MATERIAŁY IX KONFERENCJI SZKOLENIOWEJ
Z TEORII ZAGADNIEŃ EKSTREMALNYCH

1987 Łódź s. 34

FORMY KWADRATOWE I ROZWIĄZANIA RZECZYWISTE RÓWNAŃ WIELOMIANOWYCH

Z. Duszak, A. Płoski (Kielce)

1. WSTĘP. Będziemy rozważać wyłącznie wielomiany o współczynnikach w ciele liczb zespolonych $\mathbb{C}$, co pozwala utożsamiać wielomiany n zmiennych z odwzorowaniami wielomianowymi $\mathbb{C}^n$ w $\mathbb{C}$. Jeżeli $P : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ jest niezerowym wielomianem, to $\deg P$ oznacza jego stopień, natomiast P^+ jest "formą wiodącą" wielomianu P, tzn. sumą wszystkich jednomianów stopnia $\deg P$ występujących w wielomianie P. Przyjmujemy umowę: $\deg 0 = -\infty$. Na pytanie o liczbę rozwiązań zespolonych układu równań wielomianowych odpowiada twierdzenie Bezouta, które zacytujemy tutaj w najprostszym sformułowaniu.

TWIERDZENIE BEZOUTA. Jeżeli układ równań wielomianowych

$$(*)\qquad F_i(x_1,\dots,x_n) = 0, \qquad i = 1,\dots,n,$$

spełnia warunki:

a) układ (*) nie ma rozwiązań w nieskończoności, tzn. układ równań jednorodnych $F_i^+(x_1,\dots,x_n) = 0$, $i = 1,\dots,n$, ma wyłącznie zerowe rozwiązanie,

b) wszystkie rozwiązania układu (*) są pojedyncze, tzn. jakobian $I_F = \det(\partial F_i/\partial x_j)$ nie zeruje się na żadnym rozwiązaniu,

to układ (*) ma dokładnie $\prod_{i=1}^{n} \deg F_i$ rozwiązań.

W powyższej postaci twierdzenie Bezouta znane jest od z górą dwustu lat, jakkolwiek pierwsze jego dowody nie odpowiadają dzisiejszym wymaganiom ścisłości. Stosunkowo niedawno zapytano o rzeczywiste odpowiedniki tego twierdzenia. Załóżmy mianowicie, że układ (*) spełniający założenia twierdzenia Bezouta ma współczynniki rzeczywiste. Można wtedy zapytać o liczbę rozwiązań rzeczywistych tego układu. Dokładniej będziemy się interesować "algebraiczną" liczbą I rozwiązań rzeczywistych układu (*) zdefiniowaną następująco:

$$I = \sum_a \operatorname{sign} I_F(a),$$

gdzie suma rozciągnięta jest na rozwiązania rzeczywiste układu (*).

Tak więc rozwiązania a, dla których odwzorowanie F zachowuje orientację tj. takie, że $I_F(a) > 0$ liczymy ze znakiem $+$, natomiast rozwiązania a, dla których F zmienia orientację liczymy ze znakiem $-$. Ten sposób obliczania liczby rozwiązań wydaje się naturalny i od dawna stosowany w topologii, przypomnijmy tu przykładowo twierdzenie Poincarego-Hopfa, które ustala równość liczby algebraicznej zer pola wektorowego i charakterystyki Eulera rozmaitości zwartej, na której pole jest określone. Aby przedstawić wynik dający związek między liczbą I a stopniami $\deg F_1, \ldots, \deg F_n$ zdefiniujemy jeszcze dla dowolnego układu liczb całkowitych $m_1, \ldots, m_n > 0$ liczbę Piotrowskiego

$\Pi(m_1, \ldots, m_n)$ = (liczba rozwiązań całkowitych równania diofantycznego $a_1 + \ldots + a_n = (1/2) \sum_{i=1}^{n} (m_i - 1)$ spełniających warunki $0 \leq a_i \leq m_i - 1$ dla $i = 1, \ldots, n$).

Zauważmy, że gdy $\sum_{i=1}^{n} (m_i - 1)$ jest liczbą nieparzystą, to $\Pi(m_1, \ldots, m_n) = 0$. Łatwo obliczyć liczbę Piotrowskiego dla $n = 2$; $\Pi(m_1, m_2) = 0$, jeśli $m_1 + m_2$ jest nieparzysta, $\Pi(m_1, m_2) = \min(m_1, m_2)$, jeśli liczba $m_1 + m_2$ jest parzysta. Nie istnieje jednak prosta formuła dla liczby Piotrowskiego w ogólnym przypadku, chociaż obliczenie $\Pi(m_1, \ldots, m_n)$ dla konkretnych wartości $m_1, \ldots, m_n$ nie przedstawia trudności.

Możemy teraz sformułować następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE ARNOLDA-CHOWAŃSKIEGO. Załóżmy, że układ (*) spełnia założenia a) i b) twierdzenia Bezouta oraz ma współczynniki rzeczywiste. Niech I będzie zdefiniowaną wyżej algebraiczną liczbą rozwiązań tego układu. Wtedy

$$|I| \leq \Pi(m_1, \ldots, m_n).$$

Twierdzenie powyższe w nieco słabszej formie zostało udowodnione przez Arnolda w jego pracy [1], następnie uogólnione przez Chowańskiego, który pokazał również, że oszacowanie dla $|I|$ nie może zostać poprawione. Dokładniej w pracy [3] Chowański udowodnił, że nierówność z twierdzenia Arnolda-Chowańskiego i łatwa do sprawdzenia kongruencja: $I \equiv (\deg F_1 \ldots \deg F_n)(\mathrm{mod}\ 2)$ (wynikająca z faktu, że liczba rozwiązań nie-rzeczywistych układu (*) o współczynnikach rzeczywistych jest parzysta) są warunkami koniecznymi i dostatecznymi na to, aby istniał układ równań wielomianowych stopni $\deg F_i$ $(i = 1,\ldots,n)$ o algebraicznej liczbie rozwiązań I. Chowański podał w cytowanej pracy oszacowania podobnego typu dla liczby algebraicznej rozwiązań rzeczywistych układu (*) w obszarze przestrzeni $\mathbb{R}^n$ określonej przez nierówność wielomianową $G > 0$. Tego typu oszacowania mają duże znaczenie w geometrii algebraicznej rzeczywistej i implicite występowały już w pracach Piotrowskiego i Piotrowskiego-Olejnik dotyczących topologii zbiorów algebraicznych rzeczywistych.

Celem tego artykułu jest przedstawienie zasadniczych faktów, które prowadzą do twierdzenia Arnolda-Chowańskiego oraz opisanie w możliwie prostej sytuacji metody form kwadratowych, która pozwala wyznaczyć liczbę I jako sygnaturę pewnej formy kwadratowej stowarzyszonej z układem (*). Ten sposób badania liczby rozwiązań rzeczywistych należy właściwie do Hermite'a [5], który pokazał jak użyć form kwadratowych do wyznaczenia liczby rozwiązań rzeczywistych równania o współczynnikach rzeczywistych.

Innym ważnym przykładem metody form kwadratowych jest twierdzenie Eisenbuda-Levina [4] dające formułę algebraiczną dla indeksu odwzorowania rzeczywistego analitycznego. Opiszemy ten rezultat w końcowej części artykułu.

UWAGA. Dalej aby wypowiadać krócej takie twierdzenia jak zacytowane wyżej, będziemy używać następujących oznaczeń. Zamiast układu (*) będziemy rozważać odwzorowanie wielomianowe $F = (F_1,\ldots,F_n)$ przestrzeni $\mathbb{C}^n$ w siebie i związane z nim odwzorowanie $F^+ = (F_1^+,\ldots,F_n^+)$. Zbiór rozwiązań zespolonych układu (*) jest więc identyczny z włóknem $F^{-1}(0)$, natomiast zbiór rozwiązań rzeczywistych, to $F^{-1}(0) \cap \mathbb{R}^n$. Założenie a) twierdzenia Bezouta można zapisać w formie $(F^+)^{-1}(0) = \{0\}$, natomiast założenia b) wypowiemy następująco: zero $0 \in \mathbb{C}^n$ jest wartością regularną odwzorowania F.

2. ALGEBRA RZECZYWISTEGO ODWZOROWANIA WIELOMIANOWEGO.

Niech

$$F = (F_1,\ldots,F_n) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$$

będzie odwzorowaniem wielomianowym rzeczywistym, tzn. takim, że jego składowe F_i

$(i = 1,\ldots,n)$ są wielomianami o współczynnikach rzeczywistych.

Definiujemy:

$$A_F = \mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n]/I_F,$$

gdzie I_F oznacza ideał pierścienia wielomianów generowany przez składowe odwzorowania F.

Pierścień A_F ma więc podobnie jak pierścień wielomianów strukturę algebry nad ciałem liczb rzeczywistych. Gdy $P \in \mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n]$, to obraz P poprzez homomorfizm kanoniczny $\mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n] \to A_F$ będziemy oznaczali $[P]$.

PRZYKŁAD 1. Rozważmy przypadek $n = 1$. Zatem $F(x) = x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m$ jest wielomianem o współczynnikach rzeczywistych jednej zmiennej x. Stosując algorytm dzielenia z resztą stwierdzimy, że algebrę A_F można w rozważanym przypadku utożsamić z algebrą wielomianów stopnia $\leq m-1$:

$$c_o + c_1x + \ldots + c_{m-1}x^{m-1},$$

które dodajemy i mnożymy przez liczby w zwykły sposób, natomiast mnożymy mod (F), tzn. iloczynem dwóch wielomianów stopnia $\leq m-1$ jest reszta z dzielenia przez F ich zwykłego iloczynu. Zauważmy jeszcze, że bazę A_F nad $\mathbb{R}$ tworzą obrazy jednomianów $1,x,\ldots,x^{m-1}$.

PRZYKŁAD 2. Załóżmy, że każda współrzędna F_i odwzorowania wielomianowego F zależy wyłącznie od zmiennej x_i, a więc

$$F_i = a_{io}x_i^{m_i} + a_{i1}x_i^{m_i-1} + \ldots + a_{im_i}$$

$(a_{io} \neq 0,\ m_i > 0$ dla $i = 1,\ldots,n)$. Stosując wielokrotnie algorytm dzielenia stwierdzamy, podobnie jak w poprzednim przykładzie, że A_F można utożsamić z "algebrą reszt":

$$\Sigma\, c_{j_1,\ldots,j_n} x_1^{j_1} \ldots x_n^{j_n},$$

gdzie sumowanie przebiega po wszystkich wskaźnikach j_k; $0 \leq j_k \leq m_k - 1$ $(k =$

$= 1,\dots,n)$. Bazę A_F nad $\mathbb{R}$ tworzą obrazy jednomianów $x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n}$, $0 \le j_1 \le m_1 - 1, \dots, 0 \le j_n \le m_n - 1$.

Niech $d \ge 0$ będzie liczbą całkowitą. Dalej użyteczne będzie oznaczenie: $\nu_d(m_1,\dots,m_n) =$ (liczba jednomianów powyższej bazy stopnia d). Zatem $\nu_d(m_1, \dots, m_n) = 0$, jeżeli $d > \sum_{i=1}^{n} (m_i - 1)$ oraz $\sum_{d\ge 0} \nu_d(m_1,\dots,m_n) = m_1 \dots m_n$.

W podanych powyżej przykładach algebra A_F miała skończony wymiar nad $\mathbb{R}$. Ogólnie, mamy następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE. Niech $F = (F_1,\dots,F_n) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ będzie rzeczywistym odwzorowaniem wielomianowym. Wtedy następujące warunki są równoważne:

(i) włókno $F^{-1}(0)$ jest zbiorem skończonym,

(ii) algebra A_F ma wymiar skończony jako przestrzeń liniowa nad $\mathbb{R}$.

Dowód. Aby sprawdzić, że (ii) $\Longrightarrow$ (i) zakładamy, że A_F ma skończony wymiar liniowy k nad ciałem $\mathbb{R}$. Dla każdego wskaźnika i obrazy jednomianów $1, x_i, \dots, x_i^k$ są $\mathbb{R}$-zależne w A_F, a więc istnieją stałe $c_{io},\dots,c_{ik}$ nie wszystkie równe zeru takie, że wielomian $P_i(x_i) = c_{io} + c_{i1}x_i + \dots + c_{ik}x_i^k$ leży w ideale I_F. Włókno $F^{-1}(0)$ jest więc skończone ponieważ jest zawarte w skończonym zbiorze rozwiązań układu $P_1(x_1) = \dots = P_n(x_n) = 0$.

Sprawdzenie implikacji (i) $\Longrightarrow$ (ii) opiera się na twierdzeniu Hilberta o zerach, które przy założeniu, że włókno $F^{-1}(0)$ jest skończone, pozwala skonstruować wielomiany $P_i(x_i)$ $(i = 1,\dots,n)$ leżące w ideale generowanym przez składowe odwzorowania F. Wynika stąd, że algebra A_F ma wymiar skończony jako algebra będąca homomorficznym obrazem skończenie wymiarowej algebry $\mathbb{R}[X_1,\dots,X_n] / (P_1(x_1),\dots,P_n(x_n))$ (por. Przykład 2).

Dalej zakładamy, że włókno $F^{-1}(0)$ jest zbiorem skończonym, a więc algebra A_F ma skończony wymiar liniowy nad $\mathbb{R}$.

Warunek powyższy jest w szczególności spełniony, jeżeli układ równań $F_i = 0$ $(i = 1,\dots,n)$ nie ma rozwiązań w nieskończoności, tzn. gdy $(F^+)^{-1}(0) = \{0\}$. W tym przypadku można uzyskać dodatkowe informacje o algebrze A_F. Zauważmy najpierw, że jeśli A_F ma wymiar skończony, to zawsze można zbudować "bazę jednomianową" dla A_F, tzn. ciąg jednomianów postaci $x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$, których obrazy w A_F tworzą bazę. Wystarczy w tym celu wziąć jednomiany występujące w jakimkolwiek ciągu wielomianów, których obrazy tworzą bazę algebry odwzorowania.

Stosując oznaczenie wprowadzone w Przykładzie 2 możemy sformułować następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE ARNOLDA. Załóżmy, że $(F^+)^{-1}(0) = \{0\}$ i niech $d \geq 0$ będzie liczbą całkowitą. Wtedy każda baza jednomianowa algebry A_F zawiera $\nu_d(\deg F_1, \dots, \deg F_n)$ jednomianów stopnia d.

Dowód powyższego twierdzenia wymaga użycia techniki wielomianu Poincarego (por. [2], rozdział o punktach krytycznych funkcji różniczkowalnych). Zauważmy, że powyższe twierdzenia można wypowiedzieć również następująco: jeżeli wielomiany $F_1, \dots, F_n$ nie mają wspólnego zera w nieskończoności oraz $\deg F_i = m_i$ dla $i = 1, \dots, n$, to baza jednomianowa algebry A_F zawiera tyle samo jednomianów ustalonego stopnia d, co baza jednomianowa algebry odwzorowania

$$(x_1, \dots, x_n) \to (x_1^{m_1}, \dots, x_n^{m_n})$$

(por. Przykład 2).

PRZYKŁAD 3. Załóżmy, że wielomiany F_1, F_2 stopni odpowiednio 2 i 3 nie mają wspólnego zera w nieskończoności. Aby opisać bazę algebry A_F odwzorowania $F = (F_1, F_2)$ rozważmy najpierw bazę jednomianową odwzorowania $(x,y) \to (x^2, y^3)$. Składa się ona z jednomianów niepodzielnych ani przez x^2 ani przez y^3, tzn. z jednomianów $1, x, y, xy, y^2, xy^2$. Baza algebry A_F zawiera tyle samo jednomianów danego stopnia, a więc jeden jednomian stopnia zerowego: 1, dwa jednomiany stopnia pierwszego: x, y, dwa jednomiany stopnia drugiego, tu są trzy możliwości: xy, y^2 lub x^2, xy lub x^2, y^2 i wreszcie jeden jednomian stopnia trzeciego, są tu cztery możliwości: x^3 lub x^2y lub xy^2 lub y^3.

Z twierdzenia Arnolda wynika, że liczba elementów bazy jednomianowej jest równa $\deg F_1 \dots \deg F_n$, a więc mamy:

WNIOSEK. Jeśli $(F^{+})^{-1}(0) = \{0\}$, to algebra A_F ma wymiar liniowy $\deg F_1 \cdot \ldots \cdot \deg F_n$.

UWAGA. Konstrukcja algebry A_F jest ograniczona do odwzorowań wielomianowych o współczynnikach rzeczywistych. Dla każdego odwzorowania wielomianowego można skonstruować odpowiednio algebrę zespoloną $A_F^{\mathbb{C}} = \mathbb{C}[X_1,\ldots,X_n] / I_F^{\mathbb{C}}$, gdzie $I_F^{\mathbb{C}}$ jest ideałem pierścienia wielomianów o współczynnikach zespolonych generowanym przez składowe odwzorowania F. Wszystko co powiedzieliśmy w punkcie 2 o algebrze A_F można powiedzieć o algebrze $A_F^{\mathbb{C}}$. Gdy F ma współczynniki rzeczywiste, to $A_F^{\mathbb{C}}$ jest "kompleksyfikacją" A_F: $A_F^{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} A_F$. W szczególności: wymiar $A_F^{\mathbb{C}}$ nad $\mathbb{C}$ jest równy wymiarowi A_F nad $\mathbb{R}$.

3. REPREZENTACJA FUNKCYJNA ALGEBRY A_F. Dla każdego $a = (a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{C}^n$ oznaczmy $\overline{a} = (\overline{a}_1,\ldots,\overline{a}_n)$, gdzie $\overline{a}_j$ jest liczbą sprzężoną do liczby a_j dla $j = 1,\ldots,n$. Niech V będzie zbiorem skończonym punktów przestrzeni $\mathbb{C}^n$ takim, że jeśli $a \in V$, to $\overline{a} \in V$. Oznaczmy $A(V)$ zbiór funkcji zespolonych $\phi : V \to \mathbb{C}$ spełniających warunek $\phi(\overline{a}) = \overline{\phi(a)}$ dla wszystkich $a \in V$. Oczywiście, $A(V)$ ma naturalną strukturę $\mathbb{R}$-algebry. Łatwo sprawdzić następujący lemat.

LEMAT. Algebra $A(V)$ ma skończony wymiar nad $\mathbb{R}$, jest on równy liczbie elementów zbioru V.

Dowód. Możemy napisać $V = \{a_1,\ldots,a_r,b_1,\ldots,b_s,\overline{b}_1,\ldots\overline{b}_s\}$, gdzie $a_1,\ldots,a_r \in \mathbb{R}^n$, natomiast $b_1,\ldots,b_s \in \mathbb{C}^n \setminus \mathbb{R}^n$. Funkcję ϕ algebry $A(V)$ możemy więc utożsamiać z ciągiem liczbowym $\phi(a_1),\ldots,\phi(a_r),\phi(b_1),\ldots,\phi(b_s),\phi(\overline{b}_1),\ldots,\phi(\overline{b}_s)$. Przestrzeń ciągów takiej postaci ma wymiar nad $\mathbb{R}$ równy $r + 2s$, a więc równy liczbie elementów zbioru V.

Aby porównać algebry A_F oraz $A(F^{-1}(0))$ definiujemy dla każdego elementu $[H]$ algebry A_F i dla każdego $a \in F^{-1}(0)$ wartość elementu $[H]$ w punkcie $a \in F^{-1}(0)$: $[H](a) := H(a)$. Łatwo dostrzec, że podana definicja jest poprawna: nie zależy od wielomianu H wyznaczającego abstrakt $[H]$. Każdemu elementowi

$[H] \in A_F$ odpowiada więc funkcja $F^{-1}(0) \ni a \to [H](a) \in \mathbb{C}$ będąca elementem algebry $A(F^{-1}(0))$.

TWIERDZENIE O REPREZENTACJI DLA ALGEBRY A_F. Przyporządkowanie każdemu elementowi $[H] \in A_F$ funkcji $F^{-1}(0) \ni a \to [H](a) \in \mathbb{C}$ jest epimorfizmem algebry A_F na algebrę $A(F^{-1}(0))$. Jeżeli 0 jest wartością regularną odwzorowania F, to epimorfizm ten jest izomorfizmem algebr.

Dowód. Fakt, że opisane przyporządkowanie jest homomorfizmem algebr $A_F \to A(F^{-1}(0))$ wynika łatwo z przyjętych definicji. Homomorfizm ten jest epimorfizmem, bo jak łatwo zauważyć każda funkcja algebry $A(V)$ jest restrykcją pewnego wielomianu o współczynnikach rzeczywistych. Druga część twierdzenia o reprezentacji wymaga zastosowania następującego, klasycznego faktu:

TWIERDZENIE M. NOETHERA. Jeżeli układ równań wielomianowych $F_1 = \ldots = F_n = 0$ o n niewiadomych ma wyłącznie rozwiązania pojedyncze, to każdy wielomian zerujący się na rozwiązaniach układu leży w ideale generowanym przez $F_1, \ldots, F_n$.

Dowód powyższego twierdzenia można znaleźć w podręczniku Van der Waerdena [9] w rozdziale o ideałach pierścieni wielomianów. Tam też dowodzi się, że jeśli współczynniki równań i wielomianu zerującego się na rozwiązaniach leżą w pewnym podciele K ciała liczb zespolonych, to jako ideał w twierdzeniu Noethera można wziąć ideał $(F_1,\ldots,F_n)K[X_1,\ldots,X_n]$.

Z twierdzenia Noethera wynika, że jeśli odwzorowanie F ma włókno $F^{-1}(0)$ regularne, to warunek $[H](a) = 0$ dla $a \in F^{-1}(0)$ implikuje, że $[H] = 0$ w A_F a więc rozważany epimorfizm $A_F \to A(F^{-1}(0))$ ma jądro zerowe, czyli jest izomorfizmem. Kończy to dowód twierdzenia o reprezentacji.

Zanotujemy kilka zastosowań:

WNIOSEK 1. Jeżeli 0 jest wartością regularną F, to wymiar liniowy algebry A_F jest równy liczbie elementów włókna $F^{-1}(0)$.

WNIOSEK 2. Jeżeli 0 jest wartością regularną odwzorowania F, to obraz jakobianu J_F w A_F jest elementem odwracalnym.

Zauważmy, że z Wniosku 1 oraz z faktu, że A_F ma wymiar liniowy $\deg F_1 \dots \deg F_n$ wynika natychmiast twierdzenie Bezouta w formie podanej na wstępie.

W dalszym ciągu ważną rolę będzie odgrywać pojęcie śladu. W każdej algebrze A nad ciałem $\mathbb{R}$, skończeniewymiarowej, określony jest funkcjonał liniowy $Tr: A \to \mathbb{R}$, który definiujemy następująco. Dla każdego elementu $x \in A$ definiujemy odwzorowanie liniowe $M_x : A \to A$ dane wzorem $M_x(y) = xy$ dla wszystkich $y \in A$. Przyjmujemy z definicji $Tr(x) = Tr(M_x)$. Przypomnijmy jeszcze, że śladem macierzy nazywamy sumę elementów na głównej przekątnej, natomiast ślad odwzorowania liniowego definiujemy jako ślad jego macierzy. Określenie to jest poprawne, tzn. nie zależy od wyboru bazy względem której określamy macierz.

WNIOSEK 3. Niech 0 będzie wartością regularną odwzorowania F. Wtedy dla każdego $[H] \in A_F$ $Tr([H]) = \sum_{a \in F^{-1}(0)} [H](a)$.

Aby sprawdzić powyższy wniosek zauważmy, że:

1) forma liniowa $A(F^{-1}(0)) \ni \phi \to \sum_{a \in F^{-1}(0)} \phi(a)$ jest śladem na algebrze $A(F^{-1}(0))$,

2) jeśli $f : A \to B$ jest izomorfizmem algebr liniowych o śladach Tr_A oraz Tr_B, to $Tr_B = Tr_A \circ f$

i zastosować twierdzenie o reprezentacji.

Kończąc ten paragraf przypomnijmy jeszcze następujące twierdzenie.

TWIERDZENIE EULERA-JACOBIEGO. Jeśli odwzorowanie wielomianowe $F = (F_1, \dots, F_n) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ spełnia założenia a) i b) twierdzenia Bezouta, to dla każdego wielomianu $H : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ spełniającego warunek $\deg H < \sum_{i=1}^{n} (\deg F_i - 1)$ zachodzi relacja $\sum_{a \in F^{-1}(0)} (H(a)/I_F(a)) = 0$.

Gdy F i H mają współczynniki rzeczywiste, to tezę twierdzenia Eulera-Jacobiego możemy na podstawie Wniosku 3 zapisać następująco: $Tr([H]/[I_F]) = 0$.

Dowód twierdzenia Eulera-Jacobiego można przeczytać w monografii [2].

UWAGA. Twierdzenie o reprezentacji można analogicznie sformułować i udowodnić dla algebry $A_F^{\mathbb{C}}$. Odpowiednikiem algebry $A(V)$ jest algebra $A_{\mathbb{C}}(V)$ wszystkich funkcji zespolonych określonych na zbiorze skończonym V. Można udowodnić, że wymiar nad $\mathbb{C}$ algebry $A_F^{\mathbb{C}}$ jest równy liczbie rozwiązań układu $F_i = 0$ $(i = 1,\ldots,n)$ obliczonej z odpowiednio zdefiniowanymi krotnościami; gdy włókno $F^{-1}(0)$ jest regularne, to krotności są równe 1.

4. FORMA KWADRATOWA STOWARZYSZONA Z ODWZOROWANIEM WIELOMIANOWYM RZECZYWISTYM, DOWÓD TWIERDZENIA ARNOLDA-CHOWAŃSKIEGO. Podamy teraz twierdzenie, które w terminach algebry A_F pozwala opisać liczbę $I = \Sigma \operatorname{sgn} I_F(a)$

TWIERDZENIE. Niech $F = (F_1,\ldots,F_n) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ będzie odwzorowaniem wielomianowym rzeczywistym o włóknie regularnym $F^{-1}(0)$ i niech $Q_F : A_F \to \mathbb{R}$ będzie formą kwadratową zdefiniowaną wzorem

$$Q_F([H]) = \operatorname{Tr}([H]^2/[I_F])$$

Wtedy

1. forma Q_F jest niezdegenerowana, tzn. (rząd Q_F) = (wymiar A_F) = (liczba elementów włókna $F^{-1}(0)$),

2. sygnatura formy Q_F jest równa

$$\sum_{a \in F^{-1}(0) \cap \mathbb{R}} \operatorname{sgn} I_F(a).$$

Zanim naszkicujemy dowód twierdzenia zauważmy, że Q_F jest faktycznie formą kwadratową, bo powstaje przez utożsamienie argumentów w formie dwuliniowej:

$$([H_1],[H_2]) \to \operatorname{Tr}((1/[I_F])[H_1 H_2]).$$

Ponadto Q_F jest formą poprawnie zdefiniowaną, bo jak stwierdziliśmy wcześniej obraz jakobianu I_F jest elementem odwracalnym algebry A_F, gdy włókno $F^{-1}(0)$ jest regularne.

Dowód. Jeśli Q jest formą liniową na przestrzeni liniowej, skończeniewymiarowej, rzeczywistej, to oznaczamy $\operatorname{rg} Q$ = (rząd Q), $\operatorname{sg} Q$ = (sygnatura Q). W obliczaniu rzędu i sygnatury użyteczna jest następująca uwaga: jeśli $Q = Q_1 + \ldots + Q_k$, $Q_i = \sum_j c_{ij} L_{ij}^2$ $(c_{ij} \in \mathbb{R})$, oraz formy liniowe L_{ij} są liniowo niezależne, to $\operatorname{rg} Q = \operatorname{rg} Q_1 + \ldots + \operatorname{rg} Q_k$, $\operatorname{sg} Q = \operatorname{sg} Q_1 + \ldots + \operatorname{sg} Q_k$.

Oznaczamy $F^{-1}(0) = \{a_1,\ldots,a_r, b_1,\ldots,b_s, \bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_s\}$, gdzie $a_1,\ldots,a_r \in \mathbb{R}^n$, $b_1,\ldots,b_s \in \mathbb{C}^n \setminus \mathbb{R}^n$.

Na podstawie twierdzenia o reprezentacji możemy napisać

$$Q_F([H]) = \sum_{i=1}^{r} (1/I_F(a_i))[H](a_i)^2 + \sum_{j=1}^{s} ((1/I_F(b_j))[H](b_j)^2 + (1/I_F(b_j))[H](\bar{b}_j)^2).$$

Formy liniowe $[H] \to [H](a_i)$, $[H] \to \operatorname{Re}[H](b_j)$, $[H] \to \operatorname{Im}[H](b_j)$ są liniowo niezależne, bo z injektywności reprezentacji $A_F \to A(F^{-1}(0))$ wynika, że hiperpłaszczyzny wyznaczone przez te formy przecinają się tylko w punkcie $0 \in A_F$. Rozważmy formy kwadratowe Q_i $(i = 1,\ldots,r)$ oraz R_j $(j = 1,\ldots,s)$ zdefiniowane następująco:

$$Q_i([H]) = (1/I_F(a_i))[H](a_i)^2$$

$$R_j([H]) = (1/I_F(b_j))[H](b_j)^2 + (1/I_F(b_j))[H](\bar{b}_j)^2.$$

Łatwo sprawdzić, że $\operatorname{rg} Q_i = 1$, $\operatorname{rg} R_j = 2$, $\operatorname{sg} Q_i = \operatorname{sign} I_F(a_i)$, $\operatorname{sg} R_j = 0$ oraz że suma $Q = Q_1 + \ldots + Q_r + R_1 + \ldots + R_s$ spełnia założenia uwagi uczynionej na początku. Zatem $\operatorname{rg} Q = \operatorname{rg} Q_1 + \ldots + \operatorname{rg} Q_r + \operatorname{rg} R_1 + \ldots + \operatorname{rg} R_s = r + 2s =$ = (liczba elementów włókna $F^{-1}(0)$) = (wymiar A_F nad $\mathbb{R}$) oraz $\operatorname{sg} Q = \operatorname{sg} Q_1 + \ldots + \operatorname{sg} Q_r + \operatorname{sg} R_1 + \ldots \operatorname{sg} R_s = \sum_{i=1}^{r} \operatorname{sgn} I_F(a_i)$, co należało dowieść.

W zastosowaniach użyteczny jest następujący lemat.

LEMAT. Jeżeli $Q : E \to \mathbb{R}$ jest niezdegerowaną formą kwadratową na skończeniewymiarowej, rzeczywistej przestrzeni liniowej E, i jeśli N_o jest maksymalną podprzestrzenią liniową zawartą w stożku $Q^{-1}(0)$, to $|\operatorname{sg} Q| = \dim E - 2 \dim N_o$. W szczególności, jeśli $N \subset Q^{-1}(0)$ jest podprzestrzenią liniową, to $|\operatorname{sg} Q| \leq \dim E + - 2 \dim N$.

Dowód. Z twierdzenia Witta (por. rozdział o formach kwadratowych w podręczniku Langa [6]) wynika, że maksymalne podprzestrzenie liniwe zawarte w stożku formy $Q^{-1}(0)$ są izomorficzne, a więc mają ten sam wymiar. Wystarczy więc sprawdzić równość dla jednej maksymalnej podprzestrzeni N_o. Możemy założyć, że $Q = x_1^2 + \dots x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2$, $p \geq q$, gdzie $x_1,\dots,x_{p+q}$ są liniowo niezależnymi formami liniowymi na $(p+q)$-wymiarowej przestrzeni E. Weźmy pod uwagę podprzestrzeń N_o zdefiniowaną równaniami: $x_1 - x_{p+1} = 0,\dots,x_q - x_{p+q} = 0$, $x_{q+1} = 0,\dots,x_p = 0$. Łatwo sprawdzić, że N_o jest maksymalna i $\dim N_o = q$. Stąd $|\mathrm{sg}\, Q| = p - q = (p+q) - 2q = \dim E - 2 \dim N_o$.

Druga część lematu wynika z pierwszej, bo każda podprzestrzeń zawarta w stożku może być rozszerzona do maksymalnej podprzestrzeni zawartej w tym stożku.

Możemy teraz podać dowód twierdzenia anonsowanego na wstępie.

Dowód twierdzenia Arnolda-Chowańskiego. Rozważmy podprzestrzeń N_o algebry A_F zdefiniowaną następująco:

$$N_o = \{[H] \in A_F : \deg H < (1/2) \sum_{i=1}^{n} (\deg F_i - 1)\}.$$

Jeżeli $\deg H < (1/2) \sum_{i=1}^{n} (\deg F_i - 1)$, to wielomian H^2 spełnia założenia twierdzenia Eulera-Jacobiego, a więc $\mathrm{Tr}\,([H]^2/[I_F]) = 0$. Oznacza to, że podprzestrzeń N_o zawarta jest w stożku formy Q_F, a więc na mocy twierdzenia o formie Q_F i udowodnionego wyżej lematu mamy:

$$\Big| \sum_{a \in F^{-1}(0) \cap \mathbb{R}^n} \mathrm{sgn}\, I_F(a) \Big| = |\mathrm{sg}\, Q_F| \leq \dim_{\mathbb{R}} A_F - 2 \dim_{\mathbb{R}} N_o =$$

$$= \deg F_1 \dots \deg F_n - 2 \dim_{\mathbb{R}} N_o.$$

Ustalmy bazę jednomianową algebry A_F. Z definicji podprzestrzeni N_o wynika, że $\dim_{\mathbb{R}} N_o$ jest równy liczbie elementów bazy jednomianowej stopnia mniejszego od $(1/2) \sum_{i=1}^{n} (\deg F_i - 1)$. Z drugiej strony, z twierdzenia Arnolda wynika, że liczba elementów bazy jednomianowej stopnia mniejszego od $(1/2) \sum_{i=1}^{n} (\deg F_i - 1)$

jest równa liczbie elementów tej bazy stopnia większego od $(1/2)\sum_{i=1}^{n}(\deg F_i - 1)$.

Ponieważ baza ma $\deg F_1 \ldots \deg F_n$ elementów, zatem $\deg F_1 \ldots \deg F_n +$ $- 2\dim_{\mathbb{R}} N_o =$ (liczba elementów bazy jednomianowej stopnia $(1/2)\sum_{i=1}^{n}(\deg F_i - 1)) =$ $= \Pi(\deg F_1,\ldots,\deg F_n)$. Ostatnią równość otrzymujemy znowu z twierdzenia Arnolda.

UWAGA. Chowański dowodzi oszacowania $|I| \le \Pi(\deg F_1,\ldots,\deg F_n)$ dla "dogodnych" układów równań. Układ $F_1 = 0,\ldots,F_n = 0$ nazywa dogodnym, jeśli ma on wyłącznie rozwiązania pojedyncze w $\mathbb{C}^n$ i jeśli jednomiany $x_1^{a_1},\ldots,x_n^{a_n}$, $0 \le a_i <$ $< \deg F_i$, $(i = 1,\ldots,n)$, tworzą bazę algebry odwzorowania $F = (F_1,\ldots,F_n)$. Łatwo sprawdzić, że istnieje zbiór otwarty (w sensie Zariskiego) w przestrzeni współczynników taki, że układy równań o współczynnikach z tego zbioru są dogodne. Dla układów dogodnych łatwo można sprawdzić twierdzenie o reprezentacji bez odwoływania się do twierdzenia M. Noethera, ponadto twierdzenie Arnolda w tym przypadku jest banalne. Dlatego najistotniejsze w dowodzie jest twierdzenie Eulera-Jacobiego, na którego znaczenie dla geometrii rzeczywistej zwrócił już uwagę Piotrowski w pracy z 1938 roku (Annals of Math., Vol. 39, No 1).

5. OBLICZANIE INDEKSU ODWZOROWANIA ANALITYCZNEGO I TWIERDZENIE EISENBUDA-LEVINA. W twierdzeniach zacytowanych na wstępie pewną rolę odgrywa założenie, że zera rozważanego układu równań są pojedyncze. Faktycznie istotny jest tylko fakt, że są one izolowane. Aby się o tym przekonać trzeba rozwiązania liczyć ze stosowanymi "wagami"; w przypadku twierdzenia Bezouta prowadzi to do pojęcia krotności, a w przypadku twierdzenia Arnolda-Chowańskiego do pojęcia indeksu odwzorowania. Rozpocznijmy od przypomnienia pojęcia krotności, przy czym dla podkreślenia lokalnego charakteru rozważań będziemy rozważali zbieżne szeregi potęgowe zamiast wielomianów.

Niech więc $f_1,\ldots,f_n \in \mathbb{C}\{X_1,\ldots,X_n\}$ będzie ciągiem zbieżnych szeregów potęgowych bez stałych wyrazów. Taki ciąg szeregów wyznacza odwzorowanie holomorficzne pewnego otoczenia zera przestrzeni $\mathbb{C}^n$ w przestrzeń $\mathbb{C}^n$, które przeprowadza 0 w 0; będziemy je oznaczali $f = (f_1,\ldots,f_n) : (\mathbb{C}^n,0) \longrightarrow (\mathbb{C}^n,0)$.

Podobnie do konstrukcji opisanej w przypadku wielomianowym tworzymy algebrę lokalną odwzorowania f:

$$O_f^{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\{X_1,\ldots,X_n\} \,/\, I_f^{\mathbb{C}},$$

gdzie $I_f^{\mathbb{C}}$ jest ideałem pierścienia szeregów potęgowych generowanym przez $f_1,\ldots,f_n$.

Dowodzi się, w oparciu o lokalną wersję twierdzenia o zerach, że $O_f^{\mathbb{C}}$ ma skończony wymiar nad $\mathbb{C}$ wtedy i tylko wtedy, gdy 0 jest punktem izolowanym włókna $f^{-1}(0)$. Ostatni warunek oznacza, że 0 jest izolowanym rozwiązaniem układu równań $f_1(x_1,\ldots,x_n) = \ldots = f_n(x_1,\ldots,x_n) = 0$. W tym przypadku definiujemy krotność $m_0(f)$ odwzorowania f: obieramy otoczenie U zera takie, że $U \cap f^{-1}(0) = \{0\}$ i określamy $m_0(f) =$ (liczba punktów włókna $f^{-1}(y) \cap U$) dla dostatecznie małych wartości regularnych y odwzorowania f. Podana definicja jest poprawna, gdyż liczba punktów włókna regularnego $f^{-1}(y) \cap U$ nie zależy od wyboru wartości regularnej y pod warunkiem, że y jest dostatecznie małe. Dowodzi się (co wymaga dość zaawansowanych metod algebry), że $m_0(f) =$ (wymiar algebry $O_f^{\mathbb{C}}$ nad $\mathbb{C}$).

Załóżmy teraz, że $f_1,\ldots,f_n \in \mathbb{R}\{X_1,\ldots,X_n\}$, tzn. że rozważane szeregi potęgowe mają współczynniki rzeczywiste. Wówczas wyznaczają one obok odwzorowania holomorficznego $(\mathbb{C}^n,0) \longrightarrow (\mathbb{C}^n,0)$ także odwzorowanie rzeczywiste analityczne otoczenia zera w $\mathbb{R}^n$ w $\mathbb{R}^n$, które oznaczamy $f = (f_1,\ldots,f_n) : (\mathbb{R}^n,0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n,0)$. Odpowiednikiem rzeczywistym algebry $O_f^{\mathbb{C}}$ jest algebra

$$O_f = \mathbb{R}\{X_1,\ldots,X_n\} \,/\, I_f,$$

gdzie I_f jest ideałem pierścienia $\mathbb{R}\{X_1,\ldots,X_n\}$ generowanym przez składowe $f_1,\ldots,f_n$.

Algegry $O_f^{\mathbb{C}}$ oraz O_f są związane następująco: $O_f^{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} O_f$, tzn. $O_f^{\mathbb{C}}$ jest kompleksyfikacją O_f. Wynika stąd, że:

1) O_f ma skończony wymiar nad $\mathbb{R}$ $\Longleftrightarrow$ $O_f^{\mathbb{C}}$ ma skończony wymiar nad $\mathbb{C}$;

2) (Wymiar O_f nad $\mathbb{R}$) = (Wymiar $O_f^{\mathbb{C}}$ nad $\mathbb{C}$). Czyli wymiar algebry O_f nad $\mathbb{R}$ jest równy krotności odwzorowania holomorficznego $(\mathbb{C}^n,0) \longrightarrow (\mathbb{C}^n,0)$ wyznaczonego przez szeregi $f_1,\ldots,f_n$.

Określimy teraz indeks odwzorowania $f = (f_1,\dots,f_n) : (\mathbb{R}^n,0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n,0)$. W tym celu obieramy małe otoczenie zera $W \subset \mathbb{R}^n$ nie zawierające poza początkiem układu innych punktów włókna $f^{-1}(0)$ i definiujemy:

$$\operatorname{ind}_0 f = (\text{algebraiczna liczba punktów włókna } f^{-1}(y) \cap W) =$$

$$= \sum_{x \in f^{-1}(y)\cap W} \operatorname{sign} J_f(x),$$

gdzie y jest dowolną, dostatecznie małą wartością regularną f. Podana definicja jest poprawna, tzn. nie zależy od wyboru dostatecznie małej wartości regularnej y. Dowód można znaleźć w [7] lub w [8].

UWAGA. Pojęcie indeksu można zdefiniować w znacznie ogólniejszej sytuacji, używając pojęcia stopnia topologicznego (por. [8]). Ograniczamy się do przypadku analitycznego ze względu na interesujące nas zastosowania.

Twierdzenie Eisenbuda-Levina, które przedstawiamy niżej odpowiada na pytanie postawione przez Arnolda: jak scharakteryzować indeks odwzorowania rzeczywistego analitycznego w terminach jego algebry lokalnej?

TWIERDZENIE EISENBUDA-LEVINA. Załóżmy, że odwzorowanie $f = (f_1,\dots,f_n)$ wyznaczone przez szeregi zbieżne rzeczywiste ma zero izolowane 0 w $\mathbb{C}^n$. Niech $[J_f]$ będzie obrazem jakobianu J_f w algebrze lokalnej O_f i niech $T : O_f \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie formą liniową taką, że $T([J_f]) > 0$. Wtedy indeks $\operatorname{ind}_0 f$ jest równy sygnaturze formy kwadratowej $O_f \ni [h] \to T([h]^2)$.

Dowód powyższego twierdzenia jest istotnie trudniejszy niż dowód odpowiedniego twierdzenia dla wielomianów. Już sam fakt, że obraz jakobianu $[J_f]$ jest niezerowy wymaga użycia "lokalnego twierdzenia o dualności" (por. [4], [2]). Forma kwadratowa $[h] \to T([h]^2)$ jest formą niezdegenerowaną.

Stosując lemat wiążący moduł sygnatury formy kwadratowej z wymiarem maksymalnej podprzestrzeni zawartej w stożku wyznaczonym przez formę do twierdzenia Eisenbuda-Levina otrzymujemy:

TWIERDZENIE. Przy założeniach i oznaczeniach twierdzenia Eisenbuda-Levina $|\mathrm{ind}_o\, f| = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{O}_f - 2 \dim_{\mathbb{R}} I$, gdzie I jest ideałem algebry $\mathcal{O}_f$ maksymalnym ze względu na własność $I^2 = 0$.

Ważnym zastosowaniem twierdzenia Eisenbuda-Levina są oszacowania $\mathrm{ind}_o\, f$ w terminach krotności $m_o(f)$. Łatwo zauważyć, że zachodzi nierówność: $|\mathrm{ind}_o\, f| \leq m_o(f)$. Istotnie, jeżeli $y \in \mathbb{C}^n$ jest dostatecznie małą wartością regularną, to $m_o(f) =$ (liczba elementów $f^{-1}(y)$) $\geq$ (liczba elementów $f^{-1}(y) \cap \mathbb{R}^n$) $\geq |\mathrm{ind}_o f|$. Ostatnia nierówność wynika z podanej przez nas definicji indeksu. W pracy [4] autorzy podali następujące dwa wzmocnienia tego faktu.

TWIERDZENIE. Jeżeli $f = (f_1,\ldots,f_n) : (\mathbb{R}^n,0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n,0)$ ma zero izolowane w $\mathbb{C}^n$, to $|\mathrm{ind}_o\, f| \leq m_o(f)^{1-(1/n)}$.

Jeżeli ponadto założymy, że $J_f(0) = 0$, to $|\mathrm{ind}_o\, f| \leq (1/2)m_o(f)$.

Dowód powyższego twierdzenia opiera się nie tylko na twierdzeniu Eisenbuda-Levina, ale także na głębokich nierównościach dla krotności należących do Teissiera (por. dodatek do pracy [4]).

SPIS LITERATURY

[1] В.И. Арнольд, *Индекс особой точки поля, неравенства Петровского-Олейник и смешанные структуры Ходжа*, Функц. Анализ, 1978, том 12, вып. 1, с. 1-14.

[2] В.И. Арнольд, А.Н. Варченко, С.М. Гусейн-Заде, *Особенности дифференцируемых отображений I*, Москва, 1982.

[3] А.Г. Хованский, *Индекс полиномиального векторного поля*, Функц. Анализ, 1979, том 13, с. 49-58.

[4] D. Eisenbud, H. Levine, *An algebraic formula for the degree of C^∞ map germ*, Ann. Math., 1977, v. 106, No 1, 19-38.

[5] Ch. Hermite, *Oeuvres*.

[6] S. Lang, *Algebra*, Warszawa, 1973.

[7] N.G. Lloyd, *Degree theory*, Cambridge University Press, 1978.

[8] J.W. Milnor, *Topologia z różniczkowego punktu widzenia*, PWN, Warszawa 1969.

[9] B.L. Van Der Waerden, *Algebra I, II*. Springer Verlag, 1971.

Sielpia, 19-23 stycznia 1987 r.