MATERIAŁY NA XXVII KONFERENCJĘ SZKOLENIOWĄ Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ ZESPOLONEJ

2006 **Łódź** **str. 19**

O PEWNYCH „PIERWIASTKACH APROKSYMATYWNYCH” KRZYWEJ WIELOMIANOWEJ

Szymon Brzostowski (Łódź)

§0. Wstęp

Niech $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$, gdzie $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{C}[t]$, będzie parametryzacją wielomianową krzywej algebraicznej $V = V(f) \subset \mathbb{C}^2$ (takie krzywe są zwane krzywymi wielomianowymi). W pracy [Ż] H. Żołądek zaproponował konstrukcję (skończonego) ciągu wielomianów $\{F_i\}$ oraz pewnych ciągów liczbowych $\{k_i\}$, $\{\mu_i\}$, związanych z parametryzacją Φ, które następnie wykorzystał do dowodu twierdzenia Abhyankara-Moha o zanurzeniu prostej w płaszczyznę (o zastrzeżeniach odnośnie tego dowodu zob. uwagę 1.). Z kolei w teorii Abhyankara-Moha [A-M] z V związane są pewne skończone ciągi wielomianów (np. pierwiastki i pseudopierwiastki aproksymatywne) oraz pewne ciągi liczbowe dające informację o naturze osobliwości tej krzywej w nieskończoności (por. też [P1], [P2]).

Pojawia się pytanie, czy istnieje jakiś związek między obiektami określonymi przez Żołądka a tymi określonymi przez Abhyankara i Moha? Jest to tym bardziej ciekawe, gdyż wielomiany i ciągi charakterystyczne Abhyankara i Moha mają swe źródło w parametryzacji Puiseux jedynej gałęzi V w nieskończoności, natomiast liczby ciągów $\{\mu_i\}$ i $\{k_i\}$ oraz wielomiany ciągu $\{F_i\}$ powstają bezpośrednio z parametryzacji Φ, więc dla ich wyznaczenia nie ma potrzeby znać wcześniej ani wielomianu f ani - tym bardziej - rozwinięcia w szereg Puiseux jego gałęzi w nieskończoności.

Celem niniejszego artykułu jest odpowiedź na powyższe pytanie (popozycja 2.). Dowodzimy też podstawowych własności ciągu wielomianów $\{F_i\}$ - jego skończoności, nierozkładalności wielomianów F_i oraz tego, że ostatni z nich jest równy f.

§1. Konstrukcja Żołądka

Niech będzie dane generycznie różnowartościowe odwzorowanie wielomianowe $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2)$, tzn. $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{C}[t]$ i $\Phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$ jest różnowartościowe poza skończonym podzbiorem $\mathbb{C}$. Dla uproszczenia zapisów i w celu wykluczenia zdegenerowanych sytuacji zakładamy ponadto, że $\varphi_1(t) = t^k +$ *składniki niższych stopni*, $\varphi_2(t) = t^n +$ *składniki niższych stopni* oraz $k, n \geqslant 1$.

Oryginalna konstrukcja Żołądka ciągu $\{F_i\}$ nie jest wygodna do naszych badań, gdyż niejako nie wyróżnia żadnej ze zmiennych (używany jest tu stopień z wagami $\widetilde{\deg}$), podczas gdy w teorii Abhyankara i Moha w naturalny sposób zmienne pełnią różne role (tu występuje stopień $\deg_Y$ względem zmiennej Y). Dlatego pomocniczo wprowadzimy też pewną odmianę konstrukcji Żołądka. Aby uniknąć niepotrzebnych powtórzeń, przeprowadzimy jednocześnie obie te konstrukcje. Dla dowolnego $g \in \mathbb{C}[X,Y]$ będziemy więc pisać dla prostoty $\operatorname{Deg}(g)$, co będzie oznaczać bądź stopień $\deg_Y(g)$ tego wielomianu ze względu na Y, bądź też jego stopień $\widetilde{\deg}(g)$ z wagami określonymi wzorami $\widetilde{\deg}(X) := k$, $\widetilde{\deg}(Y) := n$.

Ustalmy zatem $\operatorname{Deg} \in \{\deg_Y, \widetilde{\deg}\}$. Określimy indukcyjnie ciąg wielomianów $\{F_i\}$ oraz ciągi liczbowe $\{k_i\}$, $\{\mu_i\}$ tak, by zachodziły zależności

$$F_1 = Y, \quad F_{i+1} = F_i^{k_i} + H_i, \quad \text{dla } i \geqslant 1,$$

gdzie $H_i \in \mathbb{C}[X,Y]$, $k_i \in \mathbb{N}$ mają tą własność, iż $\operatorname{Deg}(H_i) < \operatorname{Deg}\left(F_i^{k_i}\right)$, dla $i \geqslant 2$ oraz $\deg_\Phi\left(F_i^{k_i} + H_i\right) < \deg_\Phi\left(F_i^{k_i}\right)$, dla $i \geqslant 1$. Ponadto $\mu_i = \deg_\Phi(F_i)$, gdzie stosujemy zapis $\deg_\Phi(g) := \deg_t(g \circ \Phi)$, dla dowolnego $g \in \mathbb{C}[X,Y]$.

Mianowicie kładziemy najpierw $F_1 = Y$, $k_1 := \frac{k}{(k,n)}$, $n_1 := \frac{n}{(k,n)}$, $\mu_1 := n$, a następnie $F_2(X,Y) := Y^{k_1} - X^{n_1} + g(X,Y)$, gdzie g jest dowolnie wybranym wielomianem z $\mathbb{C}[X,Y]$, takim, że $\operatorname{Deg}(g) < \operatorname{Deg}\left(Y^{k_1}\right)$ i dla którego stopień $\deg_\Phi\left(Y^{k_1} - X^{n_1} + g(X,Y)\right)$ jest minimalny. Zatem $H_1 := -X^{n_1} + g(X,Y)$. Określamy $\mu_2 := \deg_\Phi(F_2)$. Jeśli $\mu_2 = -\infty$, tzn. $F_2 \circ \Phi = 0$ w $\mathbb{C}[t]$, to w tym miejscu przerywamy konstrukcję.

W $(i+1)$-ym, $i \geqslant 2$, kroku znajdujemy najpierw najmniejszą spośród tych liczb naturalnych $l \geqslant 2$, dla których istnieje wielomian $H \in \mathbb{C}[X,Y]$ o tej własności, że

$$(*_l) \qquad \operatorname{Deg}(H) < \operatorname{Deg}\left(F_i^l\right) \text{ oraz } \deg_\Phi\left(F_i^l + H\right) < \deg_\Phi\left(F_i^l\right).$$

Zbiór takich liczb l jest niepusty, bo należy do niego np. liczba k (tutaj można wziąć $H = \theta X^{\mu_i}$, dla odpowiedniego $\theta \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$; wtedy $\widetilde{\deg}(H) = k\mu_i = k\deg_\Phi(F_i)$, zaś z założenia indukcyjnego łatwo widzimy, że dla $i \geqslant 2$, $k\deg_\Phi(F_i) < k\widetilde{\deg}(F_i) = \widetilde{\deg}\left(F_i^k\right)$, czyli $\widetilde{\deg}(H) < \widetilde{\deg}\left(F_i^k\right)$ oraz oczywiście $\deg_Y(H) < \deg_Y\left(F_i^k\right)$, a więc łącznie: $\mathrm{Deg}(H) < \mathrm{Deg}\left(F_i^k\right)$). Tę najmniejszą liczbę l oznaczamy przez k_i (zauważmy, że $k_i \geqslant 2$). Następnie wybieramy dowolny spośród wielomianów H spełniających zależności $(*_l)$ z $l = k_i$, a przy tym taki, że $\deg_\Phi\left(F_i^{k_i} + H\right)$ przyjmuje najmniejszą możliwą wartość, którą oznaczamy μ_{i+1}. Tak wybrany wielomian oznaczamy przez H_i, po czym przyjmujemy $F_{i+1} := F_i^{k_i} + H_i$.

Jeśli $\mu_{i+1} = -\infty$, to w tym miejscu przerywamy konstrukcję.

Definicja 1. Określony powyżej ciąg $\{F_i\}$ będziemy nazywać *ciągiem* Deg-*pierwiastków aproksymatywnych w sensie Żołądka (dla parametryzacji* Φ*).*

Uwaga 1. *Z powyższej konstrukcji widać, że ciąg $\{F_i\}$ nie jest wyznaczony jednoznacznie - tworzymy całą rodzinę takich ciągów. Ponadto a priori nie jest jasne czy wielomiany $\{F_i\}$ są nieprzywiedlne a opisany proces skończony, a nawet jeśli jest - czy ostatni z otrzymanych wielomianów wynosi f. Wydaje się, że fakty te w* [Ż] *są udowodnione zbyt skrótowo (dla* $\mathrm{Deg} = \widetilde{\deg}$*). My wykażemy je poniżej (wnioski 1., 3. oraz 5.).*
Załóżmy w tym miejscu, że tak jest istotnie i niech $F_{h+1} = f$. Wtedy z opisanej konstrukcji wynika łatwo, że wielomian f ma przedstawienie w postaci

$$f(X,Y) = (...((Y^{k_1}+H_1(X,Y))^{k_2}+H_2(X,Y))^{k_3}+...+H_{h-1}(X,Y))^{k_h}+H_h(X,Y).$$

Skoro $f(\varphi_1,\varphi_2) = 0$ w $C[t]$, to

$$\varphi_2(t) = \sqrt[k_1]{-H_1(\varphi_1(t),\varphi_2(t)) + \sqrt[k_2]{-H_2(\varphi_1(t),\varphi_2(t)) + ... + \sqrt[k_h]{-H_h(\varphi_1(t),\varphi_2(t))}}},$$

dla odpowiednio wybranych gałęzi pierwiastków. Dalsze rozumowanie Autora w [Ż] *wydaje się przebiegać następująco. Jeśli weźmiemy wszystkie możliwe gałęzie pierwiastków w powyższej formule, to otrzymamy wszystkie rozwiązania równania*

$$f(\varphi_1(t),Y) = 0 \text{ w } C((t^{-1})).$$

Jest to kluczowa przesłanka w jego dowodzie twierdzenia Abhyankara-Moha. Jest to jednak nieprawda, gdyż dla $\varphi_1(t) = t^2+1$, $\varphi_2(t) = t^3+t+1$ mamy $f = Y^2 - X^3 + X^2 - 2Y + 1$, czyli tutaj $h = 1$, $k_1 = 2$, $f = F_2$. Skoro $k_1 = 2$, zatem - w myśl powyższego - pierwiastkami równania $f(\varphi_1(t),Y) = 0$ byłyby $\varphi_2(t)$ i $-\varphi_2(t)$. Ale $f(\varphi_1(t),-\varphi_2(t)) \neq 0$.

§2. Wiadomości pomocnicze

W tym paragrafie R będzie zawsze pierścieniem przemiennym z 1.

Pierwiastki aproksymatywne wielomianów

Definicja 2. Jeśli $f \in R[Y]$ jest wielomianem monicznym stopnia $k > 0$ i $1 \leqslant d \leqslant k$ jest dzielnikiem k odwracalnym w R, to *pierwiastkiem aproksymatywnym stopnia d z wielomianu f* nazywamy taki wielomian moniczny $\sqrt[d]{f} \in R[Y]$ stopnia k/d, dla którego ma miejsce nierówność

$$\deg(f - \left(\sqrt[d]{f}\right)^d) < \deg f - \deg \sqrt[d]{f}.$$

Zachodzi twierdzenie (patrz [A] - Theorem (4.4) i [P2] - własność 1.8).

Twierdzenie 1. Wielomian $\sqrt[d]{f} \in R[Y]$ istnieje i jest jednoznacznie wyznaczony. Ponadto, jeśli e jest dzielnikiem liczby k/d odwracalnym w R, to prawdziwa jest formuła $\sqrt[d]{\sqrt[e]{f}} = \sqrt[de]{f}$.

Rozwinięcia G-adyczne

Niech $G = (G_1, \ldots, G_p)$, $p \geqslant 1$, będzie układem wielomianów z $R[Y]$ takim, że:
i) G_i jest moniczny względem Y i $\deg G_i > 0$, dla $1 \leqslant i \leqslant p$;
ii) $\deg G_i \,|\, \deg G_{i+1}$ dla $1 \leqslant i \leqslant p-1$;
iii) $\deg G_1 = 1$.

Oznaczmy $A(G) := \{a = (a_1, \ldots, a_p) \in \mathbb{Z}^p : 0 \leqslant a_i < \deg G_{i+1}/\deg G_i$ dla $1 \leqslant i \leqslant p-1\}$. Ponadto będziemy też pisać $G^a = G_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot G_p^{a_p}$ dla $a \in \mathbb{Z}^p$.

Twierdzenie 2. ([A], Corollaries (2.14) & (2.9)) Każdy wielomian $f \in R[Y]$ ma jedyne przedstawienie w postaci

$$f = \sum_{a \in A(G)} f_a G^a,$$

gdzie $f_a \in R$ dla $a \in A(G)$ oraz $f_a = 0$ dla prawie wszystkich $a \in A(G)$ (tzn. dla wszystkich poza skończoną ilością). Przedstawienie to nazywamy *rozwinięciem G-adycznym wielomianu f*. Co więcej, $\deg f = \sup_{a \in A(G)} \deg(f_a G^a)$. W konsekwencji, jeśli $\deg f < \deg G^{a_0}$, dla pewnego $a_0 \in A(G)$, to G^{a_0} nie występuje w G-adycznym rozwinięciu f (tzn. $f_{a_0} = 0$).

Twierdzenie Newtona i ciągi charakterystyczne

Punktem wyjścia konstrukcji ciągów charakterystycznych dla danej krzywej algebraicznej jest klasyczne twierdzenie Newtona. Ponieważ interesuje nas tylko zachowanie się krzywej w nieskończoności, podamy je w nieco mniej ogólnej wersji.

Twierdzenie 3. (Newton) ([A], Theorem (5.14)) Niech $f \in \mathbb{C}\left(\left(X^{-1}\right)\right)[Y]$ będzie wielomianem nierozkładalnym i monicznym względem Y. Oznaczmy $k =$

$\deg_Y f$. Wówczas istnieje element $y_0 \in \mathbb{C}((\tau))$ taki, że $f\left(\tau^{-k}, y_0(\tau)\right) = 0$. Co więcej, dla dowolnego $y \in \mathbb{C}((\tau))$ o ostatniej własności zachodzi równość

i) $$f\left(\tau^{-k}, Y\right) = \prod_{\varepsilon \in U_k(\mathbb{C})} (Y - y(\varepsilon\tau)),$$

gdzie $U_k(\mathbb{C})$ jest zbiorem pierwiastków k-tego stopnia z 1;

ii) pierwiastki $y(\varepsilon\tau)$, $\varepsilon \in U_k(\mathbb{C})$ wielomianu $f\left(\tau^{-k}, Y\right) \in \mathbb{C}\left[\tau^{-k}\right][Y]$ są różne;

iii) $\mathrm{NWD}(\{k\} \cup \mathrm{Supp}_\tau(y(\tau))) = 1$, gdzie dla $y(\tau) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_l \tau^l$, z $a_l = 0$ gdy $l \ll 0$, określamy $\mathrm{Supp}_\tau(y(\tau)) := \{l \in \mathbb{Z} : a_l \neq 0\}$.

Załóżmy, że spełnione są założenia twierdzenia Newtona i $f\left(\tau^{-k}, y(\tau)\right) = 0$, dla pewnego $y \in \mathbb{C}((\tau))$. Zdefiniujemy teraz indukcyjnie liczbę $h \in \mathbb{N}$ oraz ciągi liczbowe $\{m_i\}_{0 \leqslant i \leqslant h+1}$ i $\{d_i\}_{1 \leqslant i \leqslant h+1}$. Przyjmujemy w tym celu $m_0 := -k$, $d_1 := k$, $m_1 := \inf(\mathrm{Supp}_\tau(y(\tau)))$, $d_2 := (m_1, d_1)$. Jeśli tutaj $d_2 = 1$, to kładziemy $h := 1$, $m_2 := +\infty$ i kończymy konstrukcję.

Jeśli $i \geqslant 1$ i mamy już określone liczby $m_0, \ldots, m_i$ oraz $d_1, \ldots, d_{i+1}$ i $d_{i+1} > 1$, to kładziemy

$$m_{i+1} := \min\left\{r \in \mathrm{Supp}_\tau(y(\tau)) : r \not\equiv 0 \pmod{d_{i+1}}\right\}, \quad d_{i+2} := (d_{i+1}, m_{i+1}).$$

Jeśli $d_{i+2} = 1$, to kładziemy $h := i + 1$, $m_{h+1} := +\infty$ i kończymy konstrukcję.

Liczba $h \in \mathbb{N}$ jest poprawnie określona na mocy warunku iii) twierdzenia Newtona.

Mając dane ciągi $\{m_i\}_{0 \leqslant i \leqslant h+1}$ i $\{d_i\}_{1 \leqslant i \leqslant h+1}$ definiujemy ciągi $\{r_i\}_{0 \leqslant i \leqslant h+1}$ i $\{\delta_i\}_{0 \leqslant i \leqslant h+1}$ wzorami

$$r_0 := m_0,\ r_i := \tfrac{m_1 d_1}{d_i} + \tfrac{1}{d_i} \sum_{2 \leqslant j \leqslant i} (m_j - m_{j-1})\, d_j \text{ dla } 1 \leqslant i \leqslant h \text{ oraz } r_{h+1} := +\infty;$$
$$\delta_i := -r_i \text{ dla } 0 \leqslant i \leqslant h + 1.$$

Wprost z powyższych definicji wynika prosta

Własność 1. Dla $2 \leqslant i \leqslant h$ mamy $d_i > d_{i+1}$ oraz $\delta_i < \delta_{i-1} \frac{d_{i-1}}{d_i}$, zaś dla $1 \leqslant i \leqslant h+1$: $(\delta_0, \ldots, \delta_{i-1}) = d_i$. W konsekwencji $\delta_i \notin (\delta_0, \ldots, \delta_{i-1})\,\mathbb{N}_0$ dla $2 \leqslant i \leqslant h$ (symbolem $(\delta_0, \ldots, \delta_i)\,\mathbb{N}_0$ oznaczamy podpółgrupę liczb naturalnych generowaną przez liczby $\delta_0, \ldots, \delta_i$).

Twierdzenia teorii Abhyankara

Niech $f \in \mathbb{C}[X, Y]$ będzie wielomianem nierozkładalnym i monicznym względem Y. Załóżmy, że $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2)$, $\varphi_i \in \mathbb{C}[t]$, $\deg \varphi_1 = k$, $\deg \varphi_2 = n$, $k, n \geqslant 1$ jest jego parametryzacją wielomianową, co oznacza, że dla dowolnego $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ zachodzi

$$f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \underset{t \in \mathbb{C}}{\exists}\, (x, y) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)),$$

oraz że Φ jest generycznie różnowartościowe. Wówczas krzywa $V = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 :$

$f(x, y) = 0\}$ jest wymierna ([W], Section 7.2) i ma jedną gałąź w nieskończoności ([A], Example (11.5)), więc f jest nierozkładalny jako element $\mathbb{C}\left(\left(X^{-1}\right)\right)[Y]$ ([A], Theorem (11.15)).

Korzystając z informacji z poprzedniego punktu możemy skojarzyć z f ciągi charakterystyczne $\{m_i\}_{0\leqslant i\leqslant h+1}$, $\{d_i\}_{1\leqslant i\leqslant h+1}$, $\{r_i\}_{0\leqslant i\leqslant h+1}$ i $\{\delta_i\}_{0\leqslant i\leqslant h+1}$. W tej sytuacji zachodzi następująca

Własność 2. ([A], Lemma (5.10)) $\deg_Y f = k$, $\deg_X f = n$, $\delta_0 = k$, $\delta_1 = n$.

Przyjmijmy

$$g_i := \begin{cases} Y, & \text{gdy } i = 1 \\ \sqrt[d_i]{f}, & \text{gdy } 2 \leqslant i \leqslant h+1 \end{cases},$$

gdzie f traktujemy jako wielomian zmiennej Y o współczynnikach w $R = \mathbb{C}[X]$ (patrz definicja 1.), oraz połóżmy $S := \mathbb{C}[\varphi_1(t), \varphi_2(t)] \subset \mathbb{C}[t]$. Dla dowolnego wielomianu $h \in \mathbb{C}[X, Y]$ będziemy oznaczać przez $\bar{h}$ wielomian $h(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \in S$.

W książce Abhyankara ([A], Theorem (8.5)) udowodnione jest następujące

Twierdzenie 4. i) Zbiór $\left\{\bar{g}^b : b \in B\right\}$, gdzie $B := \left\{b = (b_1, \ldots, b_h) \in \mathbb{Z}^h : 0 \leqslant b_i < d_i/d_{i+1}, \text{ dla } 1 \leqslant i \leqslant h\right\}$, jest wolną bazą S nad $\mathbb{C}[\varphi_1(t)]$ (tzn. dowolny element $F \in S$ ma jedyne przedstawienie w postaci $F = \sum_{b\in B} F_b \bar{g}^b$, gdzie $F_b \in \mathbb{C}[\varphi_1(t)]$ i tylko skończona ilość współczynników F_b jest niezerowa).

ii) Dla $F \in S$, jeśli $F = \sum_{b\in B} F_b \bar{g}^b$, z $F_b \in \mathbb{C}[\varphi_1(t)]$, to przy dowolnych $b, b' \in B$, $b \neq b'$ takich, że $F_b \neq 0 \neq F_{b'}$ ma miejsce nierówność $\deg_t\left(F_b \bar{g}^b\right) \neq \deg_t\left(F_{b'} \bar{g}^{b'}\right)$. W szczególności, jeśli $F \neq 0$, to istnieje jedyne $b_0 \in B$ o tej własności, że $\deg_t(F) = \deg_t\left(F_{b_0} \bar{g}^{b_0}\right) = \sup_{b\in B} \deg\left(F_b \bar{g}^b\right)$.

Uwaga 2. *Twierdzenie 4. w oryginale ma nieco inne (i ogólniejsze) sformułowanie. Mianowicie tam* $S = \mathbb{C}\left[\tau^{-k}, y(\tau)\right]$, *gdzie* $y(\tau) \in \mathbb{C}((\tau))$ *jest dowolnym szeregiem Laurenta takim, że* $f\left(\tau^{-k}, y(\tau)\right) = 0$ *w* $\mathbb{C}((\tau))$. *Punkt i) powyższego twierdzenia jest konsekwencją ciągu izomorfizmów* $\mathbb{C}\left[\tau^{-k}, y(\tau)\right] \underset{[A] \text{ str. } 61}{\simeq} \mathbb{C}\left[X^{-1}, Y\right] / \left(f\left(X^{-1}, Y\right)\right) \simeq \mathbb{C}[X, Y] / (f(X, Y)) \simeq \mathbb{C}[\varphi_1(t), \varphi_2(t)]$, *który sprowadza się do przyporządkowania* $g\left(\tau^{-k}, y(\tau)\right) \mapsto g(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ *dla* $g \in \mathbb{C}[X, Y]$, *przeprowadzającego pierścień* $\mathbb{C}\left[\tau^{-k}\right]$ *na* $\mathbb{C}[\varphi_1(t)]$. *Z kolei punkt ii) wynika z równości* $\operatorname{ord}_\tau g\left(\tau^{-k}, y(\tau)\right) = -\deg_t g(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$, *prawdziwej dla dowolnego wielomianu* $g \in \mathbb{C}[X, Y]$.

Podobna uwaga dotyczy

Twierdzenie 5. ([A], Theorem (8.2))

$$\deg_\Phi g_i = \deg_t \bar{g}_i = \delta_i \text{ dla } 1 \leqslant i \leqslant h+1.$$

Ponadto zachodzi

Twierdzenie 6. ([A], Theorem (13.2)) Niech $y(\tau) \in \mathbb{C}((\tau))$ będzie takim szeregiem Laurenta, że $f\left(\tau^{-k}, y(\tau)\right) = 0$. Wtedy

i) g_i jest nierozkładalny w $\mathbb{C}\left(\left(X^{-1}\right)\right)[Y]$, dla $1 \leqslant i \leqslant h+1$;

ii) jeśli $2 \leqslant i \leqslant h+1$, to istnieje $z(\tau) \in \mathbb{C}((\tau))$ takie, że $g_i\left(\tau^{-k/d_i}, z(\tau)\right) = 0$ i $\operatorname{ord}_\tau\left(z\left(\tau^{d_i}\right) - y(\tau)\right) = m_i$.

§3. Wyjaśnienie konstrukcji Żołądka

Niech ponownie $f \in \mathbb{C}[X, Y]$ będzie ustalonym wielomianem nierozkładalnym i monicznym względem Y, posiadającym generycznie różnowartościową parametryzację wielomianową $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2)$, $\varphi_i \in \mathbb{C}[t]$, $\varphi_1(t) = t^k +$ *składniki niższych stopni*, $\varphi_2(t) = t^n +$ *składniki niższych stopni*, $k, n \geqslant 1$.

Utrzymując oznaczenia z poprzedniego paragrafu, zauważmy najpierw, że zachodzi

Własność 3. Dla $1 \leqslant i \leqslant h$ mamy $g_{i+1} = g_i^{\frac{d_i}{d_{i+1}}} + h_i$, gdzie $h_i \in \mathbb{C}[X, Y]$, $\deg_Y h_i < \deg_Y g_i^{\frac{d_i}{d_{i+1}}}$.

<u>*Dowód*</u>. Dla $2 \leqslant i \leqslant h$ mamy $\sqrt[d_i/d_{i+1}]{\sqrt[d_{i+1}]{f}} = \sqrt[d_i]{f}$ (twierdzenie 1.), czyli $g_i = \sqrt[d_i/d_{i+1}]{g_{i+1}}$. Z definicji pierwiastka aproksymatywnego $\deg_Y(g_{i+1} - g_i^{\frac{d_i}{d_{i+1}}}) < \deg_Y g_{i+1} - \deg_Y g_i < \deg_Y g_{i+1} = \frac{n}{d_{i+1}} = \deg_Y g_i^{\frac{d_i}{d_{i+1}}}$. Z kolei $\deg_Y g_2 = \frac{k}{d_2} = \frac{d_1}{d_2}$, czyli $g_2 = Y^{\frac{d_1}{d_2}} +$ *składniki niższego stopnia* $= g_1^{\frac{d_1}{d_2}} +$ *składniki niższego stopnia* .

Q. E. D.

Pokażemy teraz:

Propozycja 1. Niech $\{F_i\}_{i<\mathfrak{M}}$, gdzie $\mathfrak{M} \in \mathbb{N}$ lub $\mathfrak{M} = \aleph_0$, będzie ciągiem pierwiastków aproksymatywnych w sensie Żołądka ze względu na $\mathrm{Deg} = \deg_Y$. Wtedy $\mathfrak{M} = h+2$ oraz zachodzi

$$(r_i) \quad \begin{cases} k_{i-1} = \frac{d_{i-1}}{d_i} \text{ dla } 2 \leqslant i < \mathfrak{M}; \\ F_i = g_i + R_i, \text{ gdzie } R_i \in \mathbb{C}[X, Y] \text{ oraz } \deg_Y R_i < \deg_Y g_i \text{ dla } 1 \leqslant i < \mathfrak{M}; \\ \mu_i = \deg_\Phi(F_i) = \deg_\Phi(g_i) = \delta_i \text{ dla } 1 \leqslant i < \mathfrak{M}. \end{cases}$$

<u>*Dowód*</u>. Dla $i = 1$ mamy z definicji $F_1 = Y = g_1$, zatem tutaj $R_1 = 0$. Zauważmy też, że z przyjętych określeń $2 < \min(\mathfrak{M}, h+2)$.

Załóżmy więc, że $2 \leqslant i < \mathfrak{M}$ i przypuśćmy, iż $i < h+2$ oraz (r_j) ma miejsce dla $1 \leqslant j < i$. Z konstrukcji ciągu $\{F_j\}$ wynika, że $F_i = F_{i-1}^{k_{i-1}} + H_{i-1}$, gdzie $\deg_Y(H_{i-1}) < \deg_Y\left(F_{i-1}^{k_{i-1}}\right)$, a z założenia indukcyjnego - że $F_{i-1} = g_{i-1} + R_{i-1}$, gdzie $\deg_Y R_{i-1} < \deg_Y g_{i-1}$. Łącząc te równości, otrzymujemy

$$(1) \qquad F_i = g_{i-1}^{k_{i-1}} + \widehat{H}_{i-1}, \text{ gdzie } \deg_Y \widehat{H}_{i-1} < \deg_Y\left(F_{i-1}^{k_{i-1}}\right) = \deg_Y\left(g_{i-1}^{k_{i-1}}\right).$$

Traktując układ $g := (g_1, \ldots, g_{h+1})$ jako układ wielomianów zmiennej Y o współczynnikach w $\mathbb{C}[X]$, możemy zastosować rozwinięcie g-adyczne do wielomianu $\widehat{H}_{i-1}$ i zapisać

$$F_i - g_{i-1}^{k_{i-1}} = \sum_{a\in A(g)} K_a g^a, \text{ przy } K_a \in \mathbb{C}[X] \text{ (por. twierdzenie 2.).}$$

Przypuśćmy, że $k_{i-1} < \frac{d_{i-1}}{d_i}$, a więc - że $(\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-2 \text{ razy}}, k_{i-1}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{h-i+2 \text{ razy}}) \in A(g)$. Uwzględniając (1), założenie indukcyjne oraz twierdzenie 2. stwierdzamy, że w sumie po prawej stronie ostatniej równości nie może występować $g_{i-1}^{k_{i-1}}$. Zatem

$$F_i = g_{i-1}^{k_{i-1}} + \sum_{a\in A(g)} K_a g^a$$

byłoby rozwinięciem g-adycznym F_i. Ale wtedy mielibyśmy

$$\bar{F}_i = \bar{g}_{i-1}^{k_{i-1}} + \sum_{a\in A(g)} \bar{K}_a \bar{g}^a \qquad \text{w } \mathbb{C}[\varphi_1(t), \varphi_2(t)]$$

i - wobec nierówności $i-1 < h+1$ -

$$\bar{F}_i = \bar{g}_{i-1}^{k_{i-1}} + \sum_{b\in B'} \bar{K}_b \bar{g}^b,$$

gdzie $B' := \left\{ b = (b_1, \ldots, b_h) \in \mathbb{Z}^h : 0 \leqslant b_j < d_j/d_{j+1}, \text{ dla } 1 \leqslant j \leqslant h, \, b \neq (\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-2 \text{ razy}}, k_{i-1}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{h-i+1 \text{ razy}}) \right\}$ oraz $\bar{K}_b := \bar{K}_{(b_1,\ldots b_h,0)}$, dla $b \in B'$, i byłoby to przedstawienie w bazie $\left\{\bar{g}^b : b \in B\right\}$. Zatem na mocy twierdzenia 4. ii) musiałoby być $\deg_t\left(\bar{K}_b\bar{g}^b\right) \neq \deg_t\left(\bar{K}_{b'}\bar{g}^{b'}\right)$ przy $b \neq b'$, $b, b' \in B$. To jest jednak sprzeczne z definicją F_i, gdyż w równości (2) musi następować uproszczenie: $\deg_t\left(\bar{F}_i\right) = \deg_\Phi(F_i) \underset{\text{Def. } F_i}{<} \deg_\Phi\left(F_{i-1}^{k_{i-1}}\right) \underset{\text{Zał. ind.}}{=} \deg_\Phi\left(g_{i-1}^{k_{i-1}}\right) = \deg_t\left(\bar{g}_{i-1}^{k_{i-1}}\right) \underset{\text{tw. 4 ii)}}{\leqslant} \deg_t\left(\bar{F}_i\right)$.

Zatem $k_{i-1} \geqslant \frac{d_{i-1}}{d_i}$. Z własności 3. mamy $g_i = g_{i-1}^{\frac{d_{i-1}}{d_i}} + h_{i-1}$, gdzie $\deg_Y h_{i-1} < \deg_Y g_{i-1}^{\frac{d_{i-1}}{d_i}}$. Wykorzystując założenie indukcyjne możemy więc napisać

$$(3) \qquad g_i = F_{i-1}^{\frac{d_{i-1}}{d_i}} + \widehat{h}_{i-1}, \text{ gdzie } \deg_Y \widehat{h}_{i-1} < \deg_Y g_{i-1}^{\frac{d_{i-1}}{d_i}} = \deg_Y F_{i-1}^{\frac{d_{i-1}}{d_i}}.$$

Przy tym mamy $\deg_\Phi(g_i) \underset{\text{tw. 5}}{=} \delta_i \underset{\text{wł. 1}}{<} \frac{d_{i-1}}{d_i}\delta_{i-1} \underset{\text{tw. 5}}{=} \deg_\Phi\left(g_{i-1}^{d_{i-1}/d_i}\right) \underset{\text{Zał. ind.}}{=} \deg_\Phi\left(F_{i-1}^{d_{i-1}/d_i}\right)$. Oznacza to, że spełnione są warunki $(*_l)$ z $l = \frac{d_{i-1}}{d_i}$ w i-tym kroku $\deg_Y$-konstrukcji Żołądka. Z definicji k_{i-1} wynika więc, że $k_{i-1} \leqslant \frac{d_{i-1}}{d_i}$. W konsekwencji $k_{i-1} = \frac{d_{i-1}}{d_i}$.

Mamy teraz po pierwsze: $F_i = F_{i-1}^{\frac{d_{i-1}}{d_i}} + H_{i-1}$, gdzie $\deg_Y H_{i-1} < \deg_Y F_{i-1}^{\frac{d_{i-1}}{d_i}}$, po drugie: $g_i = g_{i-1}^{\frac{d_{i-1}}{d_i}} + h_{i-1}$, gdzie $\deg_Y h_{i-1} < \deg_Y g_{i-1}^{\frac{d_{i-1}}{d_i}}$ i po trzecie: $\deg_Y F_{i-1}^{\frac{d_{i-1}}{d_i}} = \deg_Y g_{i-1}^{\frac{d_{i-1}}{d_i}} = \deg_Y g_i$. Łącząc te fakty i założenie indukcyjne, otrzymujemy

$$\begin{aligned} F_i =& F_{i-1}^{\frac{d_{i-1}}{d_i}} + H_{i-1} = (g_{i-1} + R_{i-1})^{\frac{d_{i-1}}{d_i}} + H_{i-1} \\ =& g_{i-1}^{\frac{d_{i-1}}{d_i}} + \tilde{H}_{i-1} = g_i - h_{i-1} + \tilde{H}_{i-1} = g_i + R_i, \end{aligned}$$

gdzie $\deg_Y R_i < \deg_Y g_i$, co stanowi drugą część tezy (r_i).

Pozostaje więc wykazać, że $\mu_i = \deg_\Phi(F_i) = \deg_\Phi(g_i) = \delta_i$. Otóż z (3) i definicji liczby μ_i wynika, że zachodzi nierówność $\mu_i \leqslant \delta_i$. Jeśli $\delta_i = -\infty$, to $\mu_i = -\infty$ i $\mathfrak{M} = i + 1 = h + 2$, i dowód indukcyjny, jak i dowód całej propozycji, jest zakończony. Załóżmy zatem, że $\delta_i > -\infty$.

Przypuśćmy, że $\mu_i < \delta_i$. Ale możemy znów napisać $R_i = F_i - g_i = \sum_{a \in A(g)} L_a g^a$, przy czym - jak już wiemy - $\deg_Y R_i < \deg_Y g_i$. Korzystając z twierdzenia 2. wnioskujemy, że w ostatniej sumie nie występują wyrazy g^a, gdzie $a = (a_1, \ldots, a_{h+1}) \in A(g)$ oraz $a_j \neq 0$ dla pewnego $j \geqslant i$. Przechodząc do pierścienia $\mathbb{C}[\varphi_1(t), \varphi_2(t)]$, otrzymujemy równość

$$\bar{R}_i = \sum_{a \in A(g)} \bar{L}_a \bar{g}^a = \sum_{b \in B} \bar{L}_b \bar{g}^b,$$

gdzie podobnie jak powyżej określamy $\bar{L}_b := \bar{L}_{(b_1, \ldots b_h, 0)}$, dla $b \in B$. Z twierdzenia 5. i z przypuszczenia mamy $\deg_\Phi(g_i) = \deg_\Phi(g_i - F_i) = \deg_\Phi R_i = \deg_t R_i = \deg_t\left(\bar{L}_{\hat{b}} \bar{g}^{\hat{b}}\right)$, dla pewnego $\hat{b} \in B$. Ponieważ jednak wtedy $\hat{a} := \left(\hat{b}_1, \ldots, \hat{b}_h, 0\right) \in A(g)$ i $L_{\hat{a}} \neq 0$, to musi być $\hat{b}_j = 0$ dla wszystkich $j \geqslant i \geqslant 2$. Ponownie z twierdzenia 5. wnioskujemy zatem, że $\delta_i \in (\delta_0, \ldots, \delta_{i-1})\mathbb{N}_0$, co jest niemożliwe wobec własności 1.

Uzyskana sprzeczność dowodzi, że $\mu_i = \delta_i$ i kończy dowód tezy (r_i). Skoro $\delta_i > -\infty$, to także $\mu_i > -\infty$, co daje $i + 1 < h + 2$ i $i + 1 < \mathfrak{M}$, czyli $i + 1 < \min(\mathfrak{M}, h + 2)$.

Indukcja kończy dowód propozycji. $\boxed{\mathcal{Q.E.D.}}$

Wniosek 1. Dowolny ciąg $\{F_i\}$ $\deg_Y$-pierwiastków aproksymatywnych w sensie Żołądka dla parametryzacji Φ jest skończony a jego ostatni wyraz jest równy f.

<u>*Dowód*</u>. Biorąc $i = h + 1$ w propozycji 1. mamy $\deg_\Phi(F_{h+1}) = \delta_{h+1} = -\infty$, a skoro f jest nierozkładalny, to wynika stąd że $f \mid F_{h+1}$. Ale $f = g_{h+1}$ (z definicji pierwiastka aproksymatywnego stopnia $d_{h+1} = 1$), $\deg_Y F_{h+1} = \deg_Y g_{h+1}$ (propozycja 1.) i oba te wielomiany są moniczne względem Y. Zatem $F_{h+1} = g_{h+1} = f$. $\boxed{\mathcal{Q.E.D.}}$

Jako bezpośrednią konsekwencję powyższej propozycji i własności 3. możemy sformułować

Wniosek 2. Do rodziny ciągów wielomianów, które można otrzymać w konstrukcji Żołądka ze względu na $\mathrm{Deg} = \deg_Y$ należy też ciąg $\{g_i\}_{1 \leqslant i \leqslant h+1}$. $\boxed{\mathcal{Q.E.D.}}$

Wniosek 3. Wielomiany ciągu $\{F_i\}_{1 \leqslant i \leqslant h+1}$ są nierozkładalne.

<u>*Dowód*</u>. Skoro $F_1 = Y$ i $F_{h+1} = f$ (wniosek 1.), to wniosek jest prawdziwy dla $i \in \{1, h+1\}$. Ustalmy więc dowolne $2 \leqslant i \leqslant h$ i przypuśćmy, że $F_i = f_1 \cdot f_2$, gdzie $f_1, f_2 \in \mathbb{C}[X, Y]$ są wielomianami dodatnich stopni, co oznacza w szczególności, że $\max(\deg_Y f_1, \deg_Y f_2) < \deg_Y F_i = \deg_Y g_i$. Ale wtedy - dokładnie tak, jak w dowodzie ostatniej tezy propozycji 1. - wnioskujemy najpierw, że w rozwinięciu $g = (g_1, \ldots, g_{h+1})$-adycznym wielomianów f_1, f_2 nie występują wielomiany g^a, gdzie $a = (a_1, \ldots, a_{h+1}) \in A(g)$ oraz $a_j \neq 0$ dla pewnego $j \geqslant i$, a następnie - że $\deg_t \bar{f}_1, \deg_t \bar{f}_2 \in (\delta_0, \ldots, \delta_{i-1})\mathbb{N}_0$, skąd także $\delta_i = \deg_t \bar{F}_i = \deg_t \bar{f}_1 + \deg_t \bar{f}_2 \in (\delta_0, \ldots, \delta_{i-1})\mathbb{N}_0$. Otrzymana sprzeczność dowodzi nierozkładalności wielomianu F_i. $\boxed{\mathcal{Q.E.D.}}$

W dalszej części będzie nam potrzebna

Własność 4. Dla $2 \leqslant i \leqslant h+1$ mamy $g_i = \left(Y^{k_1} - X^{n_1}\right)^{\frac{d_2}{d_i}}$ + *składniki niższego* $\widetilde{\deg}$-*stopnia.*

<u>*Dowód*</u>. Na mocy twierdzenia 6. i twierdzenia Newtona możemy napisać $g_i\left(\tau^k, Y\right) = \prod_{\varepsilon \in U_{k/d_i}(\mathbb{C})} \left(Y - z\left(\varepsilon\tau^{-d_i}\right)\right)$, dla pewnego $z(\tau) \in \mathbb{C}((\tau))$ takiego, że $\operatorname{ord}_\tau\left(z\left(\tau^{d_i}\right) - y(\tau)\right) = m_i$ oraz pewnego $y(\tau) \in \mathbb{C}((\tau))$ o tej własności, że $f\left(\tau^{-k}, y(\tau)\right) = 0$. Oznaczmy $y(\tau) = \sum_{j \geqslant -n} y_j \tau^j$, $z(\tau) = \sum_{j \geqslant -n/d_i} z_j \tau^j$, gdzie $y_j, z_j \in \mathbb{C}$. Wtedy $z\left(\tau^{d_i}\right) = \sum_{j \geqslant -n/d_i} z_j \tau^{d_i j}$. Skoro $i \geqslant 2$, to w szczególności zachodzi równość $y_{-n} = z_{-n/d_i}$. Możemy zatem napisać $g_i\left(\tau^k, Y\right) = \prod_{\varepsilon \in U_{k/d_i}(\mathbb{C})} (Y - y_{-n} \cdot (\varepsilon\tau^{-d_i})^{-n/d_i} + \sum_{j > -n/d_i} z_j (\varepsilon\tau^{-d_i})^j) = \prod_{\varepsilon \in U_{k/d_i}(\mathbb{C})} (Y - y_{-n} \cdot (\varepsilon\tau^{-d_i})^{-n/d_i}) + A_i(\tau, Y)$, gdzie $A_i(\tau, Y) \in \mathbb{C}\left(\left(\tau^{-1}\right)\right)[Y]$. Mamy $\prod_{\varepsilon \in U_{k/d_i}(\mathbb{C})} (Y - y_{-n} \cdot (\varepsilon\tau^{-d_i})^{-n/d_i})$ $= \prod_{0 \leqslant j < k/d_i} (Y - y_{-n} \cdot \varepsilon_0^{-n/d_i \cdot j} \tau^n)$, dla ustalonego (pierwotnego!) $\varepsilon_0 \in U_{k/d_i}(\mathbb{C})$. Ponieważ rząd elementu $\varepsilon_1 := \varepsilon_0^{n/d_i}$ w $U_{k/d_i}(\mathbb{C})$ wynosi $\frac{k/d_i}{(k/d_i, n/d_i)} = \frac{k}{(k,n)} = k_1$

(tzn. $\varepsilon_1 \in U_{k_1}(\mathbb{C})$), to

$$\prod_{\varepsilon \in U_{k/d_i}(\mathbb{C})} \left(Y - y_{-n} \cdot (\varepsilon\tau^{-d_i})^{-n/d_i}\right) = \prod_{0 \leqslant r < k_1} \prod_{\substack{0 \leqslant s < k/d_i \\ = d_2/d_i}} \left(Y - y_{-n} \cdot \varepsilon_1^{k_1 s + r}\tau^n\right) =$$

$$\prod_{0 \leqslant r < k_1} \prod_{0 \leqslant s < d_2/d_i} \left(Y - y_{-n} \cdot \varepsilon_1^{r}\tau^n\right) = \prod_{0 \leqslant r < k_1} \left(Y - y_{-n} \cdot \varepsilon_1^{r}\tau^n\right)^{d_2/d_i} =$$

$(Y^{k_1} - (y_{-n} \cdot \tau^n)^{k_1})^{d_2/d_i} = (Y^{k_1} - y_{-n}^{k_1} \cdot \tau^{kn_1})^{d_2/d_i} \in \mathbb{C}\left[\tau^k, Y\right]$.

Zatem także $A_i \in \mathbb{C}\left[\tau^k, Y\right]$. Dla dowolnego jednomianu $\tau^a Y^b$ występującego w A_i mamy $a < \left(\frac{k}{d_i} - b\right)n$, skąd $a + bn < \frac{kn}{d_i}$. Ponieważ $k \,|\, a$, to podstawiając $\tau^k = X$ otrzymamy $\widetilde{\deg}\left(X^{a/k}Y^b\right) < \frac{kn}{d_i}$. Stąd także $\widetilde{\deg}\left(A_i(X,Y)\right) < \frac{kn}{d_i} = \widetilde{\deg}(Y^{k_1} - y_{-n}^{k_1} \cdot X^{n_1})^{d_2/d_i}$.

Pozostaje zauważyć, że $y_{-n}^{k_1} = 1$. Skoro $g_{h+1} = f$, to $\deg_\Phi g_{h+1} = -\infty$. Gdyby $y_{-n}^{k_1} \neq 1$, to z faktu, że φ_1, φ_2 są unormowane mielibyśmy $\deg_\Phi(Y^{k_1} - y_{-n}^{k_1} \cdot X^{n_1})^{d_2} = nk$. Ale $kn > \widetilde{\deg}\left(A_{h+1}(X,Y)\right)$ i oczywiście $\widetilde{\deg}\left(A_{h+1}(X,Y)\right) \geqslant \deg_\Phi\left(A_{h+1}(X,Y)\right)$. Zatem $\deg_\Phi(Y^{k_1} - y_{-n}^{k_1} \cdot X^{n_1})^{d_2} > \deg_\Phi(A_{h+1}(X,Y))$, co oznaczałoby, że $\deg_\Phi g_{h+1} = kn$. Otrzymana sprzeczność kończy dowód własności. $\boxed{\text{Q.E.D.}}$

Wniosek 4. Dla $2 \leqslant i \leqslant h$ mamy $g_{i+1} = g_i^{\frac{d_i}{d_{i+1}}} + h_i$, gdzie $h_i \in \mathbb{C}[X,Y]$ i $\widetilde{\deg}(h_i) < \widetilde{\deg}(g_i^{\frac{d_i}{d_{i+1}}})$.

<u>*Dowód*</u>. Z poprzedniej własności mamy $g_i = \left(Y^{k_1} - X^{n_1}\right)^{\frac{d_2}{d_i}} +$ *składniki niższego* $\widetilde{\deg}$*-stopnia*. Zatem $g_i^{\frac{d_i}{d_{i+1}}} = \left(Y^{k_1} - X^{n_1}\right)^{\frac{d_2}{d_{i+1}}} +$ *składniki niższego* $\widetilde{\deg}$*-stopnia* $= g_{i+1} +$ *składniki niższego* $\widetilde{\deg}$*-stopnia.* $\boxed{\text{Q.E.D.}}$

Wykażemy teraz

Lemat 1. Jeżeli $\{F_i\}$ jest ciągiem $\widetilde{\deg}$-pierwiastków aproksymatywnych w sensie Żołądka dla parametryzacji Φ, to spełnione są też warunki

$$\deg_Y(H_i) < \deg_Y\left(F_i^{k_i}\right), \text{ przy } i \geqslant 1.$$

<u>*Dowód*</u>. Weźmy dowolny ciąg $\{F_i\}$ $\widetilde{\deg}$-pierwiastków aproksymatywnych w sensie Żołądka dla parametryzacji Φ.

Mamy z definicji $F_2(X,Y) = Y^{k_1} - X^{n_1} + g(X,Y)$, gdzie $\widetilde{\deg}(g) < \widetilde{\deg}\left(Y^{k_1}\right)$. Ale przecież $\widetilde{\deg}(g) \geqslant n \cdot \deg_Y(g)$ i $\widetilde{\deg}\left(Y^{k_1}\right) = n \cdot \deg_Y\left(Y^{k_1}\right)$. Skoro $F_1 = Y$, to mamy stąd $k_1 = \underline{\deg_Y\left(F_1^{k_1}\right) > \deg_Y(g) = \deg_Y(H_1)}$ i $\deg_Y F_2 = k_1$.

Wystarczy jeszcze pokazać, że w przedstawieniu $F_{i+1} = F_i^{k_i} + H_i$, dla $i \geqslant 2$, spełniony jest warunek $\deg_Y H_i < \deg_Y F_i^{k_i}$. Otóż z rekurencyjnej definicji F_{i+1} wynika, że jego forma najwyższego stopnia względem $\widetilde{\deg}$ jest postaci

$\left(Y^{k_1} - X^{n_1}\right)^{k_2 \cdot \ldots \cdot k_i}$. Zatem $\widetilde{\deg}\,(F_{i+1}) = \widetilde{\deg}\left(Y^{k_1} - X^{n_1}\right)^{k_2 \cdot \ldots \cdot k_i} = n \cdot k_1 \cdot \ldots \cdot k_i$. Skoro $\widetilde{\deg}\,(H_i) \geqslant n \cdot \deg_Y(H_i)$, to prowadzi to do nierówności $\deg_Y(H_i) < k_1 \cdot \ldots \cdot k_i$. Wiedząc zatem, iż $\deg_Y F_i = k_1 \cdot \ldots \cdot k_{i-1}$, można wywnioskować, że $\underline{\deg_Y(H_i) < \deg_Y F_i^{k_i}}$, czyli że $\deg_Y F_{i+1} = k_1 \cdot \ldots \cdot k_i$. Indukcja kończy rozumowanie. $\boxed{\mathcal{Q.E.D.}}$

Z lematu 1. wynika, że warunki $(*_{k_i})$ w konstrukcji Żołądka względem $\widetilde{\deg}$ pociągają za sobą analogiczne warunki względem $\deg_Y$. Aby wyjaśnić, jakie ciągi liczbowe i wielomiany powstają w tej konstrukcji udowodnimy teraz

Propozycja 2. Niech $\{F_i\}_{i<\mathfrak{M}}$, gdzie $\mathfrak{M} \in \mathbb{N}$ lub $\mathfrak{M} = \aleph_0$, będzie ciągiem $\widetilde{\deg}$-pierwiastków aproksymatywnych w sensie Żołądka dla parametryzacji Φ. Wtedy jest to też ciąg $\deg_Y$-pierwiastków aproksymatywnych w sensie Żołądka dla parametryzacji Φ. Ponadto $\mathfrak{M} = h+2$ oraz zachodzi

$$(s_i)\quad \left[\begin{array}{l} k_{i-1} = \frac{d_{i-1}}{d_i} \text{ dla } 2 \leqslant i < \mathfrak{M}; \\ F_i = g_i + R_i, \text{ gdzie } R_i \in \mathbb{C}[X,Y] \text{ oraz } \widetilde{\deg}\,(R_i) < \widetilde{\deg}\,(g_i) \text{ dla } 1 \leqslant i < \mathfrak{M}; \\ \mu_i = \deg_\Phi(F_i) = \deg_\Phi(g_i) = \delta_i \text{ dla } 1 \leqslant i < \mathfrak{M}. \end{array}\right.$$

__Dowód__. Na potrzeby dowodu będziemy oznaczać przez $\left\{F_j^Y\right\}$, $\{k_j^Y\}$ i $\{\mu_j^Y\}$ ciągi wielomianów i ciągi liczbowe powstałe w $\deg_Y$-konstrukcji Żołądka dla Φ (przy naturalnej konwencji zamiany nazewnictwa).

Zależności (s_1) są oczywiste. Pokażemy, że zachodzą też relacje (s_2). Dwie pierwsze z nich wynikają z definicji k_1 i F_2 oraz z własności 4. Z definicji F_2, własności 4., twierdzenia 5. i minimalności μ_2 wnioskujemy nierówność $\mu_2 \leqslant \delta_2$. Z drugiej strony $F_2 = Y^{k_1} - X^{n_1} + g(X,Y)$, gdzie $\widetilde{\deg}(g) < \widetilde{\deg}\left(Y^{k_1}\right)$, więc z lematu 1. - także $\deg_Y(g) = \deg_Y(H_1) < \deg_Y\left(Y^{k_1}\right)$. Zatem z definicji μ_2^Y i F_2^Y mamy $\delta_2 \underset{\text{Prop. 1.}}{=} \mu_2^Y \leqslant \deg_\Phi(F_2) = \mu_2$. W konsekwencji $\mu_2 = \delta_2$. Podobnie przebiega ogólne rozumowanie.

Przypuśćmy mianowicie, że zachodzą warunki (s_j) dla $1 \leqslant j < i$, $i \geqslant 3$. Jeśli $i < h+2$, to konstrukcja ciągu $\{F_j\}$ nie jest zakończona i $\mathfrak{M} > i$. Jeśli zaś $i = h+2$, to $\mu_{i-1} = -\infty$, więc $\mathfrak{M} = i$ i dowód propozycji jest zakończony. Niech więc $i < h+2$. Z definicji ciągu $\{F_j\}$ mamy $F_i = F_{i-1}^{k_{i-1}} + H_{i-1}$, gdzie $\widetilde{\deg}\,(H_{i-1}) < \widetilde{\deg}\left(F_{i-1}^{k_{i-1}}\right)$. Z lematu 1. wynika, że $\deg_Y(H_j) < \deg_Y\left(F_j^{k_j}\right)$ dla $1 \leqslant j < \mathfrak{M}$, więc z założenia indukcyjnego i propozycji 1. wnioskujemy, że ciąg $\{F_1, ..., F_{i-1}\}$ może być uzupełniony do pewnego ciągu $\left\{F_j^Y\right\}$ $\deg_Y$-pierwiastków aproksymatywnych w sensie Żołądka dla parametryzacji Φ. Ponieważ mamy też $\deg_\Phi(F_i) < \deg_\Phi\left(F_{i-1}^{k_{i-1}}\right)$, to z minimalności liczby k_{i-1}^Y, $k_{i-1}^Y \leqslant k_{i-1}$. Z propozycji 1. $k_{i-1}^Y = \frac{d_{i-1}}{d_i}$, a więc $\frac{d_{i-1}}{d_i} \leqslant k_{i-1}$. Z kolei z wniosku 4. i z założenia indukcyjnego możemy napisać

$$
(4) \qquad \begin{aligned} g_i = g_{i-1}^{\frac{d_{i-1}}{d_i}} + h_{i-1} = F_{i-1}^{\frac{d_{i-1}}{d_i}} + \widehat{H}_{i-1}, \text{ gdzie } \widetilde{\deg}(\widehat{H}_{i-1}) &< \widetilde{\deg}(g_{i-1}^{\frac{d_{i-1}}{d_i}}) \\ &= \widetilde{\deg}(F_{i-1}^{\frac{d_{i-1}}{d_i}}). \end{aligned}
$$

Ponadto $\deg_\Phi(g_i) = \delta_i < \delta_{i-1}\frac{d_{i-1}}{d_i} = \deg_\Phi(F_{i-1}^{\frac{d_{i-1}}{d_i}})$ (tw. 5., wł. 1., zał. ind.). Zatem z definicji k_{i-1} wynika, że $k_{i-1} \leqslant \frac{d_{i-1}}{d_i}$, a stąd $k_{i-1} = \frac{d_{i-1}}{d_i}$.

Skoro tak, to z równości (4) wnioskujemy, że $\mu_i \leqslant \deg_\Phi(g_i) = \delta_i$. Ale przecież pokazaliśmy już, że $F_i = F_{i-1}^{\frac{d_{i-1}}{d_i}} + H_{i-1}$, gdzie $\deg_Y(H_{i-1}) < \deg_Y(F_{i-1}^{\frac{d_{i-1}}{d_i}})$ oraz $\deg_\Phi(F_i) < \deg_\Phi(F_{i-1}^{\frac{d_{i-1}}{d_i}})$. Stąd mamy $\delta_i = \deg_\Phi\left(F_i^Y\right) \leqslant \deg_\Phi(F_i) = \mu_i$. W konsekwencji $\delta_i = \mu_i$.

Wreszcie na mocy wniosku 4. mamy równość $g_i = g_{i-1}^{\frac{d_{i-1}}{d_i}} + h_{i-1}$, gdzie $\widetilde{\deg}(h_{i-1}) < \widetilde{\deg}(g_{i-1}^{\frac{d_{i-1}}{d_i}})$, z której - po uwzględnieniu założenia indukcyjnego - wynika, że $F_i = F_{i-1}^{\frac{d_{i-1}}{d_i}} + H_{i-1} = g_i + R_i$, przy $\widetilde{\deg}(R_i) < \widetilde{\deg}(g_i)$. Kończy to nasz dowód indukcyjny relacji (s_j). Widać teraz, że pierwsza część tezy wynika z tych zależności i propozycji 1., gdyż pokazują one, że ciąg $\{F_i\}$ może być otrzymany w konstrukcji Żołądka względem $\deg_Y$. $\boxed{\mathcal{Q.E.D.}}$

Bezpośrednio z powyższej propozycji oraz wniosków 1-3 wynikają

Wniosek 5. Dowolny ciąg $\{F_i\}$ $\widetilde{\deg}$-pierwiastków aproksymatywnych w sensie Żołądka dla parametryzacji Φ jest skończony, jego elementy są nierozkładalne w $\mathbb{C}[X, Y]$ a jego ostatni wyraz jest równy f.

Wniosek 6. Do rodziny ciągów wielomianów, które można otrzymać w konstrukcji Żołądka ze względu na $\mathrm{Deg} = \widetilde{\deg}$ należy też ciąg $\{g_i\}_{1 \leqslant i \leqslant h+1}$.

Uwaga 3. *Stosując kryterium nierozkładalności Abhyankara* ([A], Theorem (12.4)) *można pokazać, że wszystkie wielomiany ciągu* $\{F_i\}$ $\deg_Y$*-pierwiastków aproksymatywnych w sensie Żołądka dla parametryzacji* Φ *mają jedną gałąź w nieskończoności, a następnie - podobnie jak własność 4. - że ich część wiodąca ze względu na* $\widetilde{\deg}$ *jest odpowiedniej postaci. To dowodzi, że obie konstrukcje są równoważne, tzn. prowadzą do tych samych rodzin wielomianów.*

Zauważmy na zakończenie, że chociaż nasze rozważania prowadziliśmy nad $\mathbb{C}$*, to zarówno konstrukcję Żołądka jak i powyższe rozumowania można przenieść na dowolne ciała algebraicznie domknięte (przy odpowiednich założeniach w przypadku ciał skończonej charakterystyki).*

Literatura

[A] Abhyankar, S. S. *„Expansion Techniques in Algebraic Geometry"*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1977.

[A-M] Abhyankar, S. S. & Moh, T. T. *„Newton-Puiseux expansion and generalized Tschirnhausen transformation I, II"*, J. reine angew. Math. 260, 47-83 and 261, 29-54 (1973).

[P1] Płoski, A. *„Pierwiastki aproksymatywne wielomianów według S. S. Abhyankara i T. T. Moha"*, Materiały XIV Konferencji Szkoleniowej z Teorii Zagadnień Ekstremalnych, Wyd. UŁ., Łódź, 45-52 (1993).

[P2] Płoski, A. *„Twierdzenia podstawowe o pierwiastkach aproksymatywnych wielomianów"*, Materiały XV Konferencji Szkoleniowej z Analizy i Geometrii Zespolonej, Wyd. UŁ., Łódź, 51-61 (1994).

[W] Walker R. J. *„Algebraic Curves"*, Dover Publications, INC., New York, 1962.

[Ż] Żołądek, H. *„A new topological proof of the Abhyankar-Moh theorem"*, Mathematische Zeitschrift 244, 689-695 (2003).

"APPROXIMATE ROOTS" OF A POLYNOMIAL CURVE

In this paper we clarify a specific construction, due to H. Żołądek [Ż], of sequences $\{F_i\} \subset \mathbb{C}[X,Y]$ of "approximate roots" for a polynomial curve $f \in \mathbb{C}[X,Y]$, determined from its polynomial parametrization. We prove that the construction process is finite and produces irreducible polynomials. In particular, in this way we obtain the original Abhyankar-Moh's approximate roots of f.

Łódź, 9 – 13 stycznia 2006 r.