# Topologiczna stabilność odwzorowań wielomianowych

Michał Farnik (Uniwersytet Jagielloński)

we współpracy z Z. Jelonkiem (IM PAN)

XL Konferencja i Warsztaty
“Geometria Analityczna i Algebraiczna”

Łódź, 7-11 stycznia 2019

Niech $\Omega(d_1, d_2)$ oznacza przestrzeń odwzorowań wielomianowych $F = (f_1, f_2) : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ o stopniach ograniczonych przez $d_1, d_2$.

Oczywiście $\Omega(d_1, d_2)$ ma strukturę przestrzeni afinicznej.

Mówimy, że odwzorowanie $F \in \Omega(d_1, d_2)$ jest topologicznie stabilne, jeśli istnieje takie otoczenie $U \subset \Omega(d_1, d_2)$ punktu $F$, że dla każdego $G \in U$ odwzorowania $F$ i $G$ są topologicznie równoważne, czyli istnieją takie homeomorfizmy $\Psi_G, \Phi_G : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, że $F = \Psi_G \circ G \circ \Phi_G$.

Pytamy o charakteryzację topologicznie stabilnych odwzorowań $F \in \Omega(d_1, d_2)$.

Niech $\Omega(d_1, d_2)$ oznacza przestrzeń odwzorowań wielomianowych $F = (f_1, f_2) : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ o stopniach ograniczonych przez $d_1, d_2$.

Oczywiście $\Omega(d_1, d_2)$ ma strukturę przestrzeni afinicznej.

Mówimy, że odwzorowanie $F \in \Omega(d_1, d_2)$ jest topologicznie stabilne, jeśli istnieje takie otoczenie $U \subset \Omega(d_1, d_2)$ punktu $F$, że dla każdego $G \in U$ odwzorowania $F$ i $G$ są topologicznie równoważne, czyli istnieją takie homeomorfizmy $\Psi_G, \Phi_G : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, że $F = \Psi_G \circ G \circ \Phi_G$.

Pytamy o charakteryzację topologicznie stabilnych odwzorowań $F \in \Omega(d_1, d_2)$.

Niech $\Omega(d_1, d_2)$ oznacza przestrzeń odwzorowań wielomianowych $F = (f_1, f_2) : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ o stopniach ograniczonych przez $d_1, d_2$.

Oczywiście $\Omega(d_1, d_2)$ ma strukturę przestrzeni afinicznej.

Mówimy, że odwzorowanie $F \in \Omega(d_1, d_2)$ jest topologicznie stabilne, jeśli istnieje takie otoczenie $U \subset \Omega(d_1, d_2)$ punktu $F$, że dla każdego $G \in U$ odwzorowania $F$ i $G$ są topologicznie równoważne, czyli istnieją takie homeomorfizmy $\Psi_G, \Phi_G : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, że $F = \Psi_G \circ G \circ \Phi_G$.

Pytamy o charakteryzację topologicznie stabilnych odwzorowań $F \in \Omega(d_1, d_2)$.

### Twierdzenie (M. F., Z. Jelonek, M.A.S. Ruas)

*Istnieje taki podzbiór $U \subset \Omega(d_1, d_2)$ otwarty i gęsty w topologii Zariskiego, że dla każdego odwzorowania $F \in U$ wszystkie punkty osobliwe jego wyróżnika $\Delta(F) = F(C(F))$ są ostrzami albo pętlami. Ponadto liczba ostrzy jest równa*

$$c(d_1, d_2) = d_1^2 + d_2^2 + 3d_1 d_2 - 6d_1 - 6d_2 + 7$$

*a liczba pętli jest równa*

$$\begin{aligned} n(d_1, d_2) = & \frac{1}{2}\Big( (d_1 d_2 - 4)((d_1 + d_2 - 2)^2 - 2) - \\ & (\gcd(d_1, d_2) - 5)(d_1 + d_2 - 2) - 6 \Big). \end{aligned}$$

**Twierdzenie (M. F., Z. Jelonek)**

*Niech $F \in \Omega(d_1, d_2)$. Jeśli odwzorowanie $F$ ma maksymalną możliwą liczbę ostrzy ($c(d_1, d_2)$) oraz maksymalną możliwą liczbę pętli ($n(d_1, d_2)$) to $F$ jest lokalnie stabilne i topologicznie stabilne w $\Omega(d_1, d_2)$.*

Ostrza i pętle odwzorowania $F = (f_1, f_2) \in \Omega(d_1, d_2)$ można względnie łatwo wyznaczyć. Niech:

$$J = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad J_1 = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial J}{\partial x_1} & \frac{\partial J}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad J_2 = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial J}{\partial x_1} & \frac{\partial J}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

Wtedy ostrza $\Delta(F)$ są zawarte w zbiorze $F(\{J = J_1 = J_2 = 0\})$.

Natomiast pętle są zawarte w zbiorze

$$F\circ\pi_1(\{(p,q)\in\mathbb{C}^2\times\mathbb{C}^2:\ J(p)=J(q)=0,\ F(p)=F(q),\ p\neq q\})$$

# Przykład

Odwzorowanie topologicznie stabilne w $\Omega(3,1)$ ma dwa ostrza i nie ma pętli.
$F(x,y) = (y^3 + xy, x)$ nie jest stabilne, gdyż posiada tylko jedno ostrze.
$F_a(x,y) = (y^3 - ax^2y + xy, x)$ jest stabilne dla $a \neq 0$, gdyż posiada ostrza w $(0,0)$ i $(1/a,0)$.

# Funkcja Rabiera

Niech $V \cong \mathbb{K}^n$, $W \cong \mathbb{K}^m$ będą przestrzeniami wektorowymi. Dla odwzorowania liniowego $A \in \mathcal{L}(V, W)$ definiujemy

$$\nu(A) = \inf_{\|\phi\|=1} \|A^*(\phi)\|,$$

gdzie $A^* \in \mathcal{L}(W^*, V^*)$ jest odwzorowaniem dualnym, $\phi^* \in W^*$. Mamy $\nu(A) = \inf\{\|A - B\| : B \in \mathcal{L}(V, W), B \text{ nie jest surjekcją}\}$

Niech $X \subset \mathbb{C}^k$ będzie gładką podrozmaitością algebraiczną. Niech $f : X \to \mathbb{C}^m$ będzie dominującym odwzorowaniem wielomianowym. Definiujemy zbiory:

- wartości krytycznych $K_0(f) = \overline{f(C(f))}$,
- asymptotycznych wartości krytycznych $K_\infty(f) = \{y \in \mathbb{C}^m :$ istnieje taki ciąg $x_n \to \infty$, $x_n \in X$, że $\|x_n\|\nu(d_{x_n}f) \to 0$ oraz $f(x_n) \to y\}$,
- uogólnionych wartości krytycznych $K(f) = K_0(f) \cup K_\infty(f)$.

Niech $X \subset \mathbb{C}^k$ będzie zbiorem algebraicznym. Niech $S = \{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ będzie stratyfikacją $X$.
Definiujemy zbiór $K(f, S)$ stratyfikowanych uogólnionych wartości krytycznych odwzorowania $f$ dany przez

$$K(f, S) = \bigcup_{\alpha \in I} K(f|_{X_\alpha}).$$

### Twierdzenie (Z. Jelonek, S.T. Dinh)

*Niech $X \subset \mathbb{C}^n$ będzie rozmaitością afiniczną ze stratyfikacją Whitneya $S$. Niech $f : X \to \mathbb{C}^m$ będzie dominującym odwzorowaniem wielomianowym. Wtedy $f$ jest lokalnie trywialne poza $K(f)$.*

### Wniosek

*Niech $X \subset \mathbb{C}^n$ będzie rozmaitością afiniczną ze stratyfikacją Whitneya $S$. Niech $f : X \to \mathbb{C}^m$ będzie dominującym odwzorowaniem wielomianowym. Jeśli dla każdego płatu $X_\alpha$, $\alpha \in S$, zacieśnienie $f|_{X_\alpha}$ jest submersją oraz $K_\infty(f|_{X_\alpha}) = \emptyset$, to $f$ jest lokalnie trywialne.*

## Twierdzenie (Z. Jelonek, S.T. Dinh)

*Niech $X \subset \mathbb{C}^n$ będzie rozmaitością afiniczną ze stratyfikacją Whitneya $S$. Niech $f : X \to \mathbb{C}^m$ bedzie dominującym odwzorowaniem wielomianowym. Wtedy $f$ jest lokalnie trywialne poza $K(f)$.*

## Wniosek

*Niech $X \subset \mathbb{C}^n$ będzie rozmaitością afiniczną ze stratyfikacją Whitneya $S$. Niech $f : X \to \mathbb{C}^m$ będzie dominującym odwzorowaniem wielomianowym. Jeśli dla każdego płatu $X_\alpha$, $\alpha \in S$, zacieśnienie $f|_{X_\alpha}$ jest submersją oraz $K_\infty(f|_{X_\alpha}) = \emptyset$, to $f$ jest lokalnie trywialne.*

## Twierdzenie (Z. Jelonek)

*Niech $X, Y$ będą gładkimi nierozkładalnymi rozmaitościami afinicznymi, $M$ rozmaitością nierozkładalną. Niech $F : M \times X \to Y$ będzie algebraiczną rodziną właściwych odwzorowań wielomianowych $X \to Y$. Jeśli dla wszystkich $m_1, m_2 \in M$ zachodzi:*

1. $\mu(F_{m_1}) = \mu(F_{m_2})$,
2. *trójki* $(Y, \overline{F_{m_1}(X)}, B(F_{m_1}))$ *oraz* $(Y, \overline{F_{m_2}(X)}, B(F_{m_2}))$ *są homeomorficznie równoważne,*

*to dla wszystkich $m_1, m_2 \in M$ odwzorowania $F_{m_1}$ i $F_{m_1}$ są topologicznie równoważne.*

## Lemat

*Niech $f_1, f_2, f_3, f_4$ będą wielomianami jednorodnymi w $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ stopni $d_1, d_2, d_3, d_4$, przy czym $d_1 = d_2 \leqslant d_3 < d_4$. Załóżmy, że ideał $(f_3, f_4)$ jest zawarty w $(f_1, f_2)$. Niech $N$ będzie liczbą punktów izolowanych $V(f_3, f_4) \subset \mathbb{P}^2$, które nie są zawarte w $V(f_1, f_2)$.*
*Wtedy $N \leqslant d_3 d_4 - d_1 d_2$. Ponadto jeśli $V(f_3, f_4)$ zawiera krzywą lub istnieje punkt, który jest zawarty w $V(f_3, f_4)$ z większą krotnością niż w $V(f_1, f_2)$, to nierówność jest ostra.*

## Lemat

*Niech $F = (f_1, f_2) \in \Omega_2(d_1, d_2)$ będzie odwzorowaniem o maksymalnej liczbie ostrzy i pętli. Mamy:*

1. *$F$ jest właściwe,*
2. *$C(F)$ jest krzywą zredukowaną i ma stopień $d_1 + d_2 - 2$,*
3. *$\mu(F) = d_1 d_2$, czyli $V(f_1)$ oraz $V(f_2)$ nie przecinają się w nieskończoności,*
4. *jeśli $\gcd(d_1, d_2) \neq d_2$, to $V(f_1)$ oraz $C(F)$ nie przecinają się w nieskończoności,*
5. *wszystkie osobliwości $F$ są stabilne, czyli są fałdami, ostrzami lub pętlami.*

## Lemat

*Zbiór* $U = \{F \in \Omega(d_1, d_2) : \ F$ *ma maksymalną liczbę ostrzy i pętli*$\}$ *jest otwarty.*
*Niech* $\Phi : U \times \mathbb{C}^2 \ni (p, (x, y)) \mapsto (p, F_p(x, y)) \in U \times \mathbb{C}^2$. *Wtedy:*

1. $C(\Phi) \cap \{p\} \times \mathbb{C}^2 = C(F_p)$,
2. $\Delta(\Phi) \cap \{p\} \times \mathbb{C}^2 = \Delta(F_p)$,
3. *każdy punkt osobliwy* $\Delta(\Phi)$ *jest postaci* $(p, q)$, *gdzie* $q \in \mathrm{Sing}(\Delta(F_p))$,
4. *stratyfikacja* $X := U \times \mathbb{C}^2$ *postaci*

$$\{X_1, X_2, X_3\} = \{X \setminus \Delta(\Phi), \Delta(\Phi) \setminus \mathrm{Sing}(\Delta(\Phi)), \mathrm{Sing}(\Delta(\Phi))\}$$

*jest stratyfikacją Whitneya.*

Rozważamy rzutowanie $\pi : U \times \mathbb{C}^2 \ni (F, (x, y)) \mapsto F \in U$ i pokazujemy, że $K(\pi, S) = \emptyset$. Oczywiście $K_0(\pi, X_1) = K_0(\pi, X_2) = K_0(\pi, X_3) = \emptyset$. Łatwo widać, że $K_\infty(\pi, X_1) = K_\infty(\pi, X_3) = \emptyset$. Trzeba pokazać, że $K_\infty(\pi, X_2) = \emptyset$.

Otrzymujemy trywializację $\pi$, która zawęża się do trywializacji $\pi|_{X_1 \cup X_2}$. Czyli dla każdego $F \in U$ istnieje otoczenie $V$, dla którego mamy rodzinę homeomorfizmów $\Phi_p : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $p \in V$, dla których $\Phi_p(\Delta(F_p)) = \Delta(F)$. Ponadto $\mu(F) = \mu(F_p)$, więc $F$ i $F_p$ są topologicznie równoważne.

Rozważamy rzutowanie $\pi : U \times \mathbb{C}^2 \ni (F, (x, y)) \mapsto F \in U$ i pokazujemy, że $K(\pi, S) = \emptyset$. Oczywiście $K_0(\pi, X_1) = K_0(\pi, X_2) = K_0(\pi, X_3) = \emptyset$. Łatwo widać, że $K_\infty(\pi, X_1) = K_\infty(\pi, X_3) = \emptyset$. Trzeba pokazać, że $K_\infty(\pi, X_2) = \emptyset$.

Otrzymujemy trywializację $\pi$, która zawęża się do trywializacji $\pi|_{X_1 \cup X_2}$. Czyli dla każdego $F \in U$ istnieje otoczenie $V$, dla którego mamy rodzinę homeomorfizmów $\Phi_p : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $p \in V$, dla których $\Phi_p(\Delta(F_p)) = \Delta(F)$. Ponadto $\mu(F) = \mu(F_p)$, więc $F$ i $F_p$ są topologicznie równoważne.

Dziękuję za uwagę.