MATERIAŁY NA XXVIII KONFERENCJĘ SZKOLENIOWĄ Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ ZESPOLONEJ

2007 **Łódź** **str. 13**

PIERŚCIENIE STAŁYCH RÓŻNICZKOWAŃ, p-BAZY I WARUNKI JAKOBIANOWE

Piotr Jędrzejewicz (Toruń)

Wstęp

Niech $k[x_1, \dots, x_n]$ będzie algebrą wielomianów o współczynnikach z ciała k. Odwzorowanie k-liniowe $d\colon k[x_1, \dots, x_n] \to k[x_1, \dots, x_n]$ takie, że $d(fg) = fd(g) + gd(f)$ dla dowolnych wielomianów f i g, nazywamy k-różniczkowaniem. Każde k-różniczkowanie algebry $k[x_1, \dots, x_n]$ jest postaci

$$d = g_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + g_n \frac{\partial}{\partial x_n}$$

dla pewnych wielomianów $g_1, \dots, g_n$. Jest ono wtedy jednoznacznie określone przez warunki:

$$d(x_1) = g_1,\ \dots,\ d(x_n) = g_n.$$

Pierścień stałych różniczkowania d określamy następująco:

$$k[x_1, \dots, x_n]^d = \{f \in k[x_1, \dots, x_n] :\ d(f) = 0\}.$$

Analogicznie definiujemy k-różniczkowanie δ ciała funkcji wymiernych $k(x_1, \dots, x_n)$ i jego ciało stałych $k(x_1, \dots, x_n)^\delta$. Jeśli k jest ciałem charakterystyki

$p > 0$, to

$$k(x_1^p, \ldots, x_n^p) \subseteq k(x_1, \ldots, x_n)^\delta$$

i stopień tego rozszerzenia ciał jest równy p^m dla pewnego $m \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Istnieją wówczas wielomiany $f_1, \ldots, f_m$ takie, że

$$k(x_1, \ldots, x_n)^\delta = k(x_1^p, \ldots, x_n^p, f_1, \ldots, f_m),$$

przy czym m to najmniejsza liczba wielomianów o tej własności. Wielomiany $f_1, \ldots, f_m$, dla których stopień rozszerzenia ciał

$$k(x_1^p, \ldots, x_n^p) \subseteq k(x_1^p, \ldots, x_n^p, f_1, \ldots, f_m)$$

jest równy p^m, nazywamy p-niezależnymi. Wielomiany $f_1, \ldots, f_m$ są p-niezależne dokładnie wtedy, gdy rząd macierzy

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

nad ciałem funkcji wymiernych jest równy m.

Każde k-różniczkowanie d pierścienia wielomianów posiada jednoznaczne przedłużenie do k-różniczkowania d_0 ciała funkcji wymiernych, gdzie

$$d_0\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{d(f)g - fd(g)}{g^2}$$

dla dowolnych wielomianów f, g takich, że $g \neq 0$. Ciało stałych różniczkowania d_0 zawiera ciało ułamków pierścienia $k[x_1, \ldots, x_n]^d$ i ponadto

$$k[x_1, \ldots, x_n]^d = k(x_1, \ldots, x_n)^{d_0} \cap k[x_1, \ldots, x_n].$$

Zatem, jeśli k jest ciałem charakterystyki $p > 0$, to

$$k[x_1, \ldots, x_n]^d = k(x_1^p, \ldots, x_n^p, f_1, \ldots, f_m) \cap k[x_1, \ldots, x_n]$$

dla pewnych wielomianów $f_1, \ldots, f_m$, gdzie $m \leqslant n$.

Niech k będzie ciałem charakterystyki $p > 0$. Dla dowolnych wielomianów $f_1, \ldots, f_m$ wprowadźmy oznaczenie

$$C(f_1, \ldots, f_m) = k(x_1^p, \ldots, x_n^p, f_1, \ldots, f_m) \cap k[x_1, \ldots, x_n].$$

Pierścień $C(f_1, \ldots, f_m)$ składa się z wszystkich wielomianów g, dla których rzędy macierzy

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

nad ciałem funkcji wymiernych są równe.

Celem tego artykułu jest przedstawienie częściowych odpowiedzi na pytanie, kiedy wielomiany p-niezależne $f_1, \ldots, f_m$ są generatorami pierścienia $C(f_1, \ldots, f_m)$ jako $k[x_1^p, \ldots, x_n^p]$-algebry, czyli kiedy zachodzi równość

$$C(f_1, \ldots, f_m) = k[x_1^p, \ldots, x_n^p, f_1, \ldots, f_m].$$

Mówimy wówczas, że dane wielomiany stanowią p-bazę pierścienia $C(f_1, \ldots, f_m)$. Podkreślmy, że nawet przypadek $m = 1$ jest nietrywialny.

Jednoelementowe p-bazy

Nowicki i Nagata w pracy [9] udowodnili, że pierścień stałych niezerowego k-różniczkowania algebry wielomianów $k[x, y]$:

- jest k-algebrą generowaną przez jeden element, jeśli $\operatorname{char} k = 0$,
- jest $k[x^p, y^p]$-algebrą generowaną przez jeden element, jeśli $\operatorname{char} k = 2$,
- nie musi być $k[x^p, y^p]$-algebrą generowaną przez jeden element, jeśli $\operatorname{char} k > 2$.

W przypadku charakterystyki $p > 0$ pierścień stałych niezerowego k-różniczkowania algebry $k[x, y]$ jest postaci

$$C(f) = k(x^p, y^p, f) \cap k[x, y],$$

przy czym dla $f \in k[x^p, y^p]$ mamy $C(f) = k[x^p, y^p]$. Jeśli generator $k[x^p, y^p]$-algebry $C(f)$ nie należy do $k[x^p, y^p]$, to stanowi jej jednoelementową p-bazę. Zaznaczmy, że w przypadku charakterystyki zero własności pojedynczych generatorów pierścieni stałych zostały zbadane w pracy Nowickiego [7]. Własności te związane są z warunkiem całkowitej domkniętości, który nie występuje w przypadku charakterystyki dodatniej. Bliższy sytuacji w charakterystyce dodatniej jest następujący fakt z charakterystyki zero, udowodniony przez Daigla i Freudenburga w pracy [1].

Lemat 1 *Niech R będzie dziedziną zawierającą $\mathbb{Q}$, a $f \in R[x_1, \ldots, x_n]$ takim wielomianem, że ideał $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ jest równy całemu pierścieniowi $R[x_1, \ldots, x_n]$. Wówczas*

$$R_0(f) \cap R[x_1, \ldots, x_n] = R[f].$$

Analogicznie możemy otrzymać następujący lemat ([5]), który wyraża warunek wystarczający na to, by wielomian f stanowił jednoelementową p-bazę pierścienia $C(f)$.

Lemat 2 *Niech* $\operatorname{char} k = p > 0$, $f \in k[x_1, \ldots, x_n] \setminus k[x_1^p, \ldots, x_n^p]$. *Jeśli* $\operatorname{NWD}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = 1$, *to* $C(f) = k[x_1^p, \ldots, x_n^p, f]$.

Odnotujmy następujący warunek konieczny ([2]).

Lemat 3 *Niech* $\operatorname{char} k = p > 0$, $f \in k[x_1, \ldots, x_n] \setminus k[x_1^p, \ldots, x_n^p]$. *Jeśli* $C(f) = k[x_1^p, \ldots, x_n^p, f]$, *to wielomian f nie jest podzielny przez żaden kwadrat wielomianu dodatniego stopnia, ani przez żaden wielomian dodatniego stopnia, należący do* $k[x_1^p, \ldots, x_n^p]$.

Powstaje naturalne pytanie, czy w obu powyższych lematach mogą zachodzić równoważności. Odpowiedź jest pozytywna w pewnych szczególnych przypadkach. Przykładem są wielomiany jednorodne niezerowego stopnia względem pewnego wektora wag ([3]), czyli spełniające warunek

$$\gamma_1 x_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + \gamma_n x_n \cdot \frac{\partial f}{\partial x_n} = rf$$

dla pewnych $\gamma_1, \ldots, \gamma_n, r \in k$, $r \neq 0$. Wiadomo również, że w Lemacie 2 otrzymujemy równoważność w przypadku wielomianów dwóch zmiennych, jednorodnych stopnia zero względem pewnych wag. Natomiast w Lemacie 3 nie zawsze ma miejsce równoważność, co pokazuje następujący przykład.

Przykład 1 *Wielomian* $f = x^{2p-1}y + 1$, *gdzie* $p = \operatorname{char} k$, *spełnia warunek konieczny z Lematu 3, ale* $C(f) \neq k[x^p, y^p, f]$.

Ponadto wiadomo, że jeśli k jest ciałem charakterystyki 2, to w Lemacie 2 zachodzi równoważność ([5]).

Przypadek ogólny

Własności jednoelementowych p-baz można uogólnić na przypadek m elementów, $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$, gdzie n jest liczbą zmiennych algebry wielomianów $k[x_1, \ldots, x_n]$. Zauważmy, że dla $m = n$ wielomiany $f_1, \ldots, f_n$ są p-niezależne dokładnie wtedy, gdy

$$k(x_1^p, \ldots, x_n^p, f_1, \ldots, f_n) = k(x_1, \ldots, x_n).$$

Wówczas zachodzi równość

$$C(f_1, \dots, f_n) = k[x_1, \dots, x_n].$$

Pełną charakteryzację p-baz w przypadku $m = n$ przedstawia następujące twierdzenie Nousiainena ([6]).

Twierdzenie 1 *Niech* $\operatorname{char} k = p > 0$, $f_1, \dots, f_n \in k[x_1, \dots, x_n]$. *Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(1) *istnieją k-różniczkowania $d_1, \dots, d_n$ algebry $k[x_1, \dots, x_n]$ spełniające warunki $d_i(f_j) = \delta_{ij}$ (symbol Kroneckera) dla dowolnych i, j,*

(2) *istnieją k-różniczkowania $d_1, \dots, d_n$ algebry $k[x_1, \dots, x_n]$ spełniające warunek* $\det(d_i(f_j)) \in k \setminus \{0\}$,

(3) *macierz Jacobiego* $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$ *jest odwracalna,*

(4) $k[x_1, \dots, x_n] = k[x_1^p, \dots, x_n^p, f_1, \dots, f_n]$,

(5) *wielomiany $f_1, \dots, f_n$ stanowią p-bazę pierścienia $k[x_1, \dots, x_n]$.*

W celu przedstawienia warunków na p-bazę dla dowolnego m, oznaczmy przez $J^{f_1,\dots,f_m}_{x_{j_1},\dots,x_{j_m}}$ jakobian funkcji $f_1, \dots, f_m$ względem zmiennych $x_{j_1}, \dots, x_{j_m}$:

$$J^{f_1,\dots,f_m}_{x_{j_1},\dots,x_{j_m}} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{j_1}} & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{j_m}} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_{j_1}} & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_{j_m}} \end{vmatrix}.$$

Twierdzenie 2 *Niech* $\operatorname{char} k = p > 0$, $f_1, \dots, f_m \in k[x_1, \dots, x_n]$. *Rozważmy następujące warunki:*

(I) $\operatorname{NWD}\left(J^{f_1,\dots,f_m}_{x_{j_1},\dots,x_{j_m}};\ 1 \leqslant j_1 < \dots < j_m \leqslant n\right) = 1$,

(II) *wielomiany $f_1, \dots, f_m$ stanowią p-bazę pierścienia $C(f_1, \dots, f_m)$,*

(III) *wielomiany $f_1, \dots, f_m$ są p-niezależne,* $\operatorname{NWD}(f_{i_1}, f_{i_2}) = 1$ *dla dowolnych $i_1 < i_2$ oraz żaden z wielomianów $f_1, \dots, f_m$ nie jest podzielny przez kwadrat wielomianu dodatniego stopnia, ani przez wielomian dodatniego stopnia, należący do* $k[x_1^p, \dots, x_n^p]$,

(IV) *wielomiany $f_1, \dots, f_m$ są p-niezależne,* $\operatorname{NWD}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_i}{\partial x_n}\right) = 1$ *dla dowolnego i oraz* $\operatorname{NWD}\left(J^{f_{i_1},f_{i_2}}_{x_{j_1},x_{j_2}};\ 1 \leqslant j_1 < j_2 \leqslant n\right) = 1$ *dla dowolnych $i_1 < i_2$.*

Wówczas między powyższymi warunkami zachodzą następujące zależności:

$$\begin{array}{ccc} \text{(I)} & \Rightarrow & \text{(II)} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \text{(IV)} & \Rightarrow & \text{(III)}. \end{array}$$

Przy pewnych dodatkowych założeniach o wielomianach $f_1, \ldots, f_m$ niektóre z rozważanych warunków są równoważne. Otóż, jeśli $f_1, \ldots, f_m$ są wektorami własnymi pewnego k-różniczkowania, a ich wartości własne są liniowo niezależne nad ciałem prostym $\mathbb{F}_p$, to zachodzą równoważności ([4]):

$$\text{(II)} \Leftrightarrow \text{(III)} \Leftrightarrow \text{(IV)}.$$

W przypadku $m = 1$ Przykład 1 pokazuje, że implikacje (III) $\Rightarrow$ (II) i (III) $\Rightarrow$ (IV) mogą nie zachodzić. Łatwo na tej podstawie podać kontrprzykład również dla $m > 1$. Implikacja (IV) $\Rightarrow$ (II) też może nie zachodzić, co pokazuje następujący przykład.

Przykład 2 *Wielomiany $f_1 = x$, $f_2 = y$, $f_3 = xy + yz + zx$ należące do $k[x, y, z]$, spełniają warunek (IV), ale nie stanowią p-bazy pierścienia $C(f_1, f_2, f_3) = k[x, y, z]$.*

Autor nie zna kontrprzykładu do implikacji (II) $\Rightarrow$ (IV), ani nawet do implikacji (II) $\Rightarrow$ (I).

Literatura

[1] D. Daigle, G. Freudenburg, *Locally nilpotent derivations over a UFD and an application to rank two locally nilpotent derivations of $k[X_1, \ldots, X_n]$*, J. Algebra 204 (1998), 353–371.

[2] P. Jędrzejewicz, *Rings of constants of p-homogeneous polynomial derivations*, Comm. Algebra 31 (2003), 5501–5511.

[3] P. Jędrzejewicz, *On rings of constants of derivations in two variables in positive characteristic*, Coll. Math. 106 (2006), 109–117.

[4] P. Jędrzejewicz, *Eigenvector p-bases of rings of constants of derivations* (przygotowana do druku).

[5] P. Jędrzejewicz, *One-element p-bases of rings of constants of derivations* (przygotowana do druku).

[6] H. Niitsuma, *Jacobian matrix and p-basis*, w: *Topics in algebra*, 185–188, Banach Center Publications, vol. 26, part 2, PWN Warszawa, 1990.

[7] A. Nowicki, *On the jacobian equation $J(f, g) = 0$ for polynomials in $k[x, y]$*, Nagoya Math. J. 109 (1988), 151–157.

[8] A. Nowicki, *Polynomial derivations and their rings of constants*, UMK, Toruń, 1994.

[9] A. Nowicki, M. Nagata, *Rings of constants for k-derivations in $k[x_1, \ldots, x_n]$*, J. Math. Kyoto Univ. 28 (1988), 111–118.

RINGS OF CONSTANTS OF DERIVATIONS, p-BASES AND JACOBIAN CONDITIONS

Summary. In this paper we discuss necessary and sufficient conditions for polynomials $f_1, \ldots, f_m$ to form a p-basis of the minimal ring of constants of a derivation, containing $f_1, \ldots, f_m$.

Łódź, 8 – 12 stycznia 2007 r.