Krawędzie luźne wielościanów Newtona

Beata Hejmej

Instytut Matematyki
Uniwersytetu Pedagogicznego w Krakowie

Łódź, 7-11 stycznia 2019

Niech $\mathbb{k}$ będzie ciałem.

Niech $\Bbbk$ będzie ciałem. Dla niezerowego szeregu

$$f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \underline{x}^\alpha \in \Bbbk[[x_1, \dots, x_n]]$$

definiujemy jego wielościan Newtona

$$\Delta(f) := \operatorname{conv} \bigcup_{a_\alpha \neq 0} (\alpha + \mathbb{R}^n_{\geqslant 0}).$$

Niech $\Bbbk$ będzie ciałem. Dla niezerowego szeregu

$$f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \underline{x}^\alpha \in \Bbbk[[x_1, \ldots, x_n]]$$

definiujemy jego wielościan Newtona

$$\Delta(f) := \operatorname{conv} \bigcup_{a_\alpha \neq 0} (\alpha + \mathbb{R}^n_{\geqslant 0}).$$

Dla $\xi \in \mathbb{R}^n_{\geqslant 0}$ zbiór

$$\Delta(f)^\xi := \left\{ a \in \Delta(f) : \langle \xi, a \rangle = \min_{b \in \Delta(f)} \langle \xi, b \rangle \right\}$$

nazywamy ścianą wielościanu Newtona $\Delta(f)$.

Niech $\Bbbk$ będzie ciałem. Dla niezerowego szeregu

$$f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \underline{x}^\alpha \in \Bbbk[[x_1, \dots, x_n]]$$

definiujemy jego wielościan Newtona

$$\Delta(f) := \operatorname{conv} \bigcup_{a_\alpha \neq 0} (\alpha + \mathbb{R}^n_{\geqslant 0}).$$

Dla $\xi \in \mathbb{R}^n_{\geqslant 0}$ zbiór

$$\Delta(f)^\xi := \left\{ a \in \Delta(f) : \langle \xi, a \rangle = \min_{b \in \Delta(f)} \langle \xi, b \rangle \right\}$$

nazywamy ścianą wielościanu Newtona $\Delta(f)$. Ścianę o wymiarze 0 nazywamy wierzchołkiem, a ścianę o wymiarze 1 nazywamy krawędzią.

Niech $\Bbbk$ będzie ciałem. Dla niezerowego szeregu

$$f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \underline{x}^\alpha \in \Bbbk[[x_1, \ldots, x_n]]$$

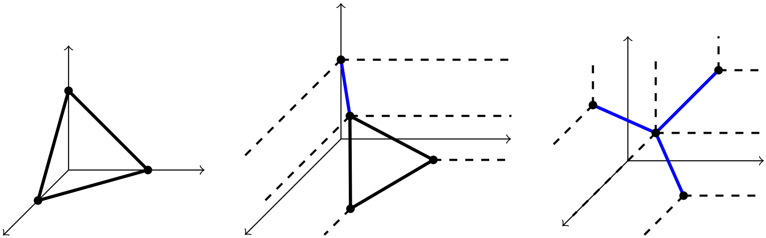
definiujemy jego wielościan Newtona

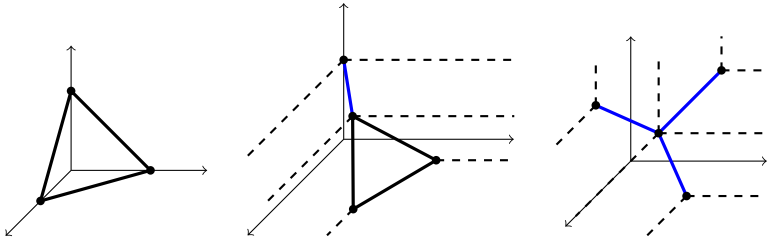
$$\Delta(f) := \operatorname{conv} \bigcup_{a_\alpha \neq 0} (\alpha + \mathbb{R}^n_{\geqslant 0}).$$

Dla $\xi \in \mathbb{R}^n_{\geqslant 0}$ zbiór

$$\Delta(f)^\xi := \left\{ a \in \Delta(f) : \langle \xi, a \rangle = \min_{b \in \Delta(f)} \langle \xi, b \rangle \right\}$$

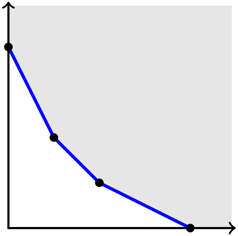
nazywamy ścianą wielościanu Newtona $\Delta(f)$. Ścianę o wymiarze 0 nazywamy wierzchołkiem, a ścianę o wymiarze 1 nazywamy krawędzią. Krawędź zwartą nazywamy luźną, jeśli nie jest zawarta w żadnej zwartej ścianie wymiaru $\geqslant 2$.





Wielościan Newtona nazywamy wielokątnym, gdy wszystkie jego krawędzie zwarte są luźne.

W przypadku dwuwymiarowym wszystkie krawędzie zwarte wielościanu Newtona są luźne.



Restrykacją symboliczną szeregu

$$f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \underline{x}^\alpha \in \Bbbk[[x_1, \dots, x_n]]$$

do zwartej ściany $A := \Delta(f)^\xi$ nazywamy wielomian

$$f|_A := \sum_{\alpha \in A \cap \mathbb{N}^n} a_\alpha \underline{x}^\alpha \in \Bbbk[x_1, \dots, x_n].$$

Restrykacją symboliczną szeregu

$$f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \underline{x}^\alpha \in \Bbbk[[x_1, \ldots, x_n]]$$

do zwartej ściany $A := \Delta(f)^\xi$ nazywamy wielomian

$$f|_A := \sum_{\alpha \in A \cap \mathbb{N}^n} a_\alpha \underline{x}^\alpha \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n].$$

Odcinek $E \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy opadającym, jeśli jest równoległy do takiego wektora $(c_1, \ldots, c_{n-1}, c_n)$, że $c_i \geqslant 0$ dla $i = 1, \ldots, n-1$ oraz $c_n < 0$.

Szereg $f \in \mathbb{C}[[x, y]]$ przedstawmy za pomocą sumy swoich składowych jednorodnych $f = f_d + f_{d+1} + \cdots$, gdzie indeks oznacza stopień danego wielomianu.

Szereg $f \in \mathbb{C}[[x,y]]$ przedstawmy za pomocą sumy swoich składowych jednorodnych $f = f_d + f_{d+1} + \cdots$, gdzie indeks oznacza stopień danego wielomianu.

Twierdzenie

Jeśli f jest nierozkładalny w $\mathbb{C}[[x,y]]$, to f_d jest potęgą pewnej formy liniowej.

Szereg $f \in \mathbb{C}[[x, y]]$ przedstawmy za pomocą sumy swoich składowych jednorodnych $f = f_d + f_{d+1} + \cdots$, gdzie indeks oznacza stopień danego wielomianu.

Twierdzenie

Jeśli f jest nierozkładalny w $\mathbb{C}[[x, y]]$, to f_d jest potęgą pewnej formy liniowej.

W pierścieniu $\Bbbk[[x, y]]$ ustalmy ω–wagę $\omega(x^i y^j) := ni + mj$ dla $n, m \in \mathbb{Z}_{>0}$. Dla szeregu $0 \neq F \in \Bbbk[\![x, y]\!]$ rozważmy jego rozkład na składowe ω–quasi-jednorodne

$$F = F_{a+b} + F_{a+b+1} + \dots ,$$

gdzie indeks oznacza ω-wagę danego wielomianu.

Twierdzenie ([1])

Jeśli $F_{a+b} = f_a g_b$*, gdzie* $f_a, g_b \in \Bbbk[x,y]$ *są quasi-jednorodne oraz względnie pierwsze, to istnieją takie szeregi* $f, g \in \Bbbk[\![x,y]\!]$*,*

$$f = f_a + f_{a+1} + \dots\ ,$$

$$g = g_b + g_{b+1} + \dots,$$

że $F = fg$*. Ponadto, jeśli* f_a *jest nierozkładalny w* $\Bbbk[x,y]$*, to* f *jest nierozkładalny w* $\Bbbk[[x,y]]$*.*

Twierdzenie ([1])

Jeśli $F_{a+b} = f_a g_b$*, gdzie* $f_a, g_b \in \Bbbk[x,y]$ *są quasi-jednorodne oraz względnie pierwsze, to istnieją takie szeregi* $f, g \in \Bbbk[\![x,y]\!]$*,*

$$f = f_a + f_{a+1} + \dots ,$$

$$g = g_b + g_{b+1} + \dots ,$$

że $F = fg$*. Ponadto, jeśli* f_a *jest nierozkładalny w* $\Bbbk[x,y]$*, to* f *jest nierozkładalny w* $\Bbbk[[x,y]]$*.*

Twierdzenie (E. García Barroso, P. González Pérez, 2005)

Jeśli szereg nierozkładalny $\phi \in \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$ *ma wielokątny wielościan Newtona* $\Delta(\phi)$*, to* $\Delta(\phi)$ *ma tylko jedną krawędź zwartą* E *oraz* $\phi|_E$ *jest potęgą pewnego wielomianu nierozkładalnego z pierścienia* $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$*.*

Twierdzenie (G. Rond, B. Schober, 2017)

Niech $P \in \Bbbk[\![x_1, \ldots, x_n]\!][y]$ będzie wielomianem Weierstrassa stopnia d. Załóżmy, że wielościan Newtona $\Delta(P)$ ma krawędź luźną Γ o końcu $(0, \ldots, 0, d)$ oraz $P|_\Gamma$ jest iloczynem dwóch względnie pierwszych wielomianów unitarnych S_1, $S_2 \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n][y]$ stopni d_1, d_2 odpowiednio. Wtedy istnieją takie dwa wielomiany Weierstrassa P_1, $P_2 \in \Bbbk[\![x_1, \ldots, x_n]\!][y]$ stopni d_1, d_2 odpowiednio, że

i) $P = P_1 P_2$,

ii) *istnieje co najmniej jedno $i \in \{1, 2\}$, dla którego $\Delta(P_i)$ ma krawędź luźną Γ_i o końcu $(0, \ldots, 0, d_i)$ równoległą do Γ oraz $P_i|_{\Gamma_i} = S_i$.*

Twierdzenie (J. Gwoździewicz, B.H., 2018)

Załóżmy, że $f \in \Bbbk[[x_1, \dots, x_n]]$ *jest szeregiem, którego wielościan Newtona* $\Delta(f)$ *ma krawędź luźną* E*. Jeśli* $f|_E$ *jest iloczynem dwóch względnie pierwszych wielomianów* $G, H \in \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ *oraz* G *nie jest podzielny przez żadną zmienną, to istnieją takie szeregi* $g, h \in \Bbbk[[x_1, \dots, x_n]]$*, że* $f = gh$*,* $g|_{E_1} = G$*,* $h|_{E_2} = H$ *oraz* $E = E_1 + E_2$*.*

Krawędź E_1 jest krawędzią luźną wielościanu Newtona $\Delta(g)$ równoległą do E, natomiast E_2 jest zwartą krawędzią wielościanu Newtona $\Delta(h)$, która jest krawędzią luźną równoległą do E albo wierzchołkiem w przypadku gdy H jest jednomianem.

Wniosek

Jeśli wielościan Newtona szeregu $f \in \Bbbk[[x_1, \ldots, x_n]]$ *ma krawędź luźną* E *i co najmniej trzy wierzchołki, to* f *jest rozkładalny.*

Wniosek

Jeśli wielościan Newtona szeregu $f \in \Bbbk[[x_1, \ldots, x_n]]$ ma krawędź luźną E i co najmniej trzy wierzchołki, to f jest rozkładalny.

Wniosek

Załóżmy, że wielościan Newtona szeregu $f \in \Bbbk[[x_1, \ldots, x_n]]$ ma krawędź luźną. Jeśli f jest nierozkładalny, to E jest jedyną krawędzią luźną wielościanu Newtona $\Delta(f)$ oraz $f|_E = cF^k$, gdzie F jest nierozkładalny w $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$. Ponadto, jeśli ciało $\Bbbk$ jest algebraicznie domknięte, to $f|_E = (a\underline{x}^\alpha + b\underline{x}^\beta)^k$, gdzie $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}^n$ jest wektorem prymitywnym.

Twierdzenie (J. Gwoździewicz, B. H., 2018)

Niech $f \in \Bbbk[[x_1, \dots, x_{n-1}]][x_n]$. *Załóżmy, że wielościan Newtona* $\Delta(f)$ *ma opadającą krawędź luźną* E. *Jeśli* $f|_E$ *jest iloczynem dwóch względnie pierwszych wielomianów* $G, H \in \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$, *gdzie* G *jest unitarny ze względu na zmienną* x_n, *to istnieją jedyne takie wielomiany* $g, h \in \Bbbk[[x_1, \dots, x_{n-1}]][x_n]$, *że* $f = gh$, *wielomian* g *jest unitarny*, $g|_{E_1} = G$, $h|_{E_2} = H$ *oraz* $E = E_1 + E_2$.

R - regularny pierścień lokalny
$\mathfrak{m}$ - ideał maksymalny pierścienia R
$\mathbb{K} := R/\mathfrak{m}$ - ciało rezydualne pierścienia R
$\widehat{R}$ - uzupełnienie $\mathfrak{m}$-adyczne pierścienia R
$(x_1, \ldots, x_n)$ - regularny układ parametrów pierścienia R

R - regularny pierścień lokalny
$\mathfrak{m}$ - ideał maksymalny pierścienia R
$\mathbb{K} := R/\mathfrak{m}$ - ciało rezydualne pierścienia R
$\widehat{R}$ - uzupełnienie $\mathfrak{m}$-adyczne pierścienia R
$(x_1, \ldots, x_n)$ - regularny układ parametrów pierścienia R

Twierdzenie ([3])

Dla każdego elementu pierścienia $f \in R$ istnieje dokładnie jeden skończony zbiór indeksów $J \subset \mathbb{N}^n$, dla którego

(i) $\{\underline{x}^\alpha : \alpha \in J\}$ *jest minimalnym zbiorem generatorów ideału* $\langle \underline{x}^\alpha : \alpha \in J \rangle$,

(ii) $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \underline{x}^\alpha$, *gdzie* $a_\alpha \notin \mathfrak{m}$ *dla* $\alpha \in J$ *oraz* $a_\alpha = 0$ *dla* $\alpha \notin J$.

Dla niezerowego elementu $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \underline{x}^\alpha \in R$ definiujemy jego wielościan Newtona

$$\Delta(f) := \operatorname{conv} \bigcup_{a_\alpha \neq 0} (\alpha + \mathbb{R}^n_{\geqslant 0}).$$

Dla niezerowego elementu $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \underline{x}^\alpha \in R$ definiujemy jego wielościan Newtona

$$\Delta(f) := \operatorname{conv} \bigcup_{a_\alpha \neq 0} (\alpha + \mathbb{R}^n_{\geqslant 0}).$$

Restrykacją symboliczną elementu $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \underline{x}^\alpha \in R$ do zwartej ściany $A := \Delta(f)^\xi$ nazywamy wielomian

$$f|_A := \sum_{\alpha \in A \cap \mathbb{N}^n} \overline{a_\alpha} \underline{X}^\alpha \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n],$$

gdzie $\overline{a_\alpha}$ jest obrazem a_α w ciele rezydualnym $\mathbb{K}$ pierścienia R.

Twierdzenie (R. Schober, 2018)

Niech R będzie regularnym pierścieniem lokalnym oraz niech $f \in R$ będzie niezerowym elementem pierścienia R. Załóżmy, że wielościan Newtona $\Delta(f)$ ma krawędź luźną E. Jeśli $f|_E$ jest iloczynem dwóch względnie pierwszych wielomianów G oraz H, gdzie G nie jest podzielny przez żadną zmienną, to istnieją takie elementy g, $h \in \widehat{R}$, że $f = gh$ w $\widehat{R}$ oraz $g|_{E_1} = G$, $h|_{E_2} = H$ dla pewnych E_1, E_2, gdzie $E = E_1 + E_2$.

Twierdzenie (R. Schober, 2018)

Niech R będzie regularnym pierścieniem lokalnym oraz niech $f \in R$ będzie niezerowym elementem pierścienia R. Załóżmy, że wielościan Newtona $\Delta(f)$ ma krawędź luźną E. Jeśli $f|_E$ jest iloczynem dwóch względnie pierwszych wielomianów G oraz H, gdzie G nie jest podzielny przez żadną zmienną, to istnieją takie elementy g, $h \in \widehat{R}$, że $f = gh$ w $\widehat{R}$ oraz $g|_{E_1} = G$, $h|_{E_2} = H$ dla pewnych E_1, E_2, gdzie $E = E_1 + E_2$.

Wniosek

Jeśli wielościan Newtona $f \in R$ ma krawędź luźną i co najmniej trzy wierzchołki, to f jest rozkładalny w $\widehat{R}$.

Wniosek

Załóżmy, że wielościan Newtona elementu $f \in R$ ma krawędź luźną E. Jeśli f jest nierozkładalny w $\widehat{R}$, to E jest jedyną zwartą krawędzią wielościanu $\Delta(f)$ oraz $f|_E = cF^k$, gdzie $F \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ jest nierozkładalnym wielomianem. Ponadto, jeśli ciało rezydualne $\mathbb{K}$ jest algebraicznie domknięte, to $f|_E = (a\underline{X}^\alpha + b\underline{X}^\beta)^k$, gdzie $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}^n$ jest wektorem prymitywnym.

Twierdzenie (R. Schober, 2018)

Niech R będzie regularnym pierścieniem lokalnym oraz $f \in R[Y]$. Załóżmy, że wielościan Newtona $\Delta(f) \subset \mathbb{R}^{n+1}_{\geqslant 0}$ ma opadającą krawędź luźną E. Jeśli $f|_E$ jest iloczynem dwóch względnie pierwszych wielomianów $G, H \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n][Y]$, gdzie G jest unitarny, to istnieją takie $g, h \in \widehat{R}[Y]$, że $f = gh$, g jest wielomianem unitarnym oraz $g|_{E_1} = G$, $h|_{E_2} = H$ dla pewnych E_1, E_2, $E = E_1 + E_2$. Ponadto, jeśli $R = \mathbb{K}[\![x_1, \ldots, x_n]\!]$, to g oraz h są wyznaczone jednoznacznie.

Załóżmy, że wielościan Newtona szeregu $f \in \Bbbk[[x_1, \ldots, x_n]]$ ma krawędź luźną E o końcach a, b.

Załóżmy, że wielościan Newtona szeregu $f \in \mathbb{k}[[x_1, \ldots, x_n]]$ ma krawędź luźną E o końcach a, b. Niech $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1} \in \mathbb{N}^n$ będą liniowo niezależne oraz prostopadłe do luźnej krawędzi E.

Załóżmy, że wielościan Newtona szeregu $f \in \Bbbk[[x_1, \dots, x_n]]$ ma krawędź luźną E o końcach a, b. Niech $\xi_1, \dots, \xi_{n-1} \in \mathbb{N}^n$ będą liniowo niezależne oraz prostopadłe do luźnej krawędzi E. Dla jednomianu $\underline{x}^\alpha$ wektor

$$\omega(\underline{x}^\alpha) = (\langle \xi_1, \alpha \rangle, \dots, \langle \xi_{n-1}, \alpha \rangle)$$

nazywamy wagą jednomianu $\underline{x}^\alpha$.

Załóżmy, że wielościan Newtona szeregu $f \in \mathbb{k}[[x_1, \ldots, x_n]]$ ma krawędź luźną E o końcach a, b. Niech $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1} \in \mathbb{N}^n$ będą liniowo niezależne oraz prostopadłe do luźnej krawędzi E. Dla jednomianu $\underline{x}^\alpha$ wektor

$$\omega(\underline{x}^\alpha) = (\langle \xi_1, \alpha \rangle, \ldots, \langle \xi_{n-1}, \alpha \rangle)$$

nazywamy wagą jednomianu $\underline{x}^\alpha$. Wtedy

$$\mathbb{k}[[x_1, \ldots, x_n]] = \bigoplus_{w \in \mathbb{N}^{n-1}} R_w,$$

gdzie R_w jest przestrzenią wektorowa rozpiętą na jednomianach o wadze w. Wtedy $\dim R_w < \infty$.

Załóżmy, że wielościan Newtona szeregu $f \in \Bbbk[[x_1, \ldots, x_n]]$ ma krawędź luźną E o końcach a, b. Niech $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1} \in \mathbb{N}^n$ będą liniowo niezależne oraz prostopadłe do luźnej krawędzi E. Dla jednomianu $\underline{x}^\alpha$ wektor

$$\omega(\underline{x}^\alpha) = (\langle \xi_1, \alpha \rangle, \ldots, \langle \xi_{n-1}, \alpha \rangle)$$

nazywamy wagą jednomianu $\underline{x}^\alpha$. Wtedy

$$\Bbbk[[x_1, \ldots, x_n]] = \bigoplus_{w \in \mathbb{N}^{n-1}} R_w,$$

gdzie R_w jest przestrzenią wektorowa rozpiętą na jednomianach o wadze w. Wtedy $\dim R_w < \infty$. Rozważmy zbiór $M \subset \mathbb{N}^{n-1}$ złożony ze wszystkich elementów $z \in \mathbb{N}^{n-1}$, dla których istnieje takie $\alpha \in \mathbb{Z}^n$, że $\omega(\underline{x}^\alpha) = z$ oraz $\langle \xi, \alpha \rangle \geqslant 0$ dla każdego wektora $\xi \in \mathbb{R}^n_{\geqslant 0}$ prostopadłego do E.

Lemat

Niech $c \in \Delta(f)$, $\xi \in \mathbb{R}^n_{\geqslant 0}$. *Jeśli* $\langle \xi, a \rangle = \langle \xi, b \rangle$, *to* $\langle \xi, c \rangle \geqslant \langle \xi, a \rangle$.

Lemat

Niech $c \in \Delta(f)$, $\xi \in \mathbb{R}^n_{\geqslant 0}$. *Jeśli* $\langle \xi, a \rangle = \langle \xi, b \rangle$, *to* $\langle \xi, c \rangle \geqslant \langle \xi, a \rangle$.

Lemat

Niech $G \in R_w$ *oraz* $H \in R_z$ *będą względnie pierwsze. Jeśli* G *nie jest podzielny przez żadną zmienną, to dla każdego* $i \in M$

$$GR_{z+i} + HR_{w+i} = R_{w+z+i}.$$

Lemat

Niech $c \in \Delta(f)$, $\xi \in \mathbb{R}^n_{\geqslant 0}$. *Jeśli* $\langle \xi, a \rangle = \langle \xi, b \rangle$, *to* $\langle \xi, c \rangle \geqslant \langle \xi, a \rangle$.

Lemat

Niech $G \in R_w$ *oraz* $H \in R_z$ *będą względnie pierwsze. Jeśli* G *nie jest podzielny przez żadną zmienną, to dla każdego* $i \in M$

$$GR_{z+i} + HR_{w+i} = R_{w+z+i}.$$

Literatura I

[1] E. Artal Bartolo, I. Luengo, and A. Melle-Hernández, *High-school algebra of the theory of dicritical divisors: Atypical fibres for special pencils and polynomials,* Journal of Algebra and Its Applications, 14.09 (2015), 1540009.

[2] N. Bourbaki, *Éléments de mathematique. Fasc. XXXI. Algèbre commutative. Chapitre 7: Diviseurs,* Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1314 Hermann, Paris 1965 iii+146 pp.

[3] V. Cossart and O. Piltant, *Resolution of Singularities of Arithmetical Threefolds II,* to appear in Journal of Algebra, available on arXiv:1412.0868.

Literatura II

[4] E. García Barroso and P. González Pérez, *Decomposition in bunches of the critical locus of a quasi-ordinary map*, Compos. Math. 141 no. 2 (2005), 461–486. DOI: 10.1112/S0010437X04001216.

[5] J. Gwoździewicz and B. Hejmej, *Loose edges*, preprint 2018, arXiv:1807.04944

[6] A. Lipkovski, *Newton polyhedra and irreducibility,* Math. Z. 199 (1988), no. 1, 119–127.

[7] A. Parusiński and G. Rond, *The Abhyankar-Jung Theorem*, Journal of Algebra 365 (2012), 29–41.

Literatura III

[8] G. Rond and B. Schober, *An irreducibility criterion for power series*, Proceedings of the American Mathematical Society, Volume 145, Number 11 (2017), 4731–4739, doi.org/10.1090/proc/13635.

[9] B. Schober, *Generalized Loose Edge Factorization Theorems*, preprint 2018, arXiv:1808.09587.