MATERIAŁY NA XXXIV KONFERENCJĘ
Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ

2013 **Łódź** **str. 11**

FORMUŁA TYPU KUSZNIRENKI DLA NIEZMIENNIKA δ

Janusz Gwoździewicz (Kielce)

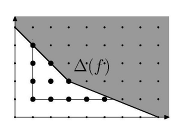
1 Wstęp

Niech $K[[x,y]]$ będzie pierścieniem formalnych szeregów potęgowych nad algebraicznie domkniętym ciałem K. Z każdym niezerowym szeregiem potęgowym $f = \sum_{ij} a_{ij}x^iy^j \in K[[x,y]]$ bez stałego wyrazu można skojarzyć dwie powiązane ze sobą wielkości.

Pierwszą z nich jest niezmiennik $\delta(f)$, zwany również liczbą punktów podwójnych krzywej $f = 0$ ukrytych w zerze, który definiuje się algebraicznie jako $\dim_K(\bar{R}/R)$ gdzie $R = K[[x,y]]/\langle f\rangle$ oraz $\bar{R}$ jest domknięciem całkowitym pierścienia R w jego pierścieniu ułamków.

Druga to wielkość $\delta_N(f)$. Przypomnijmy, że diagram Newtona $\Delta(f)$ jest to otoczka wypukła zbioru $\bigcup_{a_{ij}\neq 0}\{(i,j) + \mathbf{R}^2_{\geq 0}\}$. Przyjmujemy z definicji, że $\delta_N(f)$ jest to liczba punktów kratowych domknięcia zbioru $\langle 1, +\infty) \times \langle 1, +\infty) \setminus \Delta(f)$.

Przykład 1.1 *Jeśli $f = y^5 + 3x^3y^2 + 5x^8$ to na podstawie rysunku $\delta_N(f) = 11$.*



Podana powyżej definicja $\delta_N(f)$ pochodzi z [1]. W [2] zdefiniowano tę wielkość w inny sposób. Równoważność obu definicji wynika łatwo z Uwagi 1 w [4].

Jedną z nierówności typu Kusznirenki jest $\delta(f) \geq \delta_N(f)$ (zobacz [2, Theorem 3.10]). Twierdzenie 3.12 artykułu [2] podaje warunek konieczny i wystarczający na równość. Celem tej notki jest udowodnienie tego twierdzenia w oparciu o wyniki [3] i [4].

2 WHNND

W [2] wprowadzono pojęcie quasijednorodnej niedegeneracji w sensie Newtona pod angielską nazwą "weighted homogeneous Newton non-degeneracy", w skrócie WHNND.

Przypomnijmy najpierw co to są wielomiany quasijednorodne. Niech (n,m) będzie parą względnie pierwszych liczb naturalnych. Wielomian $h = \sum_{ij} a_{ij}x^iy^j$ nazwiemy quasijednorodnym typu $(n,m;d)$ gdy dla wszystkich jednomianów $a_{ij}x^iy^j$ wchodzących w jego skład $ni+mj = d$. Liczbę d nazywamy wtedy stopniem ważonym wielomianu h względem wagi $w = (n,m)$.

Rozpatrywany przez nas szereg $f \in K[[x,y]]$ można rozłożyć na sumę

$$f = f_d^w + f_{d+1}^w + \cdots$$

gdzie $f_d^w \neq 0$ i f_l^w są wielomianami quasijednorodnymi stopni ważonych l względem wagi w dla $l \geq d$. Wielomian f_d^w rozkłada się na iloczyn czynników

$$f_d^w = \mathit{jednomian} \times \prod_{i=1}^{k} (y^n - a_ix^m)^{r_i}$$

z niezerowymi i parami różnymi współczynnikami a_i.

Powiemy, że szereg f jest WHNND względem wagi $w = (n,m)$ gdy dla dowolnego indeksu $i \in \{1,\ldots,k\}$ wykładnik $r_i = 1$ lub w przypadku gdy $r_i > 1$ wielomian $y^n - a_ix^m$ nie dzieli f_{d+1}^w. Szereg f nazwiemy WHNND gdy jest on WHNND względem każdej wagi.

Warunek WHNND wystarczy sprawdzać dla wag $w = (n,m)$ dla których wektor $[n,m]$ jest prostopadły do krawędzi diagramu Newtona szeregu f bo tylko wtedy wielomian f_d^w nie jest jednomianem.

Zacytujmy Twierdzenie 3.12 z [2].

Twierdzenie 2.1 *Jeśli $\delta_N(f) < +\infty$ to $\delta(f) = \delta_N(f)$ wtedy i tylko wtedy gdy szereg $f \in K[[x,y]]$ jest WHNND.*

Uwaga 2.2 *Gdy $\delta_N(f) = +\infty$ to z nierówności $\delta(f) \geq \delta_N(f)$ wynika, że również $\delta(f) = +\infty$.*

3 Modyfikacje toryczne a WHNND

Celem tego rozdziału jest pokazanie, że szereg $f \in K[[x,y]]$ jest WHNND wtedy i tylko wtedy gdy przeciwobraz właściwy krzywej $f=0$ poprzez modyfikację toryczną skojarzoną z diagramem Newtona $\Delta(f)$ jest krzywą nieosobliwą w punktach przecięcia z dywizorem wyjątkowym.

Niech σ będzie lokalną modyfikacją toryczną o wachlarzu wśród którego krawędzi są wszystkie o kierunkach wewnętrznych wektorów normalnych do krawędzi diagramu Newtona $\Delta(f)$. Rozpatrzmy jeden ze stożków wachlarza rozpinany przez wektory całkowitoliczbowe $[n,m]$, $[n_1,m_1]$, gdzie $n>0$, $m>0$, $nm_1 - mn_1 = 1$. Dokonując podstawienia torycznego $x = u^n v^{n_1}$, $y = u^m v^{m_1}$ w $f = f_d^w + f_{d+1}^w + \cdots$ otrzymujemy szereg postaci

$$jednomian \times \Big(\prod_{i=1}^{k}(v-a_i)^{r_i} + \tilde{f}_{d+1}^w(v)u + \cdots\Big).$$

Zatem krzywa $\prod_{i=1}^{k}(v-a_i)^{r_i} + \tilde{f}_{d+1}^w(v)u + \cdots = 0$ będąca przeciwobrazem właściwym $f=0$ przecina składową $u=0$ dywizora wyjątkowego w punktach $(0,a_i)$ dla $i=1,\ldots,k$. Jest ona we wszystkich tych punktach krzywą nieosobliwą, czyli zadawaną przez równania rzędu 1 w tych punktach, wtedy i tylko wtedy gdy szereg f jest WHNND względem wagi (n,m).

4 Dowód twierdzenia

Niech σ będzie lokalną modyfikacją toryczną z poprzedniego rozdziału. Wtedy na podstawie Twierdzenia 4 z [4] dostajemy $\delta(f) = \delta_N(f) + \sum_p \delta_p(C)$ gdzie suma jest rozciągnięta na wszystkie punkty przecięcia przeciwobrazu właściwego krzywej $f=0$, oznaczanego przez C, z dywizorem wyjątkowym. Twierdzenie to zostało wypowiedziane i udowodnione dla zbieżnych zespolonych szeregów potęgowych zmiennych x, y ale ponieważ jego dowód jest oparty na formule Noethera dla niezmiennika δ zachodącej również dla szeregów formalnych w dowolnej charakterystyce, pozostaje ono prawdziwe dla $f \in K[[x,y]]$.

Każdy z niezmienników $\delta_p(C)$ jest liczbą nieujemną i jest równy 0 wtedy i tylko wtedy gdy krzywa C jest nieosobliwa w punkcie p. Stąd $\delta(f) = \delta_N(f)$ wtedy i tylko wtedy gdy C jest krzywą nieosobliwą w punktach przecięcia z dywizorem wyjątkowym co jak stwierdziliśmy w poprzednim rozdziale jest równoważne WHNND szeregu f.

Literatura

[1] Peter Beelen, Ruud Pellikaan, *The Newton Polygon of Plane Curves with Many Rational Points,* Designs, Codes and Cryptography 21 (2000), 41–67.

[2] Gert-Martin Greuel, Hong Duc Nguyen, *Some remarks on the planar Kouchnirenko's theorem,* Rev Mat Complut 25:557–579 (2012), DOI 10.1007/s13163-0082-7.

[3] Janusz Gwoździewicz, *Formuły typu Kusznirenki dla lokalnych niezmienników krzywych analitycznych,* Materiały na XXVII konferencję szkoleniową z geometrii analitycznej i algebraicznej zespolonej, Łódź 2006, 33–41.

[4] Janusz Gwoździewicz, *Generalized Noether's formulas for plane curves singularities,* Univ. Iagel. Acta Math. 48 (2010), 55–62.

Some remarks on Kouchnirenko type formula for delta-invariant

Summary. Let $f \in K[[x, y]]$ be a formal power series over the algebraically closed field K of arbitrary characteristic. In this note we compare the delta-invariant $\delta(f)$ with $\delta_N(f)$ calculated using the Newton diagram of f. We reprove Greuel and Nguyen's result that $\delta(f) = \delta_N(f)$ if and only if f is satisfies some nondegeneracy condition called the weighted homogeneous Newton non-degeneracy.

Łódź, 7 – 11 stycznia 2013 r.