Zbiory hybrydowe

Piotr Jędrzejewicz
WMiI UMK w Toruniu

XXXVIII Konferencja i Warsztaty
„Geometria Analityczna i Algebraiczna"
Łódź, 9 – 13 stycznia 2017 r.

1. Multizbiory
   - Przykład – dzielniki pierwsze
   - Przykład – pierwiastki wielomianu
   - Definicja multizbioru

2. Zbiory hybrydowe
   - Definicja zbioru hybrydowego
   - Przykład zbioru hybrydowego
   - Proste zbiory hybrydowe

MULTIZBIÓR

– zbiór z elementami wielokrotnymi

Multizbiory pojawiały się wielokrotnie w dziejach matematyki. Angielski termin **multiset** został zaproponowany przez Nicolaasa de Bruijna w korespondencji do Donalda Knutha w latach siedemdziesiątych XX w. Inne funkcjonujące terminy:
bag, heap, bunch, sample, occurrence set, weighted set,
fireset – finitely repeated element set.

Wayne Blizard, *The development of multiset theory*, 1991, Modern Logic 1, 319 – 352.

DZIELNIKI PIERWSZE LICZBY 360

$$360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$$

Multizbiór dzielników pierwszych:

$$[2, 2, 2, 3, 3, 5].$$

PODZIELNOŚĆ $\leftrightarrow$ INKLUZJA

$$20 = 2 \cdot 2 \cdot 5, \quad 300 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$$

$$20 \mid 300$$

$$[2, 2, 5] \subset [2, 2, 3, 5, 5]$$

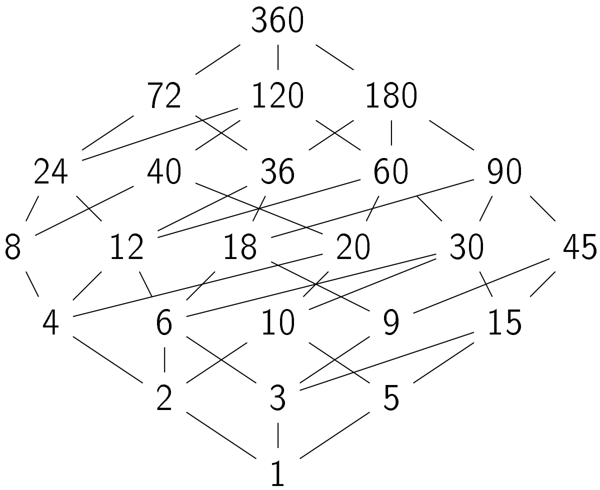
PODZIELNOŚĆ $\leftrightarrow$ INKLUZJA

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3, \quad 18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$$

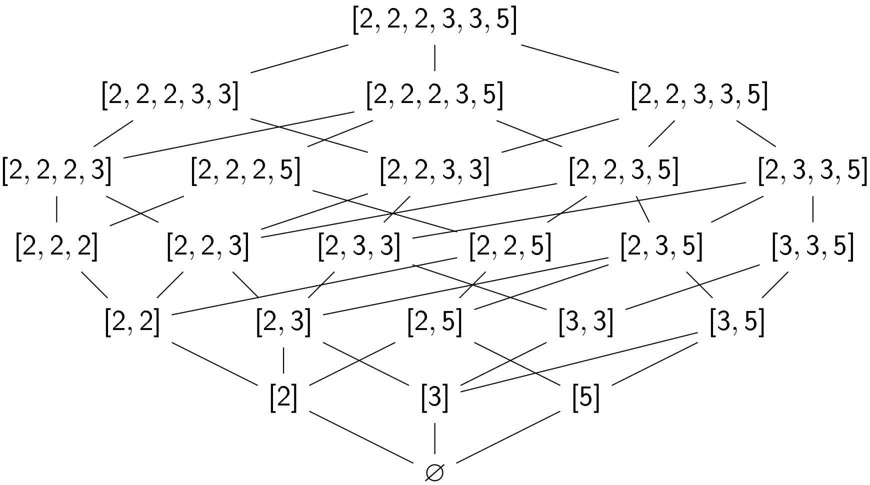
$$12 \nmid 18$$

$$[2, 2, 3] \not\subset [2, 3, 3]$$

GRAF DZIELNIKÓW NATURALNYCH



GRAF PODZBIORÓW MULTIZBIORU



NWD $\leftrightarrow$ CZĘŚĆ WSPÓLNA

$$72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3, \quad 300 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$$

$$\mathrm{NWD}(72, 300) = 12$$

$$[2, 2, 2, 3, 3] \cap [2, 2, 3, 5, 5] = [2, 2, 3]$$

NWW $\leftrightarrow$ SUMA

$$72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3, \quad 300 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$$

$$\mathrm{NWW}(72, 300) = 1800$$

$$[2, 2, 2, 3, 3] \cup [2, 2, 3, 5, 5] = [2, 2, 2, 3, 3, 5, 5]$$

PIERWIASTKI WIELOMIANU

Zasadnicze twierdzenie algebry

Dowolny niezerowy wielomian $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ stopnia n posiada n-elementowy MULTIZBIÓR pierwiastków.

PODZIELNOŚĆ WIELOMIANÓW

$f(x) \in \mathbb{C}[x] \setminus \{0\}$,
X – multizbiór pierwiastków wielomianu $f(x)$

$g(x) \in \mathbb{C}[x] \setminus \{0\}$,
Y – multizbiór pierwiastków wielomianu $g(x)$

Wówczas

$$f(x) \mid g(x) \Leftrightarrow X \subset Y.$$

DEFINICJA MULTIZBORU

Multizbiór $X = [2, 2, 2, 4, 6, 6]$ definiujemy za pomocą zwykłego zbioru $A = \{2, 4, 6\}$ i funkcji krotności $f : A \to \{1, 2, 3, \dots\}$, takiej że $f(2) = 3,\ f(4) = 1,\ f(6) = 2.$

DEFINICJA MULTIZBIORU

Definicja

Multizbiorem w zbiorze U nazywamy funkcję

$$f : U \to \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Liczba elementów multizbioru:

$$\sum_{a \in U} f(a),$$

jeśli jest skończenie wiele wyrazów niezerowych.

INKLUZJA MULTIZBIORÓW

X, Y – multizbiory określone na zbiorze U odpowiednio za pomocą funkcji $f, g \colon U \to \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Jeśli $f(a) \leqslant g(a)$ dla każdego $a \in U$, to mówimy, że X jest zawarty w Y:

$$X \subset Y.$$

CZĘŚĆ WSPÓLNA MULTIZBIORÓW

X, Y – multizbiory określone na zbiorze U odpowiednio za pomocą funkcji $f, g\colon U \to \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Część wspólna $X \cap Y$ to multizbiór określony przez funkcję $h\colon U \to \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, taką że

$$h(a) = \min(f(a), g(a))$$

dla każdego $a \in U$.

SUMA MULTIZBIORÓW

X, Y – multizbiory określone na zbiorze U odpowiednio za pomocą funkcji $f, g\colon U \to \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Suma $X \cup Y$ to multizbiór określony przez funkcję

$$h\colon U \to \{0, 1, 2, 3, \dots\},$$

taką że $h(a) = \max(f(a), g(a))$ dla każdego $a \in U$.

SUMA ROZŁĄCZNA MULTIZBIORÓW

X, Y – multizbiory określone na zbiorze U odpowiednio za pomocą funkcji $f, g \colon U \to \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Suma rozłączna $X \sqcup Y$ to multizbiór określony przez funkcję

$$h \colon U \to \{0, 1, 2, 3, \dots\},$$

taką że $h(a) = f(a) + g(a)$ dla każdego $a \in U$.

POJĘCIE ZBIORU HYBRYDOWEGO

„Suppose we associate with each element of a set R' any integer, positive, negative or zero, instead of merely one or zero. The resulting function will not in general be the characteristic function of a real set; but we may consider it as the characteristic function of a *generalized set*, where each element is counted any number of times."

Hassler Whitney, *Characteristic functions and the algebra of logic*, 1933, Annals of Mathematics 34, 405 – 414.

POJĘCIE ZBIORU HYBRYDOWEGO

„Given a universe of discourse U, a multiset can be thought of as a function M from U to the natural numbers $\mathbf{N}$. In this paper we define a *hybrid set* to be any function from the universe U to the integers $\mathbf{Z}$. These sets are called hybrid since they contain elements with either a positive or negative multiplicity."

Daniel Loeb, *Sets with a negative number of elements*, 1992, Advances in Mathematics 91, 64 – 74.

POJĘCIE ZBIORU HYBRYDOWEGO

Apostolos Syropoulos, *Mathematics of multisets*, Proceedings of the Workshop on Multiset Processing, WMP'00 London, Springer-Verlag 2001, 347 – 358.

Mike Ghesquiere, *Generalized inclusion-exclusion*, Master Thesis, University of Western Ontario 2015.

Shaoshi Chen, Stephen Watt, *Combinatorics of hybrid sets*, 18th International Symposium on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing,
www.mmrc.iss.ac.cn/~schen/CW2016.pdf

POJĘCIE ZBIORU HYBRYDOWEGO

Zbiór hybrydowy X określony za pomocą funkcji $f\colon U \to \mathbb{Z}$ to para rozłącznych multizbiorów (X^+, X^-), gdzie:

X^+ jest określony za pomocą funkcji $f^+\colon U \to \mathbb{N}_0$, $f^+(x) = \max(f(x), 0)$.

X^- jest określony za pomocą funkcji $f^-\colon U \to \mathbb{N}_0$, $f^-(x) = \max(-f(x), 0)$.

PRZYKŁAD ZBIORU HYBRYDOWEGO

$$\frac{40}{63} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5}{3 \cdot 3 \cdot 7}$$

Zbiór hybrydowy czynników pierwszych:

$$[2, 2, 2, 5 \,|\, 3, 3, 7]$$

PROSTE ZBIORY HYBRYDOWE

Prosty zbiór hybrydowy X w danym zbiorze U określamy za pomocą fukcji

$$f\colon U \to \{-1, 0, 1\}.$$

Prosty zbiór hybrydowy X to para rozłącznych zbiorów (A, B), gdzie:

$A = \{u \in U : f(u) = 1\}$,

$B = \{u \in U : f(u) = -1\}$.

CZĘŚĆ WSPÓLNA

$X = (A, B)$, $Y = (C, D)$ – proste zbiory hybrydowe określone w zbiorze U odpowiednio za pomocą funkcji $f, g \colon U \to \mathbb{Z}$.

Część wspólna $X \cap Y$ to prosty zbiór hybrydowy określony przez funkcję $h \colon U \to \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, taką że

$$h(u) = \min(f(u), g(u))$$

dla każdego $u \in U$.

CZĘŚĆ WSPÓLNA

$$X = (A, B),\ Y = (C, D),\ X \cap Y = (A \cap C, B \cup D)$$

$f(u)$	$g(u)$	$h(u)$
-1	-1	-1
-1	0	-1
-1	1	-1
0	0	0
0	1	0
1	1	1

SUMA

$X = (A, B)$, $Y = (C, D)$ – proste zbiory hybrydowe określone w zbiorze U odpowiednio za pomocą funkcji $f, g\colon U \to \mathbb{Z}$.

Suma $X \cup Y$ to prosty zbiór hybrydowy określony przez funkcję $h\colon U \to \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, taką że

$$h(u) = \max(f(u), g(u))$$

dla każdego $u \in U$.

SUMA

$$X = (A, B),\ Y = (C, D),\ X \cup Y = (A \cup C, B \cap D)$$

$f(u)$	$g(u)$	$h(u)$
-1	-1	-1
-1	0	0
-1	1	1
0	0	0
0	1	1
1	1	1

LOGIKA TRÓJWARTOŚCIOWA – KLASY NIEDOKŁADNE

John Cleave, *The notion of logical consequence in the logic of inexact predicates*, 1974, Z. Math. Logik Grundlagen Math. 20, 307–324.

Grzegorz Malinowski, *Kleene logic and inference*, 2014, Bull. Sect. Logic Univ. Łódź 43, 43–52.

Dziękuję bardzo za uwagę!