystkich krzywych położonych na danej powierzchni S i przechodzących przez dany punkt x_0. Istotnie, jeśli k_1 i k_2 są krzywiznami głównymi powierzchni S w punkcie x_0, a v_1 i v_2 — ortogonalnymi wektorami jednostkowymi wyznaczającymi odpowiadające im kierunki główne, przy czym $k_1 \leqslant k_2$, to dla dowolnej krzywej $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to S$ z $\gamma(0) = x_0$ istnieje liczba rzeczywista α, dla której $\gamma'(0) = \cos \alpha v_1 + \sin \alpha v_2$ oraz

$$k_n(0) = \cos^2 \alpha k_1 + \sin^2 \alpha k_2,$$

skąd

$$k_1 \leqslant k_n(0) \leqslant k_2.$$

3.8 Odwzorowanie i krzywizna Gaussa

Ograniczmy się teraz do przypadku "zwykłej" dwuwymiarowej, regularnej powierzchni $S \subset \mathbb{R}^3$ i załóżmy, że N jest jednostkowym polem ortogonalnym do S.

Definicja 14 *Odwzorowaniem Gaussa* powierzchni S nazywamy przekształcenie $\Gamma : S \to S^2$ przyporządkowujące każdemu punktowi $x \in S$ koniec wektora $N(x)$ zaczepionego w początku $0 \in \mathbb{R}^3$ układu współrzędnych w $\mathbb{R}^3$.

Odwzorowanie Γ jest oczywiście różniczkowalne, a jego różniczka $d\Gamma(x)$ przekształca płaszczyznę styczną T_xS w punkcie x do S w równoległą doń płaszczyznę styczną $T_{\Gamma(x)}S^2$ w punkcie $\Gamma(x)$ do sfery jednostkowej S^2. Utożsamiając te płaszczyzny poprzez "zwykłe" przeniesienie równoległe w $\mathbb{R}^3$ możemy różniczkę $d\Gamma(x)$ traktować jako endomorfizm dwuwymiarowej przestrzeni liniowej T_xS. Zatem, dobrze zdefiniowany jest wyznacznik

$$K(x) = \det d\Gamma(x) \left(= \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right), \tag{3.8.1}$$

gdy $d\Gamma(x)(e_1) = ae_1 + be_2$, $d\Gamma(x)(e_2) = ce_1 + de_2$, zaś e_1, e_2 tworzą parę liniowo niezależnych wektorów stycznych w x do S; oczywiście, wartość $K(x)$ w (3.8.1) nie zależy od wyboru wektorów e_1, e_2.

Definicja 15 Liczbę $K(x)$ w (3.8.1) nazywamy *krzywizną Gaussa* powierzchni S w punkcie x.

Zauważmy po pierwsze, że $K(x)$ nie zależy od wyboru pola N prostopadłego do S. Istotnie, zmiana N na $-N$ powoduje zmianę odwzorowania Γ na $-\Gamma$ i zmianę znaku wszystkich liczb a, b, c, d w (3.8.1), ale nie powoduje zmiany wyznacznika $K(x) = ad - bc$. Po drugie, zauważmy, że twierdzenie o zamianie zmiennych pod znakiem całki podwójnej pozwala wyrazić krzywinę $K(x)$ w natępujący, bardziej geometryczny, sposób:

$$K(x) = \epsilon(x) \cdot \lim_{D \to \{x\}} \frac{|\Gamma(D)|}{|D|}, \tag{3.8.2}$$

gdzie D jest małym otoczeniem punktu x na S, $|D|$ jest jego polem, $|\Gamma(D)|$ - polem jego obrazu sferycznego danego przez odwzorowanie Gaussa Γ, zaś $\epsilon(x) = \operatorname{sgn} \det d\Gamma(x)$ jest znakiem wyznacznika różniczki tego odwzorowania. Wreszcie, z (3.8.1), oczywistego wzoru

$$d\Gamma(x)(v) = D_v N$$

oraz określenia drugiej formy podstawowej powierzchni S wynika od razu wzór

$$K = \frac{\det b}{\det g} = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}, \tag{3.8.3}$$

gdzie b_{ij} i g_{ij} są odpowiednio współrzędnymi drugiej b i pierwszej g fromy podstawowej powierzchni S (oczywiście w tej samej parametryzacji F). Ponadto, wzór (3.8.1) można wyrazić w postaci

$$K(x) = k_1 k_2, \tag{3.8.4}$$

gdzie k_1 i k_2 są krzywiznami głównymi powierzchni S w punkcie x.

Ze względu na znak krzywizny Gaussa punkty powierzchni dzielimy na *eliptyczne* (tj. takie, w których krzywizna Gaussa jest dodatnia), *hiperboliczne* (w których krzywizna Gaussa jest ujemna) i *paraboliczne* (w których krzywizna Gaussa jest równa zeru). Zatem, punkt $x \in S$ jest eliptyczny, gdy obie krzywizny główne mają ten sam znak (dodatni lub ujemny), hiperboliczny — gdy krzywizny główne są przeciwnych znaków, paraboliczny — gdy jedna z krzywizn głównych jest równa zeru. Ponadto, jeżeli w punkcie $x \in S$ obie krzywizny główne są równe zeru, to x nazywa się *punktem spłaszczenia* powierzchni S. Tak więc, sfery i elipsoidy składają się wyłącznie z punktów eliptycznych, hiperboloida jednopowłokowa — z samych punktów hiperbolicznych, powierzchnia walca obrotowego — z samych punktów parabolicznych (nie będących punktami spłaszczenia), płaszczyzna — z samych punktów spłaszczenia. Oczywiście, istnieją powierzchnie zawierające punkty wszystkich rodzajów.

W definicji krzywizny Gaussa i wzorach (3.8.1) - (3.8.4) występują elementy tzw. geometrii zewnętrznej powierzchni S. Okazuje się jednak, że krzywizna Gaussa należy do geometrii wewnętrznej powierzchni: można ją wyrazić przy pomocy samych współrzędnych pierwszej formy podstawowej i ich pochodnych. Fakt ten został zuważony już przez Gaussa i jest zawarty w słynnym twierdzeniu zwanym *Theorema Egregium*:

Twierdzenie 11 (Theorema Egregium) *Jeżeli $F : U \to S$ jest odwzorowaniem parametryzującym powierzchnię S i takim, że $g_{12} = 0$ (tj. takim, że krzywe $s \mapsto F(s, u_2)$ i $t \mapsto F(u_1, t)$ są dla wszystkich wartości u_1 i u_2 prostopadłe), to*

$$K = -\frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\cdot\frac{\partial\sqrt{g_{22}}}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\cdot\frac{\partial\sqrt{g_{11}}}{\partial u_2}\right)\right]. \tag{3.8.5}$$

Dowód. Dowód jest w zasadzie czysto rachunkowy, więc go tylko naszkicujemy.

Dla uproszczenia oznaczeń przyjmijmy, że

$$F_i = (\partial F)/(\partial u_i), \;\; F_{ij} = (\partial^2 F)/(\partial u_i \partial u_j)$$

itd. Zatem, $g_{ij} = \langle F_i, F_j \rangle$, zaś $b_{ij} = \langle F_{ij}, N \rangle$, gdzie N jest jak zwykle jednostkowym polem wektorowym prostopadłym do S. Przyjmijmy, że

$$F_{11} = aF_1 + bF_2 + cN.$$

Ponieważ $g_{12} = 0$, więc

$$a = \langle F_{11}, F_1 \rangle \cdot g_{11}^{-1}.$$

Ponadto,

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial u_1} = 2\langle F_{11}, F_1 \rangle,$$

skąd

$$a = \frac{1}{2g_{11}} \cdot \frac{\partial g_{11}}{\partial u_1}.$$

Podobnie,

$$b = -\frac{1}{2g_{22}} \cdot \frac{\partial g_{11}}{\partial u_2} \quad \text{i} \quad c = b_{11}/$$

Zatem,

$$F_{11} = \frac{1}{2g_{11}} \cdot \frac{\partial g_{11}}{\partial u_1} \cdot F_1 - \frac{1}{2g_{22}} \cdot \frac{\partial g_{11}}{\partial u_2} \cdot F_2 + b_{11}N. \tag{3.8.6}$$

Podobnie,

$$F_{12} = \frac{1}{2g_{11}} \cdot \frac{\partial g_{11}}{\partial u_2} \cdot F_1 - \frac{1}{2g_{22}} \cdot \frac{\partial g_{22}}{\partial u_1} \cdot F_2 + b_{12}N \tag{3.8.7}$$

oraz

$$F_{22} = \frac{1}{2g_{11}} \cdot \frac{\partial g_{22}}{\partial u_1} \cdot F_1 - \frac{1}{2g_{22}} \cdot \frac{\partial g_{22}}{\partial u_2} \cdot F_2 + b_{22}N. \tag{3.8.8}$$

Ponieważ wektor $F_{112} - F_{121}$ jest równy zeru, więc wszystkie jego współrzędne w bazie $\{F_1, F_2, N\}$ również się zerują. Różniczkując prawe strony wzorów (3.8.6) i (3.8.7) odpowiednio względem u_2 i u_1, przedstawiając różnicę wyników różniczkowania we wspomnianej bazie przy użyciu wzorów (3.8.6) - (3.8.8) i wyliczając współczynnik przy F_2 otrzymujemy

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{4g_{11}g_{22}} \cdot \frac{\partial g_{11}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial g_{22}}{\partial u_1} - \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{\partial g_{11}/\partial u_2}{2g_{22}}\right) - \frac{1}{4g_{22}^2} \cdot \frac{\partial g_{11}}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial g_{22}}{\partial u_2} \\ &+ \frac{1}{4g_{11}g_{22}} \cdot \frac{\partial g_{11}}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial g_{22}}{\partial u_2} - \frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{\partial g_{22}/\partial u_1}{2g_{22}}\right) - \frac{1}{4g_{22}^2} \cdot \frac{\partial g_{22}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial g_{22}}{\partial u_1} \\ &- \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{g_{22}}. \end{aligned}$$

Dzieląc obie strony ostatniej równości przez g_{11}, przenosząc ostatni składnik (równy krzywiźnie Gaussa !) na lewą stronę i porządkując wyrazy pozostałe po prawej stronie otrzymujemy (3.8.5). ■

Stosunkowo łatwo pokazać, że współrzędne ortogonalne (tj, takie, że $g_{12} = 0$) istnieją na dowolnej powierzchni. Znacznie trudniej udowodnić, że na dowolnej powierzchni istnieją tzw. *współrzędne izotermiczne*, tj, takie współrzędne ortogonalne, dla których $g_{11} = g_{22}$. Istnienie takich współrzędnych pokazał S. S. Chern w [**Ch**]. Jeżeli $g_{11} = g_{22} = \rho^2$, to wzór (3.8.5) przyjmuje (wykazać !) prostą postać

$$K = -\frac{1}{\rho^2} \cdot \triangle \ln \rho, \tag{3.8.9}$$

gdzie — jak zwykle — $\triangle$ oznacza zwykły operator Laplace'a na $\mathbb{R}^2$.

3.9 Wzory Codazziego i podstawowe twierdzenie teorii powierzchni

Niech A i b będą odpowiednio operatorem Weingartena i drugą formą podstawową hiperpowierzchni S. Dla dowolnych pól wektorowych stycznych do S przyjmijmy

$$(\nabla_X A)(Y) = \nabla_X(AY) - A(\nabla_X Y) \tag{3.9.1}$$

oraz

$$(\nabla_X b)(Y, Z) = D_X(b(Y, Z)) - b(\nabla_X Y, Z) - b(Y, \nabla_X Z). \tag{3.9.2}$$

Proste rachunki pokazują, że operatory $\nabla A : (X, Y) \mapsto (\nabla_X A)(Y)$ oraz $\nabla b : (X, Y, Z) \mapsto (\nabla_X b)(Y, Z)$ są liniowe nad pierścieniem funkcji różniczkowalnych na S ze względu na wszystkie zmienne, tj., że jeśli np. X i Y są polami wektorowymi stycznymi do S, a $f : S \to \mathbb{R}$ jest funkcją różniczkowalną, to

$$(\nabla_{fX} A)(Y) = (\nabla_X A)(fY) = f \cdot (\nabla_X A)(Y).$$

Twierdzenie 12 *Dla dowolnych pól X i Y stycznych do S zachodzi równość*

$$(\nabla_X A)(Y) = (\nabla_Y A)(X). \tag{3.9.3}$$

Dowód. Ze względu na wpomnianą powyżej wieloliniowość operatora ∇A wystarczy udowodnić równość (3.9.3) w przypadku, gdy $X = \partial F / \partial u_i$ i $Y =$

$\partial F/\partial u_j$ dla pewnej parametryzacji F naszej hiperpowierzchni i dowolnych $i, j \leqslant n = \dim S$. W tym przypadku mamy

$$(\nabla_X A)(Y) = -\nabla_X D_Y N + D_{\nabla_X Y} N = -\left(\frac{\partial^2 N}{\partial u_i \partial u_j}\right)^{\top} + D_{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u_i \partial u_j}\right)^{\top}} N$$

i (3.9.3) wynika od razu poprzez zastosowanie równości

$$\partial^2 Z/\partial u_i \partial u_j = \partial^2 Z/\partial u_j \partial u_i$$

odpowiednio do $Z = N$ i $Z = F$. ∎

Wniosek 1 *Dla dowolnych pól wektorowych X, Y i Z stycznych do S mamy*

$$(\nabla_X b)(Y, Z) = (\nabla_Y b)(X, Z). \tag{3.9.4}$$

W konsekwencji, dla dowolnych i, j i $k \leqslant n = \dim S$ mamy

$$\frac{\partial b_{jk}}{\partial u_i} - \sum_l b_{jl} \Gamma^l_{ik} = \frac{\partial b_{ik}}{\partial u_j} - \sum_l b_{il} \Gamma^l_{jk}, \tag{3.9.5}$$

gdzie b_{rs} i Γ^m_{rs} są współczynnikami drugiej formy podstawowej i symbolami Christoffela na S.

Równania (3.9.3) oraz równoważne im (3.9.4) i (3.9.5) nazywa się *wzorami Codazziego.*

Na zakończenie sformułujmy (bez dowodu, który polega na zastosowaniu stosownych twierdzeń teorii równań różniczkowych) tzw. *podstawowe twierdzenie teorii powierzchni.*

Twierdzenie 13 *Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to by formy symetryczne $g = g_{11}x^2 + 2g_{12}xy + g_{22}y^2$ i $b = b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2$ określone w pewnym obszarze płaskim $D \subset \mathbb{R}^2$ były pierwszą i drugą formą podstawową pewnej powierzchni S potrzeba i wystarcza by g była określona dodatnio oraz by były spełnione równania Gaussa (3.8.3) z K danym przez (3.8.5) i Codazziego (3.9.5).* ∎

Literatura

[**Bie**] M. Biernacki, *Geometria różniczkowa, I i II*, PWN, Warszawa 1954/55.

[**Car**] M. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall, 1986.

[**Ch**] S. S. Chern, *An elementary proof of the existence of isotermal papameters on a surface*, Proc. Amer. Math. Soc. **6** (1955), 771–782.

[**GO**] J. Gancarzewicz, B. Opozda, *Wstęp do geometrii różniczkowej*, Wyd. UJ, Kraków 2003.

[**Goe**] A. Goetz, *Geometria różniczkowa*, PWN, Warszawa 1965.

[**Ku**] W. Kühnel, *Differential Geometry*, Amer. Math. Soc., 2002.

[**La**] S. Lang, Algebra, PWN, Warszawa.

[**Ni**] J. C. C. Nitsche, Vorlesungen über Minimalflächen, Springer Verlag, 1975.

[**Op**] J. Oprea, *Geometria różniczkowa i jej zastosowania*, PWN, Warszawa 2002.