MATERIAŁY NA XXIX KONFERENCJĘ SZKOLENIOWĄ Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ ZESPOLONEJ

2008 **Łódź** **str. 23**

LEMAT FREUDENBURGA

Piotr Jędrzejewicz (Toruń)

Wstęp

Celem tego artykułu jest omówienie uogólnień i analogii dotyczących następującego lematu, pochodzącego z pracy Freudenburga [2].

Lemat (Freudenburg) *Dla dowolnego wielomianu* $f \in \mathbb{C}[x, y]$*, niech* $g \in \mathbb{C}[x, y]$ *będzie nierozkładalnym, różnym od stałej, wspólnym dzielnikiem pochodnych cząstkowych* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *i* $\frac{\partial f}{\partial y}$*. Wówczas istnieje* $c \in \mathbb{C}$ *takie, że* g *dzieli* $f + c$*.*

Przedstawimy uogólnienia tego lematu w przypadku chakterystyki zero, uzyskane przez Essena, Nowickiego i Tyca w pracy [1]. Następnie przedyskutujemy przypadek charakterystyki dodatniej, gdzie można zarówno wyodrębnić przypadki, w których zachodzi odpowiednik Lematu Freudenburga, jak i wskazać kontrprzykłady.

1 Uogólnienia w charakterystyce zero

Lemat Freudenburga w oryginalnym sformułowaniu z artykułu [2] dotyczy wielomianów dwóch zmiennych nad ciałem liczb zespolonych. Następujące uogólnienie na przypadek wielomianów n zmiennych nad dowolnym ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki zero pochodzi z pracy [1] (Proposition 2.1).

Twierdzenie 1.1 (Essen, Nowicki, Tyc) *Niech k będzie ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki zero, niech $\mathcal{P}$ będzie ideałem pierwszym w $k[x_1, \ldots, x_n]$ i niech $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$. Jeśli pochodna cząstkowa $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ należy do $\mathcal{P}$ dla każdego i, to istnieje $c \in k$ takie, że $f - c \in \mathcal{P}$.*

W szczególności, gdy $\mathcal{P}$ jest ideałem głównym, generowanym przez wielomian nierozkładalny, otrzymujemy następujący wniosek z powyższego twierdzenia ([1], Remark 2.3).

Wniosek 1.2 *Jeśli $g \in k[x_1, \ldots, x_n]$ jest takim wielomianem nierozkładalnym, że g dzieli $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ dla każdego i, to g dzieli $f - c$ dla pewnego $c \in k$.*

Tezę tego wniosku można wzmocnić korzystając z dobrze znanego faktu.

Lemat 1.3 *Niech $f, g \in k[x_1, \ldots, x_n]$, gdzie k jest ciałem charakterystyki zero. Jeśli g jest takim wielomianem nierozkładalnym, że $g \mid f$ oraz $g \mid \frac{\partial f}{\partial x_i}$ dla każdego i, to $g^2 \mid f$.*

Tezę Twierdzenia 1.1 też można wzmocnić do następującej postaci:

$$f - c \in \mathcal{P}^{(2)},$$

gdzie $\mathcal{P}^{(2)} = \mathcal{P}^2 k[x_1, \ldots, x_n]_{\mathcal{P}} \cap k[x_1, \ldots, x_n]$ jest drugą potęgą symboliczną ideału $\mathcal{P}$. Wynika to z uogólnienia tego twierdzenia na różniczkowania wyższych rzędów ([1], Theorem 3.1). Jeśli $\mathcal{P}$ jest ideałem maksymalnym, to $\mathcal{P}^{(2)} = \mathcal{P}^2$, czyli we Wniosku 1.2 również mamy: $g^2 \mid f - c$.

Łatwo sprawdzić, że dla dowolnych wielomianów $f, g \in k[x_1, \ldots, x_n]$, jeśli $g^2 \mid f$, to $g \mid \frac{\partial f}{\partial x_i}$ dla każdego i. Mamy zatem następującą równoważność.

Wniosek 1.4 *Niech k będzie ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki zero. Niech $f, g \in k[x_1, \ldots, x_n]$ i niech g będzie wielomianem nierozkładalnym. Wówczas $g \mid \frac{\partial f}{\partial x_i}$ dla $i = 1, \ldots, n$ dokładnie wtedy, gdy $g^2 \mid f - c$ dla pewnego $c \in k$.*

2 Przypadki szczególne w charakterystyce dodatniej

Niech K będzie dziedziną z jednoznacznością rozkładu, charakterystyki $p > 0$. Rozważmy K-algebrę wielomianów n zmiennych $K[x_1, \ldots, x_n]$. W Twierdzeniach 2.1, 2.3 i 2.4 przedstawiamy warianty Lematu Freudenburga w pewnych przypadkach szczególnych. Podajemy również kontrprzykłady do ogólnej wersji tego lematu w charakterystyce dodatniej.

Zauważmy, że jeśli $g \in K[x_1^p, \ldots, x_n^p]$, to $\frac{\partial g}{\partial x_i} = 0$ dla $i = 1, \ldots, n$. Stąd łatwo wnioskujemy, że jeśli ponadto $g \mid f$ dla pewnego $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$, to $g \mid \frac{\partial f}{\partial x_i}$ dla każdego i. Twierdzenie odwrotne ma następującą postać ([3], Proposition 3.3).

Twierdzenie 2.1 *Niech $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ i $g \in K[x_1^p, \ldots, x_n^p]$. Jeśli $g \mid \frac{\partial f}{\partial x_i}$ dla $i = 1, \ldots, n$, to $g \mid f + h$ dla pewnego $h \in K[x_1^p, \ldots, x_n^p]$.*

Podkreślmy, że w powyższym twierdzeniu wielomian g nie musi być nierozkładalny. Ponadto, tezy tego twierdzenia nie można wzmocnić do postaci $g^2 \mid f + h$, co pokazuje przykład $f = x_1^{p+1}$ i $g = x_1^p$. Wzmocnienie tezy Lematu Freudenburga w charakterystyce dodatniej jest możliwe na mocy następującego odpowiednika Lematu 1.3. Przypomnijmy, że K jest dziedziną z jednoznacznością rozkładu, charakterystyki $p > 0$.

Lemat 2.2 *Niech $f, g \in K[x_1, \ldots, x_n]$, przy czym $g \notin K[x_1^p, \ldots, x_n^p]$. Jeśli g jest wielomianem nierozkładalnym, takim, że $g \mid f$ i $g \mid \frac{\partial f}{\partial x_i}$ dla każdego i, to $g^2 \mid f$.*

Kolejne twierdzenie przedstawia pewną szczególną postać wielomianu g, dla której zachodzi Lemat Freudenburga. Zauważmy, że każdy wielomian takiej postaci jest nierozkładalny ([3], Proposition 3.1).

Twierdzenie 2.3 *Niech $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ i niech $g \in K[x_1, \ldots, x_n]$ będzie wielomianem postaci $g = x_j + r$, gdzie $r \in K[x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n]$. Jeśli $g \mid \frac{\partial f}{\partial x_i}$ dla $i = 1, \ldots, n$, to $g^2 \mid f + h$ dla pewnego $h \in K[x_1^p, \ldots, x_n^p]$.*

Lemat Freudenburga w postaci ogólnej zachodzi w przypadku charakterystyki 2 ([3], Proposition 3.6).

Twierdzenie 2.4 *Niech K będzie dziedziną z jednoznacznością rozkładu, charakterystyki 2. Niech $f, g \in K[x_1, \ldots, x_n]$ i niech g będzie wielomianem nierozkładalnym, nienależącym do $K[x_1^2, \ldots, x_n^2]$. Jeśli $g \mid \frac{\partial f}{\partial x_i}$ dla $i = 1, \ldots, n$, to $g^2 \mid f + h$ dla pewnego $h \in K[x_1^2, \ldots, x_n^2]$.*

3 Kontrprzykłady w charakterystyce $p > 2$

Okazuje się, że ogólny odpowiednik Lematu Freudenburga nie zachodzi w przypadku charakterystyki większej od 2.

Niech K będzie dziedziną z jednoznacznością rozkładu, charakterystyki $p > 2$. Istnieje wielomian $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$, gdzie $n \geqslant 2$, taki, że $g = \mathrm{NWD}\,(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$ jest wielomianem nierozkładalnym oraz $g \nmid f + h$ dla dowolnego $h \in K[x_1^p, \ldots, x_n^p]$.

Jako przykłady możemy podać wielomiany $x_1^5 - x_1 x_2^3$ i $x_1^5 + x_1^4 x_2 + x_1^3 x_2^2 - x_1 x_2^3 + x_2^4$ dla $p = 3$. Dla dowolnego $p > 2$ możemy rozważyć wielomian $f = x_1^n - x_1 x_2^p$, gdzie $n > 2$ i $n \not\equiv 0, 1 \pmod p$, uogólniający pierwszy przykład. Wówczas $g = n x_1^{n-1} - x_2^p$ jest wielomianem nierozkładalnym, gdyż $\mathrm{NWD}\,(n-1, p) = 1$ ([4], Proposition 5.6). Ponadto, $g \nmid f + h$ dla dowolnego $h \in K[x_1^p, \ldots, x_n^p]$, co sprawdzamy na mocy następującego faktu ([3], Lemma 4.1).

Lemat 3.1 *Niech $f \in K[x_1, \ldots, x_n] \setminus K[x_1^p, \ldots, x_n^p]$ będzie takim wielomianem, że $g = \mathrm{NWD}\,(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$ jest wielomianem nierozkładalnym, nienależącym do $K[x_1^p, \ldots, x_n^p]$. Niech $\frac{\partial f}{\partial x_i} = u_i g$, $u_i \in K[x_1, \ldots, x_n]$, dla $i = 1, \ldots, n$. Jeśli $u_i \notin (g, \frac{\partial g}{\partial x_i})$ dla pewnego i, to $g \nmid f + h$ dla dowolnego $h \in K[x_1^p, \ldots, x_n^p]$.*

Odnotujmy jeszcze, że odpowiednik Lematu Freudenburga zachodzi dla wielomianów jednej zmiennej nad ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki dodatniej. Bez tego założenia może nie zachodzić, np. nad ciałem $\mathbb{F}_3$ kontrprzykładem jest wielomian $x^5 + x^2 + x$. Podobny przykład można podać w przypadku charakterystyki zero ([1], Remark 2.4).

Literatura

[1] A. van den Essen, A. Nowicki, A. Tyc, *Generalizations of a lemma of Freudenburg*, J. Pure Appl. Algebra 177 (2003), 43–47.

[2] G. Freudenburg, *A note on the kernel of a locally nilpotent derivation*, Proc. Amer. Math. Soc. 124 (1996), 27–29.

[3] P. Jędrzejewicz, *One-element p-bases of rings of constants of derivations* (przygotowana do druku).

[4] J. Zieliński, *Factorizable derivations and ideals of relations*, Comm. Algebra 35 (2007), 983–997.

A LEMMA OF FREUDENBURG

Summary. In this paper we discuss various aspects of a Freudenburg's lemma about irreducible common divisors of partial derivatives of a polynomial.

Łódź, 7 – 11 stycznia 2008 r.