MATERIAŁY IX KONFERENCJI SZKOLENIOWEJ
Z TEORII ZAGADNIEŃ EKSTREMALNYCH

1987 Łódź s. 15

CYKLE GRANICZNE CZYLI XVI PROBLEM HILBERTA

Z. Denkowska (Kraków)

Sformułowany ok. 100 lat temu XVI problem Hilberta ([5]) zawierał m. in. pytanie o liczbę cykli granicznych układu dynamicznego

$$(1) \qquad \dot{x} = f(x,y)$$
$$\dot{y} = g(x,y),$$

gdzie prawe strony f,g są wielomianami dwóch zmiennych.

UWAGA. W dalszym ciągu przez trajektorie, cykle graniczne itp. pola wektorowego $f(x,y)\partial/\partial x + g(x,y)\partial/\partial y$ będziemy rozumieć trajektorie i cykle graniczne zadanego tym polem układu dynamicznego postaci (1).

DEFINICJA 1. *Cyklem granicznym* układu dynamicznego (pola wektorowego) nazywamy rozwiązanie okresowe izolowane w zbiorze trajektorii okresowych (tj. takie rozwiązanie okresowe, którego trajektoria K posiada otoczenie nie przecinające żadnych innych trajektorii okresowych).

Motywacją nazwy "cykl graniczny" jest tw. Poincaré-Bendixona ([9], [13]), z którego wynika, że tak zdefiniowany cykl graniczny jest zbiorem granicznym (stabilnym lub niestabilnym) dla dostatecznie bliskich trajektorii.

UWAGA. Poincaré ([12]) wprowadził pojęcie odwzorowania powrotu, zwanego też odwzorowaniem Poincarégo ([9], [13]). Przytoczymy tu jego konstrukcję.

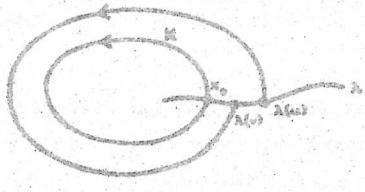
Ustalmy trajektorię okresową K zadanego układu dynamicznego oraz ustalmy krzywą daną równaniem parametrycznym $x = \lambda(u)$ klasy C^r, transwersalną do K w punkcie x_o. Oznaczmy przez $\phi(t,x)$ potok naszego układu. Wówczas funkcja

$$\phi(t,\lambda(u)) - \lambda(v)$$

spełnia założenia twierdzenia o funkcjach uwikłanych w punkcie (τ, u_o, u_o), gdzie τ jest okresem trajektorii K, u_o parametrem takim, że $\lambda(u_o) = x_o$. Stąd (cf. [13]) łatwo wyliczyć odwzorowanie Poincaré:

$$v = L(u); \qquad u \in \text{otoczenie } u_o$$

pozwalające przyporządkować parametrowi punktu startu u parametr v punktu pierwszego powrotu do krzywej λ.



Klasa odwzorowania L jest oczywiście równa minimum klas λ i ϕ. W szczególności gdy prawe strony układu dynamicznego są analityczne i krzywa λ jest analityczna, odwzorowanie L jest analityczne. Równanie $L(u) = u$ jest oczywiście równaniem na trajektorie okresowe przecinające krzywą λ w otoczeniu punktu x_o. W przypadku gdy L jest analityczna, z zasady identyczności dla funkcji analitycznych otrzymujemy następującą równoważność:

K jest cyklem granicznym $\Longleftrightarrow$ kiełek L w u_o jest różny od kiełka identyczności.

Wróćmy teraz do pytania Hilberta. Jest ono formułowane w sposób następujący: Czy można wskazać dla każdego $d \in \mathbb{N}$ taką stałą $N(d)$, że jeżeli prawe strony układu dynamicznego (1) są wielomianami stopnia $\leq d$, to ilość cykli granicznych (1) nie przekracza $N(d)$? Nasuwa się tu naturalne pytanie: czy prawe strony wielomianowe automatycznie gwarantują skończoną ilość cykli granicznych (1). Odpowiedź nie jest bynajmniej łatwa, a pytanie znane jest jako problem Dulaca od czasu, gdy Dulac w swojej pracy [3] z roku 1923 podał dowód skończoności liczby cykli granicznych, który to dowód później okazał się niekompletny. Luki w dowodzie wykrył Iljašenko w roku 1976 (obszerny komentarz można znaleźć w [7]). W r. 1985 Ramon [1] podał dowód skończoności liczby cykli granicznych (1) dla f,g wielomianów kwadratowych. Pod koniec roku 1986 Iljašenko zaanonsował istnienie pełnego dowodu problemu Dulaca (jeszcze nieopublikowane).

Wróćmy do sprawy oszacowania ilości cykli granicznych w zależności od stopni wielomianów f,g. Tu zostało zrobione jeszcze mniej, a problem ma za sobą historię pomyłek podobnie jak problem skończoności. W roku 1955 Petrovski i Landis podali sposób wyliczenia $N(d)$, przy czym $N(2)$ miało być równe 3 (cf. [10],

[11]). Iljašenko pokazał jednak w roku 1969, [6], że wyliczenie to jest fałszywe, a w roku 1980 Shi Sonling [14] podał przykład pola kwadratowego ($d = 2$) o czterech cyklach granicznych. Przykład Shi Sonlinga jest omówiony w pracy [7]. Problem wyliczenia $N(d)$ jest więc wciąż jeszcze otwarty i wszelkie otrzymane wyniki, aczkolwiek bardzo ciekawe (Bautin [2], Françoise, Pugh [4]), są wynikami częściowymi. Wiele uwag historycznych można znaleźć w przekrojowym opracowaniu R. Moussu [8].

Celem mojego referatu będzie przedstawienie niektórych wyników z pracy Françoise i Pugh [4] z roku 1986 otrzymanych przez zastosowanie pewnych faktów z teorii zbiorów subanalitycznych do układów dynamicznych (co było podejściem bardzo nowatorskim). Dlatego podam w tym miejscu podstawowe definicje oraz użyte dalej twierdzenia.

Teoria zbiorów subanalitycznych wyrosła na gruncie teorii zbiorów semi-analitycznych prof. Łojasiewicza [21] i została opracowana niezależnie przez: Gabriełowa [19], Hironakę [20] oraz grupę prof. Łojasiewicza ([16], [17], [18], przeglądem otrzymanych wyników jest referat [15] zawierający również obszerną bibliografię).

Wymienione tu opracowania teorii zbiorów subanalitycznych różnią się bardzo pod względem metod, ale uzyskane wyniki, w szczególności te, które będziemy tu cytować, są praktycznie te same na gruncie każdej z tych teorii.

DEFINICJA 2 ([20]). Zbiór E zawarty w rozmaitości analitycznej rzeczywistej M nazywamy semi-analitycznym w M, jeżeli dla każdego $x \in M$ istnieje U otoczenie x w M oraz skończona ilość funkcji rzeczywistych w U takich, że

$$E \cap U = \bigcup \bigcap \{x \in U,\ f_i(x) = 0,\ g_{ij}(x) > 0\}.$$

Klasa zbiorów semi-analitycznych jet zamknięta ze względu na skończone operacje teoriomnogościowe, ale nie jest zamknięta ze względu na rzutowanie zbiorów semi-analitycznych względnie zwartych (czy też, równoważnie, branie ich obrazów przez odwzorowania analityczne właściwe), cf. [21].

Stąd potrzeba rozszerzenia tej klasy do klasy zbiorów subanalitycznych:

DEFINICJA 3 ([19], [16], [15]). (Definicja przyjęta przez Hironakę była inna, ale na gruncie jego teorii równoważna poniższej). Zbiór E zawarty w rozmaitości analitycznej rzeczywistej M nazywamy *subanalitycznym* w M, jeżeli dla każdego $x \in M$ istnieje U otoczenie x w M oraz zbiór A semi-analityczny i względnie zwarty w pewnej rozmaitości analitycznej rzeczywistej $M \times N$ takie, że

$$E \cap U = \pi(A),$$

gdzie $\pi : M \times N \to M$ rzutowanie naturalne. (Uwaga: rzutowanie podzbiorów semi-analitycznych nie-względnie zwartych doprowadziłoby do otrzymania wszystkich podzbiorów M).

Klasa zbiorów subanalitycznych jest również zamknięta ze względu na skończone operacje teoriomnogościowe (co nie jest łatwe do pokazania w przypadku uzupełnienia, cf. [19], [16]), a ponadto jest zamknięta ze względu na rzutowanie zbiorów względnie zwartych, ogólniej: względnie zwartych w kierunku rzutowania, cf. [16]).

UWAGA. Nie należy mylić zbiorów semi- i subanalitycznych z analitycznymi. Zbiór analityczny bowiem semi- ani subanalityczny być nie musi (przykładem jest wykres $\sin \frac{1}{x}$, $x > 0$) ponieważ wg definicji zbiór analityczny jest to zbiór opisany w otoczeniu *każdego swojego punktu* jako zbiór zer funkcji analitycznych, podczas gdy zbiór semi-analityczny ma być opisany alternatywą i koniunkcją nierówności *w otoczeniu każdego punktu rozmaitości, w której leży.* W związku z tym zbiór postaci $\{x \in V, \ \phi(x) = 0\}$ jest semi-analityczny, jeżeli założymy, że ϕ jest analityczna *w otoczeniu domknięcia* V oraz V semi-analityczny. Zbiory semi- i subanalityczne mogą być natomiast uważane za uogólnienie zbiorów semi - algebraicznych ([21]).

Françoise i Pugh posługują się w swojej pracy następującym faktem z teorii zbiorów subanalitycznych.

TWIERDZENIE I. Niech $E \subset M \times N$ będzie zbiorem subanalitycznym względnie zwartym (M,N rozmaitości analityczne rzeczywiste) i oznaczmy przez E_y przekrój

$$E_y = \{x \in M: \quad (x,y) \in E\}$$

wówczas istnieje stała C taka, że dla każdego $y \in N$ ilość składowych spójnych $E_y \leq C$.

Dwa różne dowody tego faktu znajdują się w [18] i [19], jeszcze inny dowód został podany przez Teissier (vd. bibliografia w [4]). Wprowadzamy teraz, za [4], następujące oznaczenia

$$\mathcal{S} = \{f(x,y)\partial/\partial x + g(x,y)\partial/\partial y: \ \Sigma f_{ij}^2 + g_{ij}^2 = 1\},$$

gdzie

$$f(x,y) = \sum_{i+j\le d} f_{ij}x^iy^j, \qquad g(x,y) = \sum_{i+j\le d} g_{ij}x^iy^j.$$

Jest więc $\mathfrak{Z}$ sferą jednostkową w przestrzeni pól wektorowych o współczynnikach będących wielomianami stopnia $\le d$. Przestrzeń ta jest oczywiście izomorficzna z $R^{(d+1)(d+2)-1}$. Będziemy odtąd rozważać pola wektorowe tylko ze sfery, dzięki czemu pojawiające się w naszych rozważaniach zbiory będą względnie zwarte. Rozważanie wyłącznie pól z $\mathfrak{Z}$ nie jest żadnym ograniczeniem, ponieważ pola X i λX, $\lambda \in R$ mają oczywiście tę samą ilość cykli granicznych.

Françoise i Pugh dowodzą następującego twierdzenia:

TWIERDZENIE 2 ([4]). Przy zadanym $T > 0$ istnieje stała $b(d,T)$ ograniczająca liczbę cykli granicznych o okresie $\le T$ układu dynamicznego (1) zadanego przez pole wektorowe $v \in \mathfrak{Z}$.

Dowód twierdzenia 2 (nieco przeze mnie zmodyfikowany). Niech D będzie uzwarceniem Poincaré (cf. [9]) przestrzeni R^2. Ustalmy $T > 0$. Definiujemy następujący zbiór

$$A = \{(t,z,v) \in [0,T] \times D \times \mathfrak{Z} \ : \ \phi_v(t,z) = z\},$$

gdzie ϕ_v jest potokiem układu dynamicznego zadanego przez pole v. Zbiór A jest oczywiście semi-analityczny w $R \times D \times \mathfrak{Z}$ (ponieważ funkcja $(t,z,v) \to \phi_v(t,z) - z$ jest analityczna w całym $R \times D \times \mathfrak{Z}$). Warto w tym miejscu zwrócić uwagę na rolę, jaką odgrywa zwartość $[0,T]$, D i $\mathfrak{Z}$. Po pierwsze, mamy zagwarantowane istnienie potoku analitycznego w całym $R \times D$, po drugie, A jest zbiorem względnie zwartym (w istocie zwartym), co nie musiałoby mieć miejsca, gdyby zamiast $[0,T]$ brać całe R. Zbiór A spełnia założenia Twierdzenia 1. Istnieje więc stała $C > 0$ taka, że dla każdego $v \in \mathfrak{Z}$, $t \in [0,T]$ ilość składowych spójnych $A_{(t,v)} \le C$. Zauważmy, że każda składowa spójna $A_{(t,v)}$ jest sumą trajektorii okresowych pola v o okresie będącym wielokrotnością t, ponieważ

$$A_{(t,v)} = \{z \in D : \phi_v(t,z) = z\}.$$

Stąd i z analityczności potoku ϕ_v wynika, że jedna składowa spójna $A_{(t,v)}$ nie może zawierać dwóch różnych cykli granicznych (ponieważ są one z definicji izolowane w zbiorze trajektorii okresowych). Mamy więc następujące przyporządkowanie injektywne:

$$\{\text{cykle graniczne ustalonego } v\} \ni \gamma \to t = \text{okres } \gamma \to \text{składowa spójna } A_{(t,v)} \text{ zawierająca } \gamma.$$

Stąd ilość cykli granicznych $v \in \mathfrak{S}$ o okresie $\leq T$ jest $\leq C$ dla każdego $v \in \mathfrak{S}$ i Twierdzenie 2 zostało udowodnione.

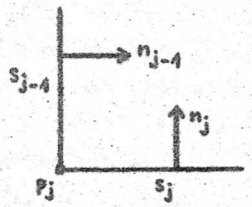
Opowiem teraz o kilku innych wynikach z pracy [4], również wiążących się ze zbiorami semi- i subanalitycznymi. W tym celu wprowadzę, za [4], kilka dalszych definicji.

DEFINICJA 4 ([4]). Podzbiór $\gamma_o \subset D$ nazywamy *granicznym zbiorem okresowym* pola wektorowego $v_o \in \mathfrak{S}$, jeżeli istnieje ciąg pól wektorowych $v_k \in \mathfrak{S}$, $v_k \to v_o$ i ich trajektorii okresowych γ_k (γ_k trajektoria okresowa v_k) zbieżnych do γ_o w metryce Hausdorffa.

DEFINICJA 5 ([4]). Graniczny zbiór okresowy nazywamy *zdegenerowanym*, jeśli zawiera on nieizolowane punkty osobliwe pola v_o.

DEFINICJA 6 ([4]). *Grafikiem* pola wektorowego v nazywamy zbiór złożony z ciągu punktów osobliwych $p_1, p_2, \ldots, p_{n+1} = p_1$ oraz separatryc (cf. [9]) $s_1, \ldots, s_m$ takich, że

s_j jest separatrycą niestabilną p_j i stabilną p_{j+1}, orientacje normalne n_j separatryc są zgodne (tj. jeżeli s_{j-1} ma orientację lewostronną to s_j też, patrz rys.)



Zacytujemy teraz (cf. [4]) następujący prosty wniosek z twierdzenia Poincaré - Bendixona ([9]).

STWIERDZENIE 1. **Graniczny zbiór okresowy pola v**
albo jest zdegenerowany
albo jest trajektorią okresową v
albo jest punktem stacjonarnym (czyli osobliwym) v
albo jest grafikiem v.

DEFINICJA 7 ([4], [9]). Punkt osobliwy pola wektorowego v nazywamy *hiperbolicznym*, jeżeli pierwsza różniczka pola w tym punkcie ma wyłącznie wartości własne o niezerowej części rzeczywistej (równoważnie: pierwsza różniczka diffeomorfizmu ϕ_t, gdzie ϕ potok v, dla każdego t, ma wartości własne o module różnym od 1).

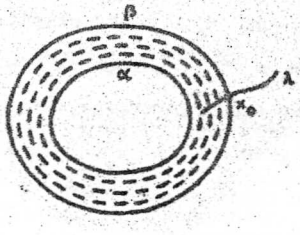
UWAGA. Punkty hiperboliczne są izolowane z uwagi na to, że pierwsza różniczka pola w takim punkcie jest izomorfizmem, więc pole jest injektywne w pewnym otoczeniu. Ponadto punkt hiperboliczny nie może być granicznym zbiorem okresowym ze względu na to, że w jego otoczeniu pole wektorowe i pole gradientów mają izomorficzne trajektorie.

Oznaczmy przez $\mathcal{P}$ zbiór tych pól wektorowych należących do $\mathcal{S}$, które nie posiadają grafików i których punkty osobliwe są wszystkie hiperboliczne.

Mamy wówczas:

STWIERDZENIE 2 ([4]). Każdy graniczny zbiór okresowy pola $v_0 \in \mathcal{P}$ jest cyklem granicznym tego pola. Pola należące do $\mathcal{P}$ mają skończoną ilość cykli granicznych.

Dowód. Niech γ_0 będzie granicznym zbiorem okresowym pola $v_0 \in \mathcal{P}$. Ze Stwierdzenia 1 i z definicji $\mathcal{P}$ wynika, że γ_0 musi być trajektorią okresową. Gdyby γ_0 nie było cyklem granicznym, zawierałoby się w "pierścieniu" złożonym z orbit okresowych v_0. Oznaczmy przez α i β skrajne orbity tego pierścienia. Jedna z nich może się okazać "okręgiem w nieskończoności" uzwarcającym R^2, ale nie obie. Załóżmy, że $\beta \neq \partial D$. Wobec tego istnieje krzywa analityczna λ transwersalna do β. Rozważmy zdefiniowane dla niej odwzorowanie Poincaré $L : \lambda \to \lambda$ w otoczeniu x_0, $\{x_0\} = \beta \cap \lambda$. W tym przypadku jest ono analityczne. Jest ono identycznością na tej części krzywej λ, która zawiera się w pierścieniu. Z analityczności L wynika jednak, że musi być ono identycznością w pełnym otoczeniu x_0, co przeczy założeniu, że β jest orbitą brzegową (rys.)



Otrzymaliśmy sprzeczność, więc γ_o musi być cyklem granicznym.

Zauważmy teraz, że każdy nieskończony ciąg cykli granicznych pola v_o musiałby mieć punkt skupienia, który byłby oczywiście granicznym zbiorem okresowym dla v_o, a więc wg powyższych rozważań musiałby być cyklem granicznym v_o, co przeczy definicji cyklu granicznego. Wynika stąd, że $v_o \in \mathcal{P}$ może mieć tylko skończoną ilość cykli granicznych.

DEFINICJA 8 ([4]). *Deformacją* trajektorii okresowej (odp. cyklu granicznego) γ_1 pola wektorowego $v_1 \in \mathfrak{Z}$ do trajektorii okresowej (odp. cyklu granicznego) γ_o pola wektorowego $v_o \in \mathfrak{Z}$ nazywamy jednoparametrową rodzinę ciągłą (v_s, γ_s), $0 \le s \le 1$ taką, że $v_s \in \mathfrak{Z}$ i γ_s jest trajektorią okresową (odp. cyklem granicznym) pola v_s. (Ciągłość rozważamy w topologiach naturalnych $R, R^{(d+1)(d+2)-1}$ i w metryce Hausdorffa).

TWIERDZENIE 3 ([4]). Każde pole wektorowe $v_o \in \mathcal{P}$ posiada otoczenie $\mathcal{U}$ w $\mathfrak{Z}$ takie, że dla każdego $v \in \mathcal{U}$ wszystkie cykle graniczne v posiadają deformację do pewnych cykli granicznych v_o. Pokażemy więcej, mianowicie, że wszystkie trajektorie okresowe pola $v \in \mathcal{U}$ mogą być jednocześnie zdeformowane do cykli granicznych v_o przez deformację ciągłą w $[0,1]$ i analityczną w $(0,1]$.

W dowodzie tego twierdzenia Françoise i Pugh posłużyli się następującym lematem (vd. [21] dla semi-analitycznych, [16] dla subanalitycznych).

LEMAT O WYBORZE ŁUKU. Niech A będzie zbiorem semi- lub subanalitycznym i niech a będzie jego punktem skupienia. Wówczas istnieje łuk semi-analityczny $\lambda : [0,1] \to \bar{A}$ taki, że $\lambda(0) = a$, $\lambda((0,1]) \subset A$ oraz λ analityczny w $(0,1)$.

Dowód Twierdzenia 3. Rozważmy ciąg pól $v_k \in \mathfrak{Z}$ zbieżny do $v_o \in \mathcal{P}$ oraz ciąg trajektorii okresowych γ_k pól v_k. Punkt skupienia ciągu γ_k jest granicznym zbiorem okresowym dla $v_o \in \mathcal{P}$, a więc wg Stwierdzenia 2 musi być cyklem granicznym v_o. Wnioskujemy stąd, że trajektorie okresowe pól $v \in \mathfrak{Z}$ bliskich v_o leżą blisko cykli granicznych v_o. Ze Stwierdzenia 2 wiemy również, że v_o ma skończoną ilość cykli granicznych $\gamma_{o1}, \ldots, \gamma_{on}$. Wybierzmy krzywe analityczne $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$ transwersalne do $\gamma_{o1}, \ldots, \gamma_{on}$ $(\Sigma_i \pitchfork \gamma_{oi})$. Łatwo widać, że istnieje otoczenie $\mathcal{V}$ pola v_o w $\mathfrak{Z}$ takie, że dla $v \in \mathcal{V}$

(a) Σ_i są transwersalne do wszystkich orbit pola v, $i = 1,\dots,n$;

(b) odwzorowanie Poincaré jest dobrze zdefiniowane dla pewnej krzywej $\Sigma_i' \subset \Sigma_i$

$$L_{iv} : \Sigma_i' \to \Sigma_i;$$

(c) każda trajektoria okresowa pola v przecina $\bigcup_{i=1}^{n} \Sigma_i'$.

Odwzorowanie L_{iv} jest analityczne jako funkcja $v \in \mathcal{V}$ oraz $x \in \Sigma_i'$. Wprowadzamy oznaczenia:

$$\Sigma = \Sigma_1 \times \dots \times \Sigma_n, \qquad \Sigma' = \Sigma_1' \times \dots \times \Sigma_n'$$

$$L : \mathcal{V} \times \Sigma' \quad (v, x_1, \dots, x_n) \to (L_{1v}(x_1), \dots, L_{nv}(x_n))$$

Zbiór

$$C = \{(v,x) \in \mathcal{V} \times \Sigma' ;\ L(v,x) = x\}$$

jest semi-analityczny w $\mathcal{S} \times R$ oraz (v_o, x_o) jest jego punktem skupienia (gdzie $x_o = (x_{o1}, \dots, x_{on})$, $\{x_{oi}\} = \Sigma_i \cap \gamma_{oi}$).

Z lematu o wyborze łuku oraz z lokalnej łukowej spójności zbiorów semi- i subanalitycznych ([21]) wynika, że można dobrać tak małe otoczenie punktu (v_o, x_o) w $\mathcal{S}$, aby każdy punkt (v,x) należący do iloczynu tego otoczenia i zbioru C dał się połączyć z (v_o, x_o) łukiem

$$w : [0,1] \to \overline{C}$$

analitycznym w $(0,1)$ i takim, że $w((0,1]) \subset C$. Wystarczy wziąć odpowiednio małe otoczenie v_o, aby otrzymać tezę naszego twierdzenia.

BIBLIOGRAFIA DOTYCZĄCA UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

[1] R. Bamon, *Solution of Dulac's problem for quadratic vector fields*, preprint IMPA (1985).

[2] N.N. Bautin, *On the number of limit cycles*, Mat. Sbornik 7, 30 (72) (1952), 181-196.

[3] H. Dulac, *Sur les cycles limites*, Bull. Soc. Math. France 51 (1923), 45-188.

[4] Françoise, Pugh, *Keeping track of limit cycles*, Journal of Differential Equations 65 (1986), 139-157.

[5] D. Hilbert, *Mathematical problems*, Bull. AMS 8 (1902), 437-479.

[6] Ju. Iljašenko, *An example of equation ...*, Mat.Sbornik 80, 3 (1969) 365-378.

[7] Ju. Iljašenko, *Dulac's Memoir and related problems*, Uspekhi Mat. Nauk. 40, 6 (1985), 41-78.

[8] R. Moussu, *Le probleme de la finitude du nombre de cycles limites*, Séminaire Bourbaki 1985/86, nr 655.

[9] Palis, de Melo, *Geometric Theory of Dynamical Systems*, Springer--Verlag 1982.

[10] Petrovski, Landis, *On the number of limit cycles ...*, AMS Trans. 2, 14 (1960), 181-200.

[11] Petrovski, Landis, *On the number of limit cycles ...*, AMS Trans. 2, 16 (1958), 177-221.

[12] J.H. Poincaré, *Memoire*, J. Math. 7 (1881), 375-422.

[13] L.S. Ponriagin, *Równania różniczkowe wyczajne*, PWN Warszawa 1964.

[14] Shi Sonling, *A concrete example ...*, Sci. Sinica Ser. A 23 (1980), 153-158.

BIBLIOGRAFIA DOTYCZĄCA ZBIORÓW SEMI- I SUBANALITYCZNYCH

[15] Z. Denkowska, *Ensembles sous-analytiques sans désingularisation*, Séminaires d'Analyse, Dolbeault, Lelong, Skoda 83/84, Lecture Notes 1198 (1984).

[16] Z. Denkowska, S. Łojasiewicz, J. Stasica, *Certaines propriétés élémentaires des ensembles sous-analytiques*, Bull. Pol. Acad. Sci. Ser. Mat. XXVII nr. 7-8 (1979), 529-536.

[17] Z. Denkowska, S. Łojasiewicz, J. Stasica, *Sur le théorème du complementaire pour les sous-analytiques*, ibid., 537-539.

[18] Z. Denkowska, S. Łojasiewicz, J. Stasica, *Sur le nombre de composantes connexes de la section d'un sous-analytique*, Bull. Pol. Acad. Sci. Ser. Sci. Mat. XXX nr. 7-8 (1982), 333-335.

[19] Gabriełow, *Projekcii połu-analiticeskich mnożestw*, Funkc. Analiz. i jego Priłoż., t. 2, wyp. 4 (1968), 18-30.

[20] H. Hironaka, *Subanalytic sets*, Number Theory ..., in honour of Y. Akitubi, Tokyo-Kinokyniya Publ. (1973), 453-493.

[21] S. Łojasiewicz, *Ensembles semi-analytiques*, preprint IHES (1965).

Sielpia, 19-23 stycznia, 1987 r.