MATERIAŁY XXIV KONFERENCJI SZKOLENIOWEJ Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ ZESPOLONEJ

2003 **Łódź** **str. 15**

WIELOMIAN, KTÓRY MA CO NAJMNIEJ k RÓŻNYCH WARTOŚCI KRYTYCZNYCH W NIESKOŃCZONOŚCI

Janusz Gwoździewicz, Maciej Sękalski (Kielce)

Liczba $\lambda \in \mathbf{C}$ jest wartością krytyczną w nieskończoności wielomianu dwóch zmiennych $f = f(x, y)$ gdy istnieje ciąg punktów $z_n = (x_n, y_n) \to \infty$ taki, że $f(z_n) \to \lambda$ i $\nabla f(z_n) \to 0$ (patrz [Ha]).

Niech $A(x) = x^k - 1$ oraz $B(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1} - x$. Rozważmy wielomian

$$g(x, y) = \big(yA(x)^2 - x\big)^2 + B(x).$$

Pokażemy, że wielomian g nie ma punktów krytycznych w $\mathbf{C}^2$ natomiast posiada co najmniej k różnych wartości krytycznych w nieskończoności.

Punkty krytyczne w części afinicznej $\mathbf{C}^2$ są rozwiązaniami układu równań

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial X} = 2(yA^2 - x)(2yAA' - 1) + A = 0, \\ \frac{\partial g}{\partial Y} = 2(yA^2 - x)A^2 = 0. \end{cases}$$

Z drugiego równania powyższego układu mamy dwa przypadki: $A = 0$ lub $yA^2 - x = 0$. Jeżeli $A = 0$, to z pierwszego równania $x = 0$ co jest sprzeczne bo $A(0) = -1$.

Jeżeli natomiast $yA^2 - x = 0$, to $\frac{\partial g}{\partial X} = A = 0$ i podobnie jak w poprzednim przypadku musiałoby być $x = 0$.

Pokażemy teraz, że wielomian g ma co najmniej k różnych wartości krytycznych w nieskończoności.

Niech α będzie pierwiastkiem wielomianu A a $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathbf{C}$ dowolnym ciągiem zbieżnym do α. Wtedy ciąg $\left(\alpha_n, \frac{\alpha_n}{A(\alpha_n)^2}\right) \to \infty$. Ponadto otrzymujemy, że

$$\nabla g\left(\alpha_n, \frac{\alpha_n}{A(\alpha_n)^2}\right) = (A(\alpha_n), 0) \to (0,0),$$

natomiast

$$\begin{aligned} g\left(\alpha_n, \frac{\alpha_n}{A(\alpha_n)^2}\right) &= B(\alpha_n) \to B(\alpha) = \\ &= \tfrac{\alpha^{k+1}}{k+1} - \alpha = \tfrac{\alpha}{k+1}A(\alpha) - \tfrac{k}{k+1}\alpha = \tfrac{-k}{k+1}\alpha. \end{aligned}$$

Wobec tego zbiór $\left\{\frac{-k}{k+1}\alpha : \alpha \in A^{-1}(0)\right\}$ zawarty jest w zbiorze wartości krytycznych w nieskończoności wielomianu g.

Literatura

[Ha] **Huy Vui Ha**, *Nombres de Lojasiewicz et singularities a l'infini des polynomes de deux variables complexes*, C. R. Acad. Sci. Paris. 311:429-432, 1990.

A POLYNOMIAL WITH AT LEAST k CRITICAL VALUES AT INFINITY

Summary. We give an example of a polynomial of two complex variables which has at least k critical values at infinity.

Łódź, 6 – 10 stycznia 2003 r.