**MATERIAŁY NA XXXI KONFERENCJĘ SZKOLENIOWĄ
Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ
ZESPOLONEJ**

2010 **Łódź** **str. 9**

WIELOMIANY DOMKNIĘTE ORAZ ICH ODPOWIEDNIKI W CHARAKTERYSTYCE DODATNIEJ

Piotr Jędrzejewicz (Toruń)

*Profesorowi Jackowi Chądzyńskiemu
z okazji Jego siedemdziesiątych urodzin*

Wstęp

Niech k będzie ciałem. Przez $k[x_1, \ldots, x_n]$ oznaczamy k-algebrę wielomianów n zmiennych.

Pojęcie wielomianu domkniętego w przypadku charakterystyki 0 (Definicja 2.1) zostało wprowadzone przez Nowickiego i Nagatę w pracach [5] i [7]. Celem niniejszego artykułu jest dyskusja sposobów przeniesienia tego pojęcia na przypadek charakterystyki dodatniej. Okazuje się, że przy bezpośrednim przeniesieniu definicji tracimy związek z pierścieniami stałych różniczkowań. Natomiast, gdy ten związek przyjmiemy za podstawę definicji, to otrzymamy pojęcie bardzo odległe od pojęcia wielomianu domkniętego w charakterystyce 0.

1 Pierścienie stałych różniczkowań

Definicja 1.1 *Odwzorowanie k-liniowe*

$$d\colon k[x_1,\ldots,x_n] \mapsto k[x_1,\ldots,x_n]$$

nazywamy k-różniczkowaniem, jeśli $d(fg) = d(f)g + d(g)f$ *dla dowolnych* $f, g \in k[x_1,\ldots,x_n]$. *Zbiór*

$$k[x_1,\ldots,x_n]^d = \{f \in k[x_1,\ldots,x_n] :\ d(f) = 0\}$$

nazywamy pierścieniem stałych różniczkowania d.

Jasne jest, że $k[x_1,\ldots,x_n]^d$ jest podpierścieniem, a nawet k-podalgebrą w $k[x_1,\ldots,x_n]$. Jeśli $d(f) = 0$ dla pewnego wielomianu $f \in k[x_1,\ldots,x_n]$, to $k[f] \subset k[x_1,\ldots,x_n]^d$. W przypadku ciała k charakterystyki $p > 0$ pierścień stałych $k[x_1,\ldots,x_n]^d$ jest $k[x_1^p,\ldots,x_n^p]$-podalgebrą, a jeśli $d(f) = 0$ dla pewnego $f \in k[x_1,\ldots,x_n]$, to $k[x_1^p,\ldots,x_n^p, f] \subset k[x_1,\ldots,x_n]^d$.

Odnotujmy twierdzenie ([6], Theorem 7.1.4), które dostarcza motywacji do dalszych rozważań.

Twierdzenie 1.2 *Jeśli k jest ciałem charakterystyki* 0, *a d jest k-różniczkowaniem algebry* $k[x_1,\ldots,x_n]$, *takim, że* $\operatorname{tr\,deg}_k k[x_1,\ldots,x_n]^d \leqslant 1$, *to* $k[x_1,\ \ldots,\ x_n]^d = k[f]$ *dla pewnego* $f \in k[x_1,\ldots,x_n]$.

W przypadku dwóch zmiennych mamy w szczególności ([6], Corollary 7.1.5; [7], Theorem 2.8):

Wniosek 1.3 *Jeśli* $\operatorname{char} k = 0$, *a d jest niezerowym k-różniczkowaniem algebry* $k[x,y]$, *to* $k[x,y]^d = k[f]$ *dla pewnego* $f \in k[x,y]$.

Zauważmy jeszcze, że dla dowolnego wielomianu $f \in k[x_1,\ldots,x_n]$ istnieje najmniejszy (w sensie relacji inkluzji) pierścień stałych k-różniczkowania, zawierający f. Jest nim:

– całkowite domknięcie pierścienia $k[f]$ w $k[x_1,\ldots,x_n]$, jeśli $\operatorname{char} k = 0$ ([6], Corollary 7.2.1; [7], Proposition 3.3),

– pierścień $k(x_1^p,\ldots,x_n^p, f) \cap k[x_1,\ldots,x_n]$, jeśli $\operatorname{char} k = p > 0$ ([4]).

2 Wielomiany domknięte w charakterystyce zero

Definicja 2.1 *Wielomian* $f \in k[x_1,\ldots,x_n] \setminus k$, *gdzie k jest ciałem charakterystyki* 0, *nazywamy domkniętym, jeśli pierścień* $k[f]$ *jest całkowicie domknięty w* $k[x_1,\ldots,x_n]$.

Następujące twierdzenie dobrze przedstawia różnorodność własności charakteryzujących wielomiany domknięte.

Twierdzenie 2.2 *Niech* $\operatorname{char} k = 0$, $f \in k[x_1, \ldots, x_n] \setminus k$. *Następujące warunki są równoważne:*

(1) *wielomian* f *jest domknięty,*

(2) *pierścień* $k[f]$ *jest elementem maksymalnym (w sensie relacji inkluzji) rodziny* $\{k[g];\ g \in k[x_1, \ldots, x_n]\}$,

(3) $k[f]$ *jest pierścieniem stałych pewnego* k*-różniczkowania algebry* $k[x_1, \ldots, x_n]$,

(4) *dla pewnego* $c \in k$ *wielomian* $f + c$ *jest nierozkładalny nad* $\overline{k}$, *gdzie przez* $\overline{k}$ *oznaczamy domknięcie algebraiczne ciała* k.

Odnotujmy, że warunek (2) oznacza, iż wielomianu f nie można przedstawić w postaci $f = w(g)$, gdzie $g \in k[x_1, \ldots, x_n]$, a w jest wielomianem jednej zmiennej stopnia większego od 1.

Równoważność warunków (1), (2) i (3) została udowodniona przez Nowickiego i Nagatę ([5], Theorem 2.1; [6], Proposition 5.2.1; [7], Lemma 3.1). Warunek (4) pochodzi od Ayada ([1], Théorème 8) i opiera się na twierdzeniu Płoskiego dla $k = \mathbb{C}$ ([8]; [9], 3.3, Corollary 1, str. 220).

3 Charakteryzacje poprzez maksymalność podalgebr

Rozważmy rodzinę pierścieni z warunku (2) Twierdzenia 2.2:

$$\mathcal{A} = \{k[g];\ g \in k[x_1, \ldots, x_n]\}.$$

W przypadku charakterystyki $p > 0$, jeśli interesują nas pierścienie stałych różniczkowań, bardziej naturalne jest rozważenie rodziny

$$\mathcal{B} = \{k[x_1^p, \ldots, x_n^p, g];\ g \in k[x_1, \ldots, x_n]\}.$$

Zauważmy, że rodzina $\mathcal{B}$ zawiera za dużo elementów maksymalnych (w sensie relacji inkluzji), nie wszystkie z nich są pierścieniami stałych różniczkowań.

Przykład 3.1 *Jeśli* $p > 2$, *to pierścień* $k[x_1^p, \ldots, x_n^p, x_1^{p-1}x_2]$ *jest elementem maksymalnym rodziny* $\mathcal{B}$, *ale nie jest pierścieniem stałych żadnego* k*-różniczkowania algebry* $k[x_1, \ldots, x_n]$.

Do charakteryzacji (nietrywialnych) pierścieni stałych różniczkowań postaci $k[x_1^p, \ldots, x_n^p, f]$ wykorzystamy inną rodzinę:

$$\mathcal{C} = \{R \subset k[x_1, \ldots, x_n] :\ k[x_1^p, \ldots, x_n^p] \subset R,\ (R_0 : k(x_1^p, \ldots, x_n^p)) = p\},$$

gdzie R_0 oznacza ciało ułamków dziedziny R, a $(L : K)$ oznacza stopień rozszerzenia ciał $K \subset L$.

Lemat 3.2 *Pierścień* $R \in \mathcal{C}$ *jest pierścieniem stałych pewnego* k*-różniczkowania algebry* $k[x_1, \ldots, x_n]$ *dokładnie wtedy, gdy jest elementem maksymalnym rodziny* $\mathcal{C}$.

Odnotujmy zależność między maksymalnością pewnych podalgebr określonych przez wielomian f w danych trzech rodzinach.

Lemat 3.3 *Niech* $\operatorname{char} k = p > 0$, $f \in k[x_1, \dots, x_n]$. *Rozważmy następujące warunki:*

(1) $k[f]$ *jest elementem maksymalnym rodziny* $\mathcal{A}$,

(2) $k[x_1^p, \dots, x_n^p, f]$ *jest elementem maksymalnym rodziny* $\mathcal{B}$,

(3) $k[x_1^p, \dots, x_n^p, f]$ *jest elementem maksymalnym rodziny* $\mathcal{C}$.

Wówczas zachodzą implikacje:

$$(3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1).$$

Nietrudno zauważyć, że implikacje odwrotne nie muszą zachodzić. Pierścień z przykładu 3.1 jest elementem maksymalnym rodziny $\mathcal{B}$, ale nie jest maksymalny w rodzinie $\mathcal{C}$. Równie łatwo wskazać kontrprzykład do implikacji (1) $\Rightarrow$ (2).

Przykład 3.4 *Pierścień* $k[x_1^p x_2]$ *jest maksymalny w rodzinie* $\mathcal{A}$, *ale pierścień* $k[x_1^p, \dots, x_n^p, x_1^p x_2]$ *nie jest maksymalny w rodzinie* $\mathcal{B}$.

4 Domkniętość w charakterystyce dodatniej

W pracy [1] Ayad zauważył, że równoważność warunków (1) i (2) z Twierdzenia 2.2 zachodzi również w przypadku charakterystyki dodatniej.

Twierdzenie 4.1 *Niech* $\operatorname{char} k = p > 0$, $f \in k[x_1, \dots, x_n] \setminus k$. *Następujące warunki są równoważne:*

(1) *pierścień* $k[f]$ *jest całkowicie domknięty w* $k[x_1, \dots, x_n]$,

(2) *pierścień* $k[f]$ *jest elementem maksymalnym rodziny* $\mathcal{A}$.

To jest najbardziej naturalny sposób zdefiniowania wielomianów domkniętych w charakterystyce dodatniej. Z poprzedniego podrozdziału wiemy jednak, że odpowiednik warunku (3) z Twierdzenia 2.2 implikuje powyższy warunek (2), ale nie na odwrót.

Jeśli szukamy warunku wyrażającego całkowitą domkniętość, równoważnego temu, że $k[x_1^p, \dots, x_n^p, f]$ jest pierścieniem stałych pewnego k-różniczkowania algebry $k[x_1, \dots, x_n]$, to myślimy raczej o całkowitej domkniętości pierścienia $k[x_1^p, \dots, x_n^p, f]$. Niestety, dla $n > 1$ ten pierścień nie jest całkowicie domknięty w $k[x_1, \dots, x_n]$, gdyż dla wielomianu $g \in k[x_1, \dots, x_n] \setminus k[x_1^p, \dots, x_n^p, f]$ mamy $g^p \in k[x_1^p, \dots, x_n^p, f]$. Okazuje się jednak, że pierścień jest dobry, tylko trzeba zmodyfikować warunek całkowitej domkniętości ([3]).

Twierdzenie 4.2 *Niech* $\operatorname{char} k = p > 0$, $f \in k[x_1, \dots, x_n] \setminus k[x_1^p, \dots, x_n^p]$. *Następujące warunki są równoważne:*

(1) *pierścień* $k[x_1^p, \ldots, x_n^p, f]$ *jest pierścieniem stałych pewnego* k*-różniczkowania algebry* $k[x_1, \ldots, x_n]$,

(2) *dla dowolnych* $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1} \in k[x_1^p, \ldots, x_n^p, f]$ *i dowolnego wielomianu* $g \in k[x_1, \ldots, x_n]$, *jeśli* $a_{p-1}g^{p-1} + \ldots + a_1 g + a_0 = 0$, *to* $g \in k[x_1^p, \ldots, x_n^p, f]$.

Zauważmy jeszcze, że implikacja (4) $\Rightarrow$ (2) z Twierdzenia 2.2 zachodzi w dowolnej charakterystyce. Ayad ([1]) podaje następujący kontrprzykład do implikacji odwrotnej.

Przykład 4.3 *Niech* k *będzie ciałem niedoskonałym charakterystyki* $p > 0$, *niech* $b \in k \setminus k^p$. *Wówczas wielomian* $f = x^p + by^p \in k[x, y]$ *spełnia warunki Twierdzenia* 4.1, *ale wielomian* $f + c$ *jest rozkładalny nad* $\overline{k}$ *dla każdego* $c \in k$.

5 Warunki wiążące pochodne cząstkowe wielomianu

Zauważmy, że w charakterystyce 0 pewne warunki związane z pochodnymi cząstkowymi implikują domkniętość wielomianu.

Lemat 5.1 *Niech* $\operatorname{char} k = 0$, $f \in k[x_1, \ldots, x_n] \setminus k$. *Rozważmy następujące warunki:*

(1) *ideał* $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ *jest równy* $k[x_1, \ldots, x_n]$,

(2) $\operatorname{NWD}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = 1$,

(3) *wielomian* f *jest domknięty.*

Wówczas zachodzą implikacje:

$$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3).$$

Implikacja (2) $\Rightarrow$ (3) dla dwóch zmiennych została zauważona przez Ayada ([1], Proposition 14). Warunek (1) dla $n = 2$ jest warunkiem koniecznym na to, by $k[f]$ było pierścieniem stałych różniczkowania lokalnie nilpotentnego.

W przypadku charakterystyki dodatniej zachodzą podobne zależności ([2], Theorem 2.3).

Lemat 5.2 *Niech* $\operatorname{char} k = p > 0$, $f \in k[x_1, \ldots, x_n] \setminus k[x_1^p, \ldots, x_n^p]$. *Rozważmy następujące warunki:*

(1) $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = k[x_1, \ldots, x_n]$,

(2) $\operatorname{NWD}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = 1$,

(3) $k[x_1^p, \ldots, x_n^p, f]$ *jest pierścieniem stałych pewnego* k*-różniczkowania pierścienia* $k[x_1, \ldots, x_n]$.

Wówczas zachodzą implikacje:

$$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3).$$

W przeciwieństwie do przypadku charakterystyki 0, tu warunek (2) jest bardzo obiecujący. Równoważność (2) $\Leftrightarrow$ (3) zachodzi w pewnych szczególnych przypadkach, być może jest prawdziwa dla dowolnego wielomianu f.

Literatura

[1] M. Ayad, *Sur les polynômes $f(X,Y)$ tels que $K[f]$ est intégralement fermé dans $K[X,Y]$*, Acta Arith. **105** (2002), 9–28.

[2] P. Jędrzejewicz, *One-element p-bases of rings of constants of derivations*, Osaka J. Math. **46** (2009), 223–234.

[3] P. Jędrzejewicz, *Positive characteristic analogs of closed polynomials* (w przygotowaniu).

[4] P. Jędrzejewicz, *Rings of constants of p-homogeneous polynomial derivations*, Comm. Algebra **31** (2003), 5501–5511.

[5] A. Nowicki, *On the jacobian equation $J(f,g)=0$ for polynomials in $k[x,y]$*, Nagoya Math. J. **109** (1988), 151–157.

[6] A. Nowicki, Polynomial derivations and their rings of constants, UMK, Toruń, 1994.

[7] A. Nowicki and M. Nagata, *Rings of constants for k-derivations in $k[x_1,\ldots,x_n]$*, J. Math. Kyoto Univ. **28** (1988), 111–118.

[8] A. Płoski, *On the irreducibility of polynomials in several complex variables*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. **39** (1991), 241–247.

[9] A. Schinzel, *Polynomials with special regard to reducibility*, Cambridge University Press, 2000.

CLOSED POLYNOMIALS AND THEIR ANALOGS IN POSITIVE CHARACTERISTIC

Summary. In this paper we discuss possible ways to define an analog of closed polynomial in the positive characteristic case.

Łódź, 11 – 15 stycznia 2010 r.