MATERIAŁY NA XXVII KONFERENCJĘ SZKOLENIOWĄ Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ ZESPOLONEJ

2006 **Łódź** **str. 43**

KILKA PYTAŃ DOTYCZĄCYCH ALGEBR WIELOMIANOWYCH

Piotr Jędrzejewicz (Toruń)

Niech k będzie dowolnym ciałem. Przez $k[x_1,\ldots,x_n]$ oznaczmy k-algebrę wielomianów n zmiennych. Rozważmy dowolną liczbę pierwszą p.

Zauważmy, że pierścień B spełniający warunki

$$(*)\qquad k[x_1^p,\ldots,x_n^p]\subseteq B\subseteq k[x_1,\ldots,x_n]$$

jest k-algebrą wielomianową dokładnie wtedy, gdy jest generowany przez n elementów:

$$(**)\qquad B=k[f_1,\ldots,f_n],\ \text{gdzie } f_1,\ldots,f_n\in k[x_1,\ldots,x_n].$$

Warunek $(*)$ ma istotne znaczenie, gdy charakterystyka ciała k jest równa p – jest to warunek konieczny na to, by B było pierścieniem stałych pewnego k-różniczkowania algebry $k[x_1,\ldots,x_n]$.

Postawienie kilku pytań dotyczących opisu k-algebr spełniających warunki $(*)$ i $(**)$ jest celem niniejszego artykułu. Zacznijmy od oczywistego przykładu.

Przykład 1 *Pierścień*

$$B=k[x_1^{i_1},\ldots,x_n^{i_n}],$$

gdzie $i_1,\ldots,i_n\in\{1,p\}$, *spełnia warunki* $(*)$ *i* $(**)$.

Powyższy przykład wyczerpuje wszystkie pierścienie spełniające warunki $(*)$ i $(**)$ w dwóch przypadkach:

– gdy $n = 1$,

– gdy zakładamy dodatkowo, że $f_1, \dots, f_n$ są jednomianami ([4], Corollary 10).

Gdy $n \geqslant 2$ i p jest równe charakterystyce ciała k, to pierścień

$$B = k[x_1^p, x_1 + x_2, x_3, \dots, x_n]$$

spełnia warunki $(*)$ i $(**)$, ale nie jest postaci przedstawionej w Przykładzie 1. Rozważmy przykład uogólniający ten przypadek.

Przykład 2 *Jeśli* $\operatorname{char} k = p$, $0 \leqslant s \leqslant n$ *oraz* $x_{j_1}, \dots, x_{j_s}, y_{s+1}, \dots, y_n$ *jest bazą przestrzeni* k*-liniowej* $kx_1 + \ldots + kx_n$, *to pierścień*

$$B = k[x_{j_1}^p, \dots, x_{j_s}^p, y_{s+1}, \dots, y_n]$$

spełnia warunki $(*)$ *i* $(**)$.

Pierścień B z powyższego przykładu jest podalgebrą z gradacją algebry $k[x_1, \dots, x_n]$. Naturalne jest zatem następujące pytanie.

Pytanie I *Czy Przykład* 2 *opisuje wszystkie podalgebry z gradacją algebry* $k[x_1, \dots, x_n]$, *gdzie* k *jest ciałem charakterystyki* p, *spełniające warunki* $(*)$ *i* $(**)$*?*

Można udowodnić ([3]), że odpowiedź jest pozytywna w następujących przypadkach:

– $n = 1$, 2 (dowolne p),

– $p = 2$, 3 (dowolne n),

– $n = 3$, $p \leqslant 37$,

– $n = 4$, $p \leqslant 7$,

– $n = 5$, $p \leqslant 5$.

W przypadku, gdy k jest ciałem charakterystyki p, dla dowolnej bazy $y_1, \dots, y_n$ przestrzeni k-liniowej $kx_1 + \ldots + kx_n$, pierścień

$$B = k[y_1^p, \dots, y_s^p, y_{s+1}, \dots, y_n],$$

gdzie $0 \leqslant s \leqslant n$, spełnia warunki $(*)$ i $(**)$. Nietrudno jednak zauważyć, że ten pierścień można przedstawić w postaci z Przykładu 2. Jeśli natomiast zamiast liniowej zamiany zmiennych rozważymy dowolny automorfizm algebry wielomianów: $x_1 \mapsto y_1, \dots, x_n \mapsto y_n$, to otrzymany pierścień może już nie być podalgebrą z gradacją algebry $k[x_1, \dots, x_n]$. Jako przykład można tu podać

$$B = k[x_1^p, x_2 + x_1^{p+1}, x_3, \dots, x_n],$$

gdzie $n \geqslant 2$.

Przykład 3 *Jeśli* $\operatorname{char} k = p$ *oraz elementy* $y_1, \ldots, y_n$ *generują* k*-algebrę* $k[x_1, \ldots, x_n]$*, to pierścień*

$$B = k[y_1^p, \ldots, y_s^p, y_{s+1}, \ldots, y_n]$$

gdzie $0 \leqslant s \leqslant n$*, spełnia warunki* $(*)$ *i* $(**)$*.*

Gdy $\operatorname{char} k = p$ i $n = 2$, to każdy pierścień spełniający warunki $(*)$ i $(**)$ jest postaci przedstawionej w powyższym przykładzie. Zostało to udowodnione przez R. Ganonga w [1] dla ciała algebraicznie domkniętego, a następnie uogólnione przez D. Daigla w [2] na przypadek dowolnego ciała. Nasuwa się pytanie, czy fakt ten zachodzi również dla $n \geqslant 3$.

Pytanie II *Czy jeśli* $\operatorname{char} k = p$*, to Przykład* 3 *opisuje wszystkie pierścienie spełniające warunki* $(*)$ *i* $(**)$*?*

Co możemy zrobić, gdy p nie jest równe charakterystyce ciała k? W tym przypadku konstrukcje z Przykładów 2 i 3 zawodzą – otrzymane pierścienie nie muszą spełniać warunku $(*)$.

Pytanie III *Czy jeśli* $\operatorname{char} k \neq p$*, to Przykład* 1 *opisuje wszystkie pierścienie spełniające warunki* $(*)$ *i* $(**)$*?*

Literatura

[1] R. Ganong, *Plane Frobenius sandwiches,* Proc. Amer. Math. Soc. 84 (1982) 474-478.

[2] D. Daigle, *Plane Frobenius sandwiches of degree p,* Proc. Amer. Math. Soc. 117 (1993) 885-889.

[3] P. Jędrzejewicz, *On polynomial graded subalgebras of a polynomial algebra* (przygotowana do druku).

[4] P. Jędrzejewicz, *Homogeneous gradings of polynomial algebras* (przygotowana do druku).

A FEW QUESTIONS ABOUT POLYNOMIAL ALGEBRAS

Summary. Let k be a field and $k[x_1, \ldots, x_n]$ a polynomial k-algebra. We ask about a description of polynomial subalgebras of $k[x_1, \ldots, x_n]$, containing $k[x_1^p, \ldots, x_n^p]$, where p is a prime number. We are interested in the following three cases: a) $p \neq \operatorname{char} k$, b) graded subalgebras in case of $\operatorname{char} k = p$, c) arbitrary subalgebras in case of $\operatorname{char} k = p$.

Łódź, 9 – 13 stycznia 2006 r.