

Nowe spostrzeżenia w problemie zawierania dla konfiguracji symplecjalnych

Marek Janasz

(praca wspólna z G. Malarą i M. Lampa-Baczyńską)
Uniwersytet Pedagogiczny im. KEN w Krakowie

Łódź, 7-11 I 2019

Problem zawierania $I^{(3)} \subset I^2$ - przypomnienie

Definicja Niech $I \subseteq S(n) = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ będzie ideałem jednorodnym. m -tą potęgę symboliczną ($m \geq 1$) ideału I nazywamy

$$I^{(m)} = S(n) \cap \left(\bigcap_{Q \in \text{Ass}(I)} I_Q^m \right),$$

gdzie $\text{Ass}(I)$ oznacza zbiór wszystkich ideałów pierwszych stowarzyszonych z I , a I_Q lokalizacje I w Q .

Problem zawierania $I^{(3)} \subset I^2$ - przypomnienie

Definicja Niech $I \subseteq S(n) = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ będzie ideałem jednorodnym. m -tą potęgę symboliczną ($m \geq 1$) ideału I nazywamy

$$I^{(m)} = S(n) \cap \left(\bigcap_{Q \in \text{Ass}(I)} I_Q^m \right),$$

gdzie $\text{Ass}(I)$ oznacza zbiór wszystkich ideałów pierwszych stowarzyszonych z I , a I_Q lokalizacje I w Q .

Twierdzenie (Zariski-Nagata)

Niech $I \subseteq S(n)$ będzie ideałem radykalnym i niech V będzie jego zbiorem zer. Wtedy elementami $I^{(m)}$ są wszystkie wielomiany znikające do rzędu co najmniej m wzdłuż V .

Problem zawierania $I^{(3)} \subset I^2$ - przypomnienie

Geneza:

Bezpośrednio z definicji potęgi symbolicznej otrzymujemy

$$I = I^{(1)} \supseteq I^{(2)} \supseteq I^{(3)} \supseteq \dots$$

podobnie dla potęgi zwykłej

$$I = I^1 \supseteq I^2 \supseteq I^3 \supseteq \dots$$

Problem zawierania $I^{(3)} \subset I^2$ - przypomnienie

Problem zawierania

Dla jakich r i m zachodzą zawierania

a) $I^r \subseteq I^{(m)}$

b) $I^{(m)} \subseteq I^r?$

Problem zawierania $I^{(3)} \subset I^2$ - przypomnienie

Problem zawierania

Dla jakich r i m zachodzą zawierania

a) $I^r \subseteq I^{(m)} \iff m \leq r,$

b) $I^{(m)} \subseteq I^r?$

Problem zawierania $I^{(3)} \subset I^2$ - przypomnienie

Problem zawierania

Dla jakich r i m zachodzą zawierania

a) $I^r \subseteq I^{(m)} \iff m \leq r,$

b) $I^{(m)} \subseteq I^r$ prawdziwa gdy $m \geq nr$. [Ein-Lazarsfeld-Smith, 2001]

Problem zawierania $I^{(3)} \subseteq I^2$ – przypomnienie

Problem zawierania

Dla jakich r i m zachodzą zawierania

a) $I^r \subseteq I^{(m)} \iff m \leq r,$

b) $I^{(m)} \subseteq I^r$ prawdziwa gdy $m \geq nr$. [Ein-Lazarsfeld-Smith, 2001]

B. Harbourne, C. Huneke, *Are symbolic powers highly evolved?* (2013)

Hipoteza: Niech $I \subseteq S(n)$ będzie ideałem jednorodnym. Wówczas dla dowolnego r inkluzja

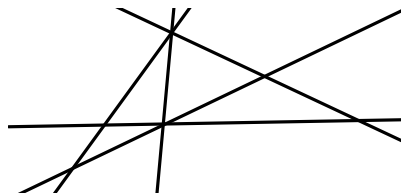
$$I^{(m)} \subseteq I^r$$

jest prawdziwa, jeśli $m \geq nr - (n - 1)$.

Konfiguracja prostych

Definicja

Konfiguracją prostych nazywamy zbiór prostych.



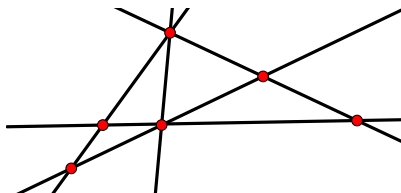
Konfiguracja prostych

Definicja

Konfiguracją prostych nazywamy zbiór prostych.

Definicja

Punktem osobliwym konfiguracji prostych nazywamy punkt, przez który przechodzą przynajmniej 2 proste.



Konfiguracja prostych

Definicja

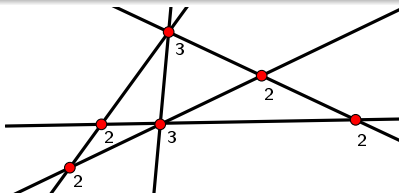
Konfiguracją prostych nazywamy zbiór prostych.

Definicja

Punktem osobliwym konfiguracji prostych nazywamy punkt, przez który przechodzą przynajmniej 2 proste.

Definicja

Krotnością punktu osobliwego nazywamy liczbę prostych przechodzących przez ten punkt.

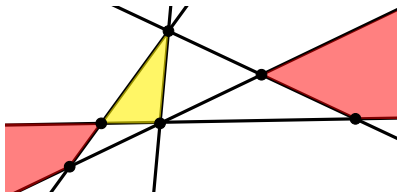


$$t = (t_2, t_3) \quad t = (4, 2)$$

Konfiguracja prostych

Definicja

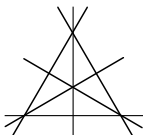
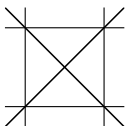
Wnętrze zbioru wypukłego ograniczonego przez proste nazywamy ścianą konfiguracji prostych.



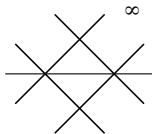
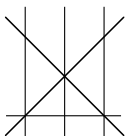
Konfiguracje symplecjalne. Wektor incydencji t

Definicja

Mówimy, że rzeczywista konfiguracja jest symplecjalna, jeżeli każda ściana jest trójkątem.



$$\frac{A(6,1)}{t = (t_2, t_3)} \quad \Bigg| \quad \frac{(3,4)}{(3,4)}$$



$A(6,1)$

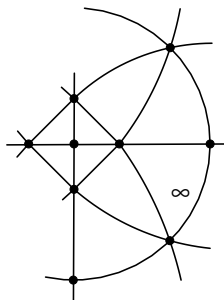
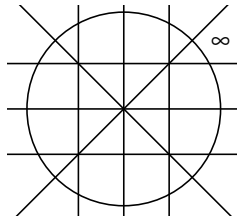
Konfiguracja $A(9,1)$ i dualna konfiguracja punktów

Prosta dualna

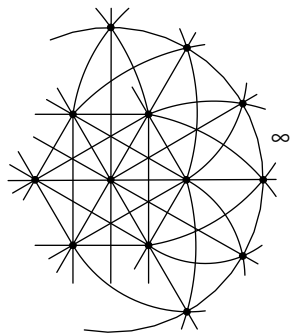
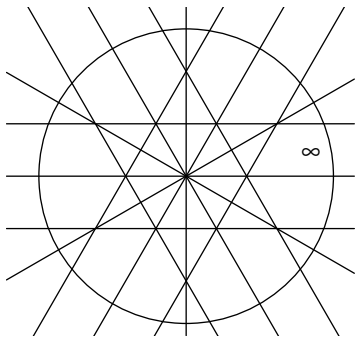
Dla każdego punktu $P = (a : b : c) \in \mathbb{P}^2$ definiujemy prostą dualną jako $L_P = \{ax + by + cz = 0\}$.

Dualna konfiguracja punktów do konfiguracji $A(9,1)$

Konfiguracja $A(9,1)$



Wektor r

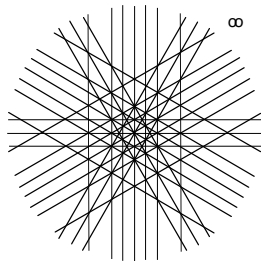


	$t = (t_2, t_3, t_4, \dots)$	$r = (r_2, r_3, r_4, \dots)$
$A(13,1)$	$(9, 12, 3, 0, 1)$	$(0, 0, 3, 0, 10)$

Twierdzenie (JMLB (2018))

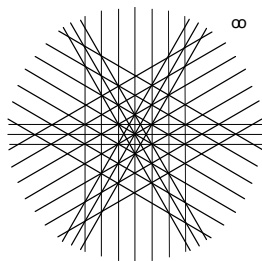
Istnieje konfiguracja 31 prostych przecinających się w 127 punktach, dla którego ideału I tych punktów zachodzi

$$I^{(3)} \not\subseteq I^2.$$

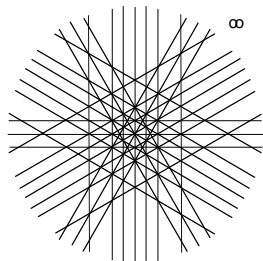


$\mathcal{A}(31, 3)$

Kombinatoryka $A(31,2)$ i $A(31,3)$



$A(31,2)$



$A(31,3)$

$A(n,0)$	$f = (f_0, f_1, f_2)$	$t = (t_2, t_3, t_4, \dots)$	$r = (r_2, r_3, r_4, \dots)$
$A(31,2)$	$(127, 378, 252)$	$(54, 42, 21, 6, 1, 0, 3)$	$(0^4, 1, 0, 0, 0, 9, 0, 6, 0, 15)$
$A(31,3)$	$(127, 378, 252)$	$(54, 42, 21, 6, 1, 0, 3)$	$(0^4, 1, 0, 3, 0, 6, 0, 3, 0, 18)$

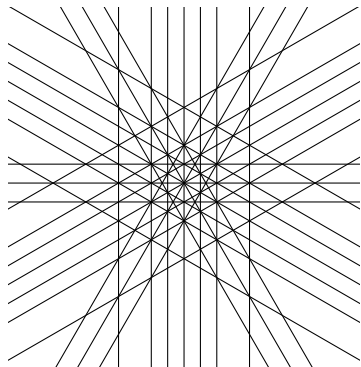
Spostrzeżenia

- W rozpatrywanej konfiguracji $A(31,3)$ analizowano krotności punktów nie mniejsze niż 2.
- Dotychczas rozpatrywano krotności punktów nie mniejsze niż 3.

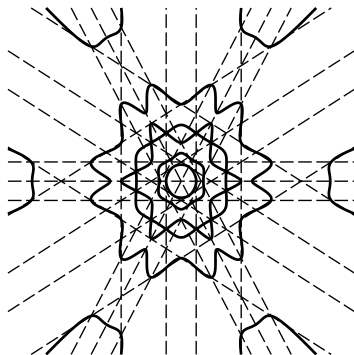
- W rozpatrywanej konfiguracji $A(31, 3)$ analizowano krotności punktów nie mniejsze niż 2.
- Konfiguracja $A(31, 3)$ posiada realizację wymierną tzn. współrzędne wszystkich punktów przecięcia prostych są liczbami wymiernymi.

- W rozpatrywanej konfiguracji $A(31,3)$ analizowano krotności punktów nie mniejsze niż 2.
- Konfiguracja $A(31,3)$ posiada realizację wymierną tzn. współrzędne wszystkich punktów przecięcia prostych są liczbami wymiernymi.
- Kontrprzykład wymiernej konfiguracji składającej się z 31 prostych.
- Dotychczas znany kontrprzykład konfiguracji wymiernej składał się z 12 prostych.

- W rozpatrywanej konfiguracji $A(31,3)$ analizowano krotności punktów nie mniejsze niż 2.
- Konfiguracja $A(31,3)$ posiada realizację wymierną tzn. współrzędne wszystkich punktów przecięcia prostych są liczbami wymiernymi.
- Kontrprzykład wymiernej konfiguracji składającej się z 31 prostych.
- Element z $I^{(3)} \setminus I^2$ składa się z 21 prostych i krzywej nierozkładalnej stopnia 12-ego.
- Dotychczas element $I^{(3)} \setminus I^2$ składał się z prostych.

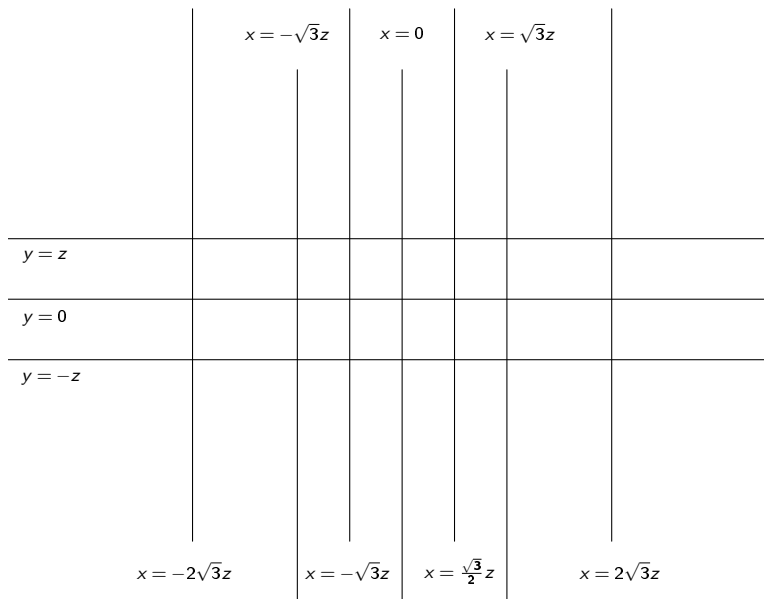


$A(31, 3)$

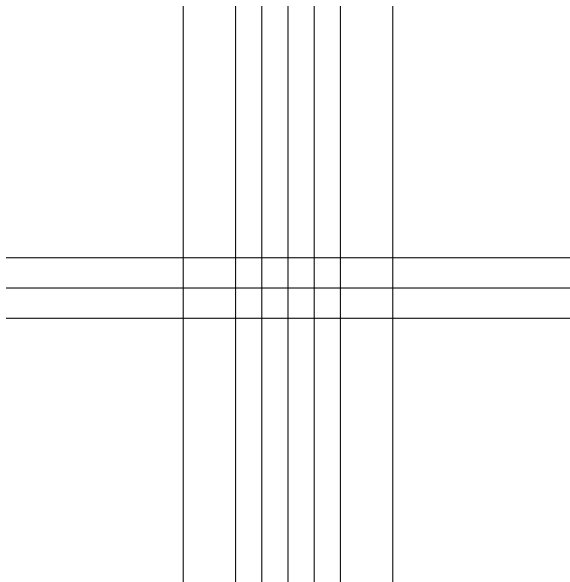


Element ideału $I^{(3)}$ nie należący do drugiej potęgi zwykłej I^2

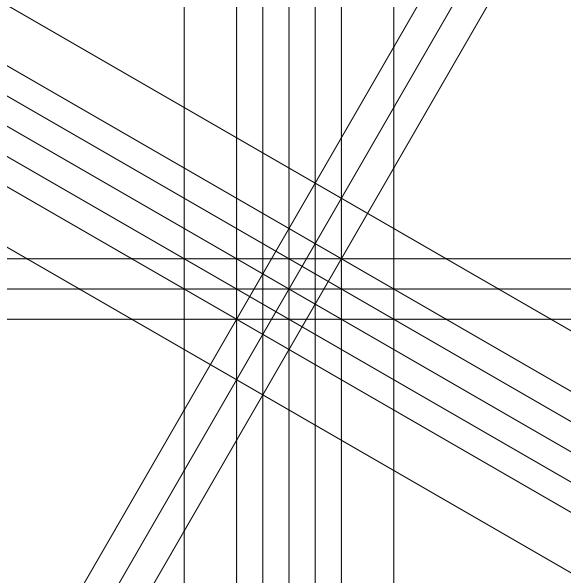
Konstrukcja $A(31,3)$



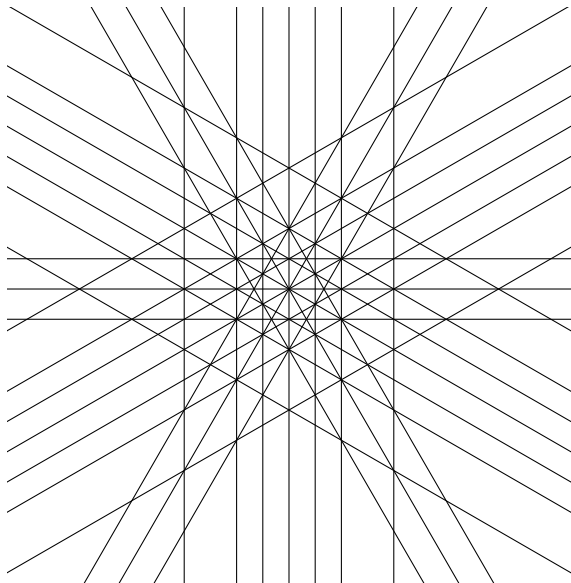
$A(31,3)$. Obrót o kąt 60° i 120° wokół punktu $(0 : 0 : 1)$



$A(31,3)$. Obrót o kąt 60° i 120° wokół punktu $(0 : 0 : 1)$



$A(31,3)$. Obrót o kąt 60° i 120° wokół punktu $(0 : 0 : 1)$



$$G = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$$

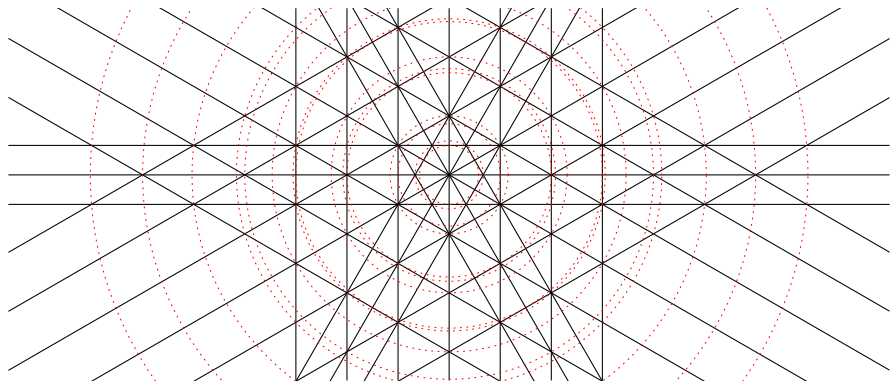
Macierz obrotu

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Macierz odbicia

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

G-orbity



$A(31, 3)$

G-orbity

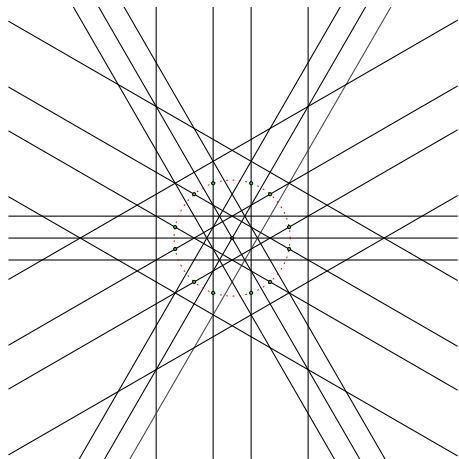
długość orbity	liczba orbit	punkt (reprezentant)
1	1	$(0 : 0 : 1)$
6	9	$(0 : 1 : 1), (1 : 0 : \frac{\sqrt{3}}{2}), (\sqrt{3} : 0 : 1),$ $(0 : 2 : 1), (2\sqrt{3} : 0 : 1), (0 : 4 : 1),$ $(\frac{\sqrt{3}}{2} : 0 : 1), (4\sqrt{3} : 0 : 1), (1 : 0 : 1)$
12	6	$(3\sqrt{3} : 1 : 4), (9 : \sqrt{3} : 2\sqrt{3}), (2\sqrt{3} : 1 : 1),$ $(15 : 3\sqrt{3} : 2\sqrt{3}), (3\sqrt{3} : 1 : 1), (5\sqrt{3} : 1 : 1)$

Twierdzenie B

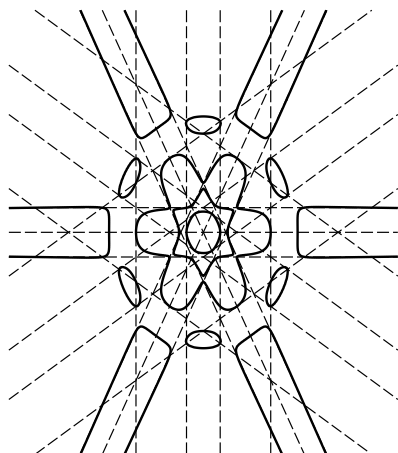
Twierdzenie (JMLB (2018))

Istnieje konfiguracja 21 prostych przecinających się w 115 punktach, dla którego ideału I tych punktów zachodzi

$$I^{(3)} \not\subseteq I^2.$$



B_{21}



Element ideału $I^{(3)}$ nie należący do drugiej potęgi zwykłej I^2

- Weryfikacja komputerowa (Singular)

- Weryfikacja komputerowa (Singular)
- Prace nad dowodem klasycznym

Literatura:

- Ein, L., Lazarsfeld, R., Smith, K.E.: Uniform bounds and symbolic powers on smooth varieties, *Invent. Math.* 144 (2001), 241–252.
- Grünbaum B.: A catalogue of simplicial arrangements in the real projective plane, *ARS Mathematica Contemporanea* 2: 1–25 (2009).
- Huneke, C.: Open problems on powers of ideals. Notes from a workshop on Integral Closure, Multiplier Ideals and Cores, AIM, (2006).
www.aimath.org/WWN/integralclosure/Huneke.pdf
- Janasz, M., Malara, G., Lampa-Baczyńska, M.: New phenomena in the containment problem for simplicial arrangements.
<https://arxiv.org/abs/1812.04382>

Dziękuję za uwagę