MATERIAŁY XXII KONFERENCJI SZKOLENIOWEJ
Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ
ZESPOLONEJ

2001 Łódź str. 7

O C^0-DOSTATECZNOŚCI DŻETÓW RZECZYWISTYCH I ZESPOLONYCH

Janusz Gwoździewicz, Andrzej Lenarcik (Kielce)

Wstęp
W tym przeglądowym artykule chcemy przypomnieć kilka podstawowych faktów związanych z lokalną stabilnością topologiczną dżetów rzeczywistych i zepolonych, a także zwrócić uwagę na kilka dotychczas otwartych pytań. Ze szczególną uwagą omawiamy przypadek rzeczywisty; jest on trudniejszy i jego delikatność może umknąć uwadze, gdy koncentrujemy się wyłącznie na przypadku zespolonym. Na finezję przypadku rzeczywistego zwrócił nam uwagę Wojciech Kucharz w styczniu 1997 (w czasie semestru poświeconego osobliwościom w Instytucie Fieldsa w Toronto).

Stabilność topologiczna dżetów była intensywnie badana na przełomie lat sześćdziesiątych i siedemdziesiątych w ramach tzw. teorii katastrof zaproponowanej przez René Thoma, stawiającej sobie za cel klasyfikację osobliwości. Szybko okazało się, że klasyfikacja analityczna dostarcza zbyt wiele typów, skąd wzrost znaczenia podejścia topologicznego. Idąc tropem naturalnej historycznej kolejności koncentrujemy się na przypadku rzeczywistym. Większość oznaczeń zaczerpnęliśmy z książki [Lu].

Dostateczność dżetów
Zdefiniujmy przestrzeń r-dżetów. Rozważamy lokalne odwzorowania $(\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^p, 0)$ klasy C^k $(k \geq r)$. Dwie takie funkcje uważamy za równoważne, jeżeli

ich rozwinięcia Taylora w zerze do rzędu r włącznie pokrywają się. Klasy abstrakcji tej relacji nazywamy r-dżetami. Tak zdefiniowaną przestrzeń r-dżetów oznaczamy $J^r(n,p)$. Klasę abstrakcji funkcji f będziemy oznaczać $j^r(f)$. W ustalonym układzie współrzędnych, każdy r-dżet jest jednoznacznie reprezentowany przez wielomian stopnia nie przekraczającego r.

Dżet $Z \in J^r(n,p)$ nazywamy C^0-dostatecznym w klasie C^k $(k \geq r)$, jeżeli dla dowolnych jego realizacji f, g w tej klasie, istnieją lokalne homeomorfizmy $h_1 : (\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^n, 0)$ oraz $h_2 : (\mathbf{R}^p, 0) \to (\mathbf{R}^p, 0)$ takie, że

$$g \circ h_1 = h_2 \circ f\ .$$

Dla $p = 1$ zawsze można przyjąć $h_2 = id$. Zwróćmy uwagę, że pojęcie C^0-dostateczności związane jest z ustaloną klasą regularności. Zamiast klasy C^k rozważamy także przypadek gładki (C^∞) i analityczny (C^ω). Potrzeba uwzględniania klasy regularności nie pojawia się w przypadku zespolonym, dzięki czemu pojęcie jest tam prostsze. W przypadku rzeczywistym uwzględnianie klasy jest zasadne. Później, przeanalizujemy za [Lu] dżet $Z \in J^{10}(2,1)$ C^0-dostateczny w klasie C^{11}, który nie jest C^0-dostateczny w klasie C^{10}. Omówimy także bardzo ciekawe przykłady Kucharza [Kuch] tego typu. Przykładem dżetu, który nie jest C^0-dostateczny w żadnej możliwej klasie jest $x^2 \in J^2(2,1)$.

Ważnym pojęciem blisko związanym z C^0-dostatecznością jest V-dostateczność (od słowa *variety*). Dżet $Z \in J^r(n,p)$ nazywamy V-dostatecznym w klasie C^k $(k \geq r)$, jeżeli dla dowolnych jego realizacji f, g w tej klasie, zbiory $f^{-1}(0)$ oraz $g^{-1}(0)$ są lokalnie homeomorficzne. Oczywiście C^0-dostateczność implikuje V-dostateczność, ale generalnie nie na odwrót. Znane nam przykłady, różnic pomiędzy tymi pojęciami dotyczą funkcji o wartościach wektorowych (patrz [Lu]). Jak zaraz zobaczymy pojęcia C^0- i V-dostateczności są bardzo zbliżone w przypadku funkcji skalarnych, do których ograniczymy się w dalszym ciągu.

Podstawowym pytaniem w rozważanej teorii jest pytanie o dostateczność dżetu. Dżet dany jest jako para: liczba całkowita dodatnia r oraz funkcja f klasy C^r. Dla funkcji skalarnych mamy następujące dwa klasyczne wyniki.

Twierdzenie 1 (Kuo [Kuo1], Kuiper [Kuip], Bochnak, Łojasiewicz [BŁ]).
Niech $Z \in J^r(n,1)$ będzie r-dżetem, a f jego realizacją. Wówczas następujące warunki są równoważne:

(i) *Z jest V-dostateczny w klasie C^r,*

(ii) *Z jest C^0-dostateczny w klasie C^r,*

(iii) $|\mathrm{grad}\, f(x)| \geq c|x|^{r-1}$ *w otoczeniu zera dla pewnego $c > 0$.*

Warto zauważyć, że własność (iii) jest własnością dżetu, a nie tylko jego realizacji. Dowód implikacji (iii)⇒(ii) podali niezależnie Kuo [Kuo1] oraz Kuiper [Kuip]. Implikacja (ii)⇒(i) jest oczywista. Implikację (i)⇒(iii) udowodnili Bochnak i Łojasiewicz [BŁ].

Kolejne twierdzenie sprawia pozornie wrażenie twierdzenia ogólniejszego, ale w istocie tak nie jest. Jest to po prostu inne twierdzenie.

Twierdzenie 2.
Niech $Z \in J^r(n,1)$ będzie r-dżetem, a f jego realizacją. Wówczas następujące warunki są równoważne:

(i) *Z jest V-dostateczny w klasie C^{r+1},*

(ii) *Z jest C^0-dostateczny w klasie C^{r+1},*

(iii) $|\operatorname{grad} f(x)| \geq c|x|^{r-\delta}$ *w otoczeniu zera dla pewnych $c > 0$, $\delta > 0$.*

Wydaje się to dziwne, ale żadna z istotnych implikacji (iii)⇒(ii) oraz (i)⇒(iii) w Twierdzeniu 2 nie wynika bezpośrednio z analogicznych implikacji w Twierdzeniu 1, ani na odwrót. Prawdziwość implikacji (iii)⇒(ii) w Twierdzeniu 2 dostrzegli Lu i Chung [Lu,LuCh] (być może ktoś jeszcze), ale przypisują ten wynik Kuo, gdyż jest prostą przeróbką dowodu analogicznej implikacji w Twierdzeniu 1. Do dowodu implikacji (i)⇒(iii) w Twierdzeniu 2, [Lu] odsyła do wspomnianej pracy [BŁ]. Nie jest ona jednak, jak łatwo zauważyć, bezpośrednią konsekwencją twierdzenia Bochnaka i Łojasiewicza.

Obserwując warunki (iii) obu twierdzeń widzimy, że podstawowe znaczenie dla teorii ma minimalizowanie wykładnika α w nierówności

$$|\operatorname{grad} f(x)| \geq c|x|^{\alpha} \text{ w otoczeniu zera dla pewnego } c > 0\ .$$

Dla danej funkcji f, infimum takich wykładników nazywamy lokalnym wykładnikiem Łojasierwicza gradientu. Infimum to będziemy oznaczać $l_0^{\mathbf{R}}(\operatorname{grad} f)$. Wykładnik Łojasiewicza w przypadku rzeczywistym badany był w wielu pracach (np. [Ł], [Kuo2], [BR], [G1], [G2]). Jeżeli f jest analityczna, to wykładnik jest osiągany.

Poniższy przykład pochodzi z książki [Lu] (example 1.4, p. 147). Rozważmy wielomian $f(X,Y) = X^3 - 3XY^7$. Mamy $l_0^{\mathbf{R}}(\operatorname{grad} f) = 9\frac{1}{2}$, skąd

$$|\operatorname{grad} f(x,y)| \geq c|(x,y)|^{10-\frac{1}{2}} \text{ lokalnie dla pewnego } c > 0\ .$$

Z twierdzenia 2 wynika, że dżet $j^{10}(f)$ jest C^0-dostateczny w klasie C^{11} oraz nie jest on C^0-dostateczny w klasie C^{10}. Warto znać bezpośrednie sprawdzenie tego drugiego faktu. Wystarczy pokazać, że dżet nie jest V-dostateczny w tej klasie. Realizacją dżetu w klasie C^{10} jest

$$x^3 - 3xy^7 = 2|y|^{10\frac{1}{2}} + (x - |y|^{\frac{7}{2}})^2(x + 2|y|^{\frac{7}{2}})\ .$$

Dodając od obu stron zaburzenia $\pm y^{2N}(x+2|y|^{\frac{7}{2}})$, po przyrównaniu do zera, otrzymujemy zbiory lokalnie niehomeomorficzne.

Stopnie dostateczności
Niech teraz $f : (\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}, 0)$ będzie funkcją analityczną. Funkcja określa r-dżet $j^r(f)$ dla dowolnego $r = 0, 1, \ldots$. Dla dowolnego ustalonego $k = 0, 1, \ldots$ możemy szukać minimalnego r takiego, że dżet $j^r(f)$ jest C^0-dostateczny (V-dostateczny) w klasie C^{r+k}. Wielkość tę oznaczmy $v_f^{(k)}$ w przypadku V-dostateczności i $\nu^{(k)}$

w przypadku C^0-dostateczności (to drugie oznaczenie nawiązuje do tradycyjnego oznaczenia $\nu_f = \nu_f^{(\omega)}$). Wprost z definicji mamy

$$v_f^{(0)} \geq v_f^{(1)} \geq \ldots \geq v_f^{(\infty)} \geq v_f^{(\omega)} \,. \tag{1}$$

oraz

$$\nu_f^{(0)} \geq \nu_f^{(1)} \geq \ldots \geq \nu_f^{(\infty)} \geq \nu_f^{(\omega)} \tag{2}$$

Ponadto

$$\nu_f^{(k)} \geq v_f^{(k)} \,. \tag{3}$$

Z Twierdzenia 1 mamy

$$v_f^{(0)} = \nu_f^{(0)} = \langle l_0^{\mathbf{R}}(\operatorname{grad} f)\rangle + 1 \tag{4}$$

(przez $\langle x\rangle$ oznaczamy najmniejszą liczbę całkowitą $\geq x$). Z Twierdzenia 2 wynika, że

$$v_f^{(1)} = \nu_f^{(1)} = [l_0^{\mathbf{R}}(\operatorname{grad} f)] + 1 \tag{5}$$

(przez $[x]$ oznaczamy największą liczbę całkowitą $\leq x$). Z wzorów (4) i (5) wynika równość wymienionych czterech stopni dostateczności, gdy wykładnik Łojasiewicza jest liczbą całkowitą. Dla ułamkowego wykładnika, (4) jest dokładnie o jeden większe od (5). Dla $f = X^3 - 3XY^7$ z przykładu mamy $v_f^{(0)} = \nu_f^{(0)} = 11$ oraz $v_f^{(1)} = \nu_f^{(1)} = 10$.

Dla $k \geq 2$ nie są znane dokładne wzory na $v_f^{(k)}$ oraz $\nu_f^{(k)}$. Z (1), (2), (3) i (5) wynika, że wielkości te szacują się z góry przez $[l_0^{\mathbf{R}}(\operatorname{grad} f)] + 1$. Ponadto łatwo sprawdzamy, że kolejne wartości w ciągach (1) i (2), dla k skończonych, różnią się co najwyżej o 1. Nie wiemy czy równość w (3), która dla $k = 0$, $k = 1$ wynika z cytowanych twierdzeń, zachodzi także dla $k \geq 2$.

Warto teraz przyjrzeć się przypadkowi zespolonemu. Ograniczymy się do przypadku holomorficznych funkcji skalarnych $(\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$. Przestrzeń r-dżetów definiujemy analogicznie jak w przypadku rzeczywistym. Ponieważ różniczkowalność jest tu równoważna holomorficzności, uwzględniamy wyłącznie realizacje holomorficzne. Dzięki temu łatwiejsza jest definicja V- i C^0-dostateczności dżetu. Również stopnie V- i C^0-dostateczności redukują się wyłącznie do przypadku holomorficznego. Odpowiednie stopnie dla funkcji f będziemy oznaczać v_f oraz ν_f, przy czym jak poprzednio $v_f \leq \nu_f$. Analogicznie definiujemy wykładnik Łojasiewicza. W przypadku zespolonym zachodzi elegancka równość

$$\nu_f = [l_0^{\mathbf{C}}(\operatorname{grad} f)] + 1 \,.$$

Nierówność $\leq$ wykazali Lu i Chang [LuCh] opierając się na pracy [Kuo1], zaś nierówność przeciwną udowodnił Teissier [Te].

Przykłady Kucharza

Pod koniec lat siedemdziesiątych Bochnak i Kucharz [BK] sformułowali hipotezę dotyczącą C^0-dostateczności dżetów rzeczywistych, którą w naszych oznaczeniach można zapisać jako

$$\nu_f^{(1)} = \nu_f^{(2)} = \ldots = \nu_f^{(\infty)} \ . \tag{6}$$

Hipoteza ta uwzględniała również funkcje o wartościach wektorowych. Gdyby hipoteza była prawdziwa, to wszystkie stopnie byłyby równe $[l_0^{\mathbf{R}}(\operatorname{grad} f)] + 1$. W połowie lat osiemdziesiątych Kucharz [Kuch] podał kontrprzykład dla dżetów $J^r(3,1)$.

Przykład (Kucharz).
Niech $f_k(x,y,z) = x^3 - 3xy^{2k+5} + z^3$, $k = 1, 2, \ldots$, będzie wielomianem zmiennych rzeczywistych. Niech $r_k = 2k+7$. Wówczas:

(i) *dżet $j^{r_k}(f)$ jest C^0-dostateczny w klasie C^{r_k+k+1},*

(ii) *dżet $j^{r_k+k}(f)$ nie jest V-dostateczny w klasie C^{r_k+k}.*

Z (i) mamy

$$\nu_f^{(k+1)} \leq r_k = 2k+7$$

oraz z (ii)

$$v_f^{(0)} > r_k + k = 3k+7 \ ,$$

co daje nam ostrą nierówność w ciągu (6):

$$\nu_f^{(1)} \geq v_f^{(0)} - 1 > 3k+6 \geq 2k+7 \geq \nu_f^{(k+1)} \ .$$

Hipoteza Bochnaka-Kucharza pozostaje otwarta w $J^r(2,1)$.

Zakończenie.
Może na koniec jeszcze kilka słów o porównaniu wykładnika rzeczywistego i zespolonego funkcji analitycznej. Ten sam szereg zbieżny f dwu zmiennych o współczynnikach rzeczywistych, definiuje jednocześnie rzeczywistą funkcję analityczną oraz funkcję holomorficzną. Ponieważ $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$, wykładnik rzeczywisty możemy traktować jako wykładnik zespolony zawężony do podzbioru. Wynika stąd łatwo nierówność

$$l_0^{\mathbf{C}}(\operatorname{grad} f) \geq l_0^{\mathbf{R}}(\operatorname{grad} f) \ .$$

Merle podał przykład $f = y^5 - x^{12} + yx^{10}$, dla którego nierówność jest ostra. Mamy $l_0^{\mathbf{R}}(gradf) = 10$ (patrz np. [G1]) oraz $l_0^{\mathbf{C}}(gradf) = 11$ (można np. skorzystać z [Len]). Obszerna analiza zależności pomiędzy przypadkiem rzeczywistym i zespolonym zaprezentowana jest w [BR].

Spis literatury

[BK] J. Bochnak, W. Kucharz, *Sur les germes d'applications différentiables à singularités isolées*, Trans. Amer. Math. Proc. 252, 8 (1979), 115–131.

[BŁ] J. Bochnak, S. Łojasiewicz, *A converse of the Kuiper-Kuo theorem*, (Proc. of Liverpool Singularities-Symposium I), Lectures Notes in Math., vol. 192, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, and New York (1971), 254–261.

[BR] J. Bochnak, J.J. Riesler, *Sur les exposants de Lojasiewicz*, Comment. Math. Helv. 50 (1975), 493–507.

[G1] J. Gwoździewicz, *Wykładnik Łojasiewicza funkcji analitycznej o zerze izolowanym*, Uniwersytet Jagielloński (1995), /praca doktorska/.

[G2] J. Gwoździewicz, *The Łojasiewicz eksponent of an analytic function at an isolated zero*, Comment. Math. Helv. 74 (1999), 364-375.

[Kuch] W. Kucharz, *Examples in the theory of sufficiency of jets*, Proc. Amer. Math. Soc. 96,1 (1986), 163–166.

[Kuo1] T.C. Kuo, *On C^o sufficiency of jets of potencial functions*, Topology 8 (1969), 167–171.

[Kuo2] T.C. Kuo, *Computation of Lojasiewicz exponent of $f(x, y)$*, Comment. Math. Helv. 49 (1974), 201–213.

[Kuip] N.H. Kuiper, *C^1 equivalence of functions near critical points*, Symposium Infinite Dimensional Topology, Annals of Math. Studies 69 (1972).

[Len] A. Lenarcik, *On the Łojasiewicz exponent of the gradient of a holomorphic function*, in Singularities Symposium – Łojasiewicz 70, Banach Center Publ. 44 Inst. Math., Polish Acad. Sci., Warszawa, 1998, 149–166.

[Lu] Y.C. Lu, *Singularity Theory and an Introduction to Catastrophe Theory*, Lectures Notes in Math, vol. 525, Springer-Verlag (1976).

[LuCh] Y.C. Lu, S.S. Chang, *On C^o sufficiency of complex jets*, Canad. J. Math. 25 (1973), 874–880.

[Ł] S. Łojasiewicz, *Ensembles semianalytiques*, I.H.E.S., Bures-sur-Yvette (1965).

[Te] B. Teissier, *Variétés polaires*, Inv. Math. 40 (1977), 267–292.

On C^0-sufficiency of real and complex jets

Summary. We collect known results concerning relations between C^0-sufficiency degree and the Lojasiewicz exponent.

Będlewo, 8 – 12 stycznia 2001 r.