# Wokół Konfiguracji Böröczky'ego

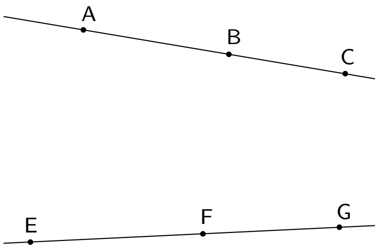
Jakub Kabat

Instytut Matematyki
Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie

12 stycznia 2018

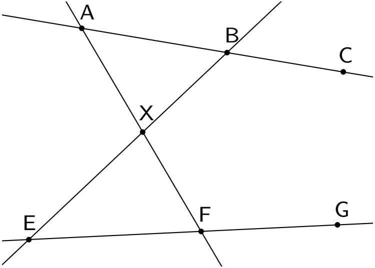
## Twierdzenie (Pappus, IV wiek)

*Niech $\{A, B, C\}$ oraz $\{D, E, F\}$ będą zbiorami współliniowych i parami różnych punktów na płaszczyźnie rzutowej. Wówczas punkty przecięcia $X$, $Y$, $Z$ par prostych $AF$ oraz $BE$, $AG$ oraz $CE$, $BG$ oraz $CF$ są współliniowe.*



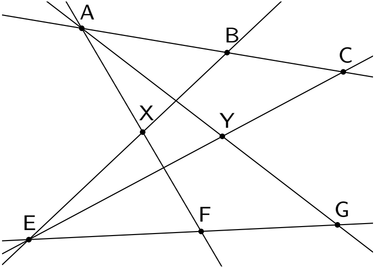
## Twierdzenie (Pappus, IV wiek)

*Niech* $\{A, B, C\}$ *oraz* $\{D, E, F\}$ *będą zbiorami współliniowych i parami różnych punktów na płaszczyźnie rzutowej. Wówczas punkty przecięcia* $X$, $Y$, $Z$ *par prostych* $AF$ *oraz* $BE$, $AG$ *oraz* $CE$, $BG$ *oraz* $CF$ *są współliniowe.*



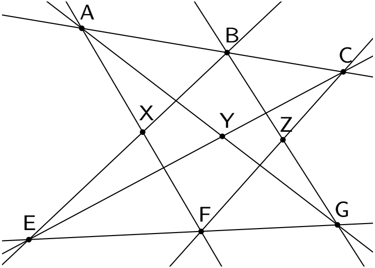
## Twierdzenie (Pappus, IV wiek)

*Niech $\{A, B, C\}$ oraz $\{D, E, F\}$ będą zbiorami współliniowych i parami różnych punktów na płaszczyźnie rzutowej. Wówczas punkty przecięcia $X$, $Y$, $Z$ par prostych $AF$ oraz $BE$, $AG$ oraz $CE$, $BG$ oraz $CF$ są współliniowe.*



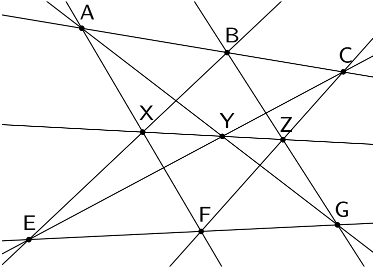
## Twierdzenie (Pappus, IV wiek)

*Niech $\{A, B, C\}$ oraz $\{D, E, F\}$ będą zbiorami współliniowych i parami różnych punktów na płaszczyźnie rzutowej. Wówczas punkty przecięcia $X$, $Y$, $Z$ par prostych $AF$ oraz $BE$, $AG$ oraz $CE$, $BG$ oraz $CF$ są współliniowe.*



## Twierdzenie (Pappus, IV wiek)

*Niech $\{A, B, C\}$ oraz $\{D, E, F\}$ będą zbiorami współliniowych i parami różnych punktów na płaszczyźnie rzutowej. Wówczas punkty przecięcia $X$, $Y$, $Z$ par prostych $AF$ oraz $BE$, $AG$ oraz $CE$, $BG$ oraz $CF$ są współliniowe.*



**Pytanie (Sylvester)**

*Czy istnieje taka konfiguracja prostych na płaszczyźnie rzutowej, że przez każdy punkt przecięcia dwóch prostych, przechodzi trzecia prosta?*

### Pytanie (Sylvester)

*Czy istnieje taka konfiguracja prostych na płaszczyźnie rzutowej, że przez każdy punkt przecięcia dwóch prostych, przechodzi trzecia prosta?*

### Uwaga

*Taka sytuacja zachodzi dla trzech prostych w jednym pęku.*

**Twierdzenie (Sylvester - Gallai, 1945)**

*Rozważmy $s \geqslant 1$ prostych na **rzeczywistej** płaszczyźnie rzutowej. Wówczas prawdziwy jest dokładnie jeden z wymienionych warunków:*

(1) *wszystkie proste przechodzą przez 1 punkt (są współpękowe);*

(2) *istnieje punkt, przez który przechodzą dokładnie dwie proste.*

## Twierdzenie (Sylvester - Gallai, 1945)

*Rozważmy $s \geqslant 1$ prostych na* ***rzeczywistej*** *płaszczyźnie rzutowej. Wówczas prawdziwy jest dokładnie jeden z wymienionych warunków:*

(1) *wszystkie proste przechodzą przez 1 punkt (są współpękowe);*

(2) *istnieje punkt, przez który przechodzą dokładnie dwie proste.*

## Pytanie

*Ile jest takich punktów, przez które przechodzą dokładnie dwie proste?*

### Twierdzenie (Green - Tao, 2013)

*Przypuśćmy, że $\mathcal{L}$ jest zbiorem $s$ niewspółpękowych prostych na rzeczywistej płaszczyźnie rzutowej. Dla $s$ odpowiednio dużego istnieje co najmniej $\frac{s}{2}$ punktów, w których przecinają się dokładnie dwie proste.*

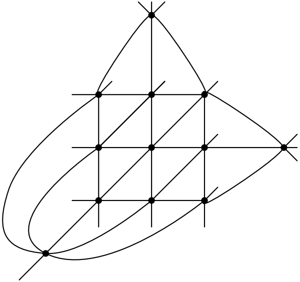
**Twierdzenie (Green - Tao, 2013)**

*Przypuśćmy, że $\mathcal{L}$ jest zbiorem $s$ niewspółpękowych prostych na rzeczywistej płaszczyźnie rzutowej. Dla $s$ odpowiednio dużego istnieje co najmniej $\frac{s}{2}$ punktów, w których przecinają się dokładnie dwie proste.*

**Pytanie**

*Na ile istotne jest założenie, że rozważana jest płaszczyzna rzeczywista?*

# Konfiguracja dualna do konfiguracji Hessego na zespolonej płaszczyźnie rzutowej



Na mocy twierdzenia Sylvestera-Gallai, konfiguracja ta nie może być zrealizowana nad ciałem liczb rzeczywistych – przez każdy z 12 punktów przechodzą 3 proste.

# Ideały punktów

*Niech $P = (p : q : r)$ będzie punktem na płaszczyźnie rzutowej. Wtedy ideał jednorodny*

$$I(P) = (py - qx, pz - rx, qz - ry) \subset \mathbb{K}[x, y, z]$$

*zawiera wszystkie wielomiany znikające w punkcie $P$.*

# Ideały punktów

*Niech $P = (p : q : r)$ będzie punktem na płaszczyźnie rzutowej. Wtedy ideał jednorodny*

$$I(P) = (py - qx, pz - rx, qz - ry) \subset \mathbb{K}[x, y, z]$$

*zawiera wszystkie wielomiany znikające w punkcie $P$.*

## Lemat

*Dla układu punktów $P_1, \ldots, P_k$ ideał*

$$I = I(P_1) \cap \ldots \cap I(P_k)$$

*zawiera wszystkie wielomiany znikające w każdym z punktów $P_1, \ldots, P_k$.*

# Potęga symboliczna i problem zawierania

Niech $m$ bedzie liczbą naturalną i niech $P_1, \ldots, P_k$ będzie zbiorem punktów. Zbiór wszystkich wielomianów znikających w każdym z punktów $P_1, \ldots, P_k$ do rzędu $m$ tworzy ideał, który oznaczamy $I^{(m)}$ i nazywamy $m$-tą potęgą symboliczną ideału $I = I(P_1) \cap \ldots \cap I(P_k)$.

# Potęga symboliczna i problem zawierania

Niech $m$ bedzie liczbą naturalną i niech $P_1, \ldots, P_k$ będzie zbiorem punktów. Zbiór wszystkich wielomianów znikających w każdym z punktów $P_1, \ldots, P_k$ do rzędu $m$ tworzy ideał, który oznaczamy $I^{(m)}$ i nazywamy $m$-tą potęgą symboliczną ideału $I = I(P_1) \cap \ldots \cap I(P_k)$.
Mamy

$$I^{(m)} = I(P_1)^m \cap \ldots \cap I(P_k)^m.$$

# Potęga symboliczna i problem zawierania

Niech $m$ bedzie liczbą naturalną i niech $P_1, \ldots, P_k$ będzie zbiorem punktów. Zbiór wszystkich wielomianów znikających w każdym z punktów $P_1, \ldots, P_k$ do rzędu $m$ tworzy ideał, który oznaczamy $I^{(m)}$ i nazywamy $m$-tą potęgą symboliczną ideału $I = I(P_1) \cap \ldots \cap I(P_k)$.
Mamy

$$I^{(m)} = I(P_1)^m \cap \ldots \cap I(P_k)^m.$$

**Problem**

*Dla ideałów $I$ punktów na płaszczyźnie rzutowej wyznaczyć wszystkie $m$ i $r$ takie, że*

$$I^{(m)} \subset I^r.$$

## Twierdzenie (Ein-Lazarsfeld-Smith; Hochster-Huneke, 2000)

*Zawieranie*

$$I^{(m)} \subset I^r$$

*zachodzi dla wszystkich*

$$m \geqslant 2r.$$

## Twierdzenie (Ein-Lazarsfeld-Smith; Hochster-Huneke, 2000)

*Zawieranie*

$$I^{(m)} \subset I^r$$

*zachodzi dla wszystkich*

$$m \geqslant 2r.$$

## Uwaga

*Dla r=1 mamy z twierdzenia* $I^{(2)} \subset I^1 = I$.
*Ale również* $I^{(1)} \subset I$ *(bo* $I^{(1)} = I$*).*

## Twierdzenie (Ein-Lazarsfeld-Smith; Hochster-Huneke, 2000)

*Zawieranie*

$$I^{(m)} \subset I^r$$

*zachodzi dla wszystkich*

$$m \geqslant 2r.$$

## Uwaga

*Dla r=1 mamy z twierdzenia* $I^{(2)} \subset I^1 = I$.
*Ale również* $I^{(1)} \subset I$ *(bo* $I^{(1)} = I$*).*

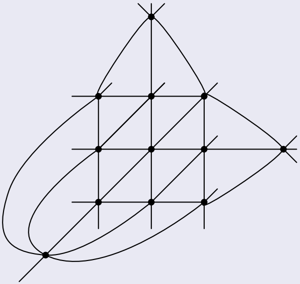
## Pytanie (Huneke 2000)

*Dla r=2 mamy z twierdzenia* $I^{(4)} \subset I^2$.
*Czy zachodzi zawieranie*

$$I^{(3)} \subset I^2?$$

## Twierdzenie (Dumnicki, Szemberg, Tutaj - Gasińska, 2013)

*Niech $I$ będzie ideałem punktów przecięcia w konfiguracji dualnej do konfiguracji Hessego.*



*Wtedy* $I^{(3)} \not\subseteq I^2$.

# Dalsze pytania

**Pytanie**

*Czy istnieją inne przykłady niezawierania ?*

# Dalsze pytania

**Pytanie**

*Czy istnieją inne przykłady niezawierania ?*

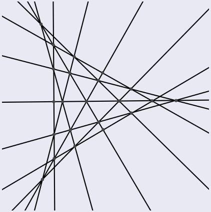
**Pytanie**

*Czy istnieją przykłady niezawierania nad innymi (niż $\mathbb{C}$) ciałami ?*

# Kontrprzykład nad $\mathbb{R}$

**Twierdzenie**

*Niech $I$ będzie ideałem 19 punktów, przez które przechodzą po 3 proste w konfiguracji Böröczky'ego $B_{12}$.*



*Wówczas* $I^{(3)} \not\subseteq I^2$.

Czapliński et al. *A counterexample to the containment $I^{(3)} \subseteq I^2$ over the reals.* Advances in Geometry vol. 16(1): 77 - 82 (2016).

# Przykład niezawierania nad $\mathbb{Q}$

W oparciu o konfigurację Böröczky'ego dwunastu prostych można skonstruować wymierny przykład niezawierania

$$I^{(3)} \not\subseteq I^2.$$

Głównym narzędziem wykorzystanym w dowodzie jest tzw. przestrzeń parametrów konfiguracji.

M. Lampa-Baczyńska & J. Szpond: *From Pappus Theorem to parameter spaces of some extremal line point configurations and applications.* Geom Dedicata 188: 103 - 121 (2017).

**Uogólnienia**

*J. Bokowski & P. Pokora, On the Sylvester-Gallai and the orchard problem for pseudoline arrangements. Periodica Math. Hungarica.*

**Pytanie**

Czy istnieje nieizomorficzna z konfiguracją $B_{12}$ konfiguracja 12 prostych z 19 punktami potrójnymi i 9 punktami podwójnymi?

## Pytanie

Czy istnieje nieizomorficzna z konfiguracją $B_{12}$ konfiguracja 12 prostych z 19 punktami potrójnymi i 9 punktami podwójnymi?

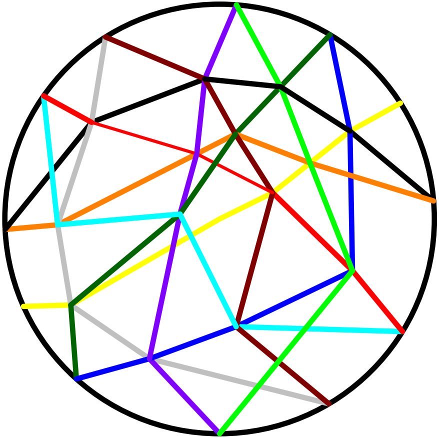
Problem ten jest czysto kombinatoryczny, sprowadza się do zbadania wektorowych matroidów rangi 3 składających się z 12 wektorów spełniających pewne dodatkowe założenia.

## Pytanie

Czy istnieje nieizomorficzna z konfiguracją $B_{12}$ konfiguracja 12 prostych z 19 punktami potrójnymi i 9 punktami podwójnymi?

Problem ten jest czysto kombinatoryczny, sprowadza się do zbadania wektorowych matroidów rangi 3 składających się z 12 wektorów spełniających pewne dodatkowe założenia.

Realizowalne wektorowe matroidy rangi 3 mają piękną interpretację geometryczną, tj. zadają konfigurację pseudoprostych w rzeczywistej płaszczyźnie rzutowej.



Konfiguracja 12 pseudoprostych posiadająca 19 punktów potrójnych i 9 punktów podwójnych.

**Twierdzenie**

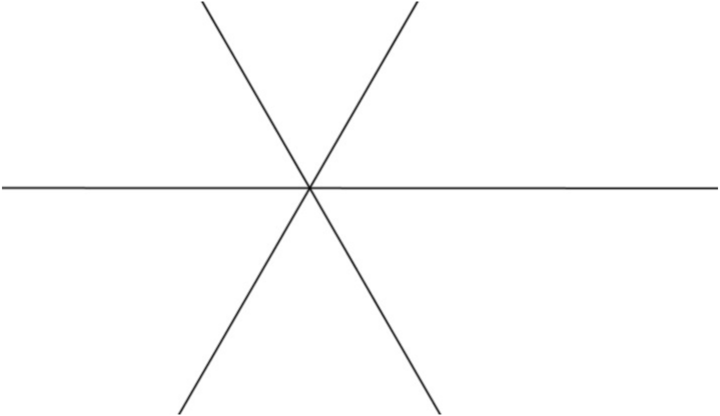
Istnieje dokładnie 13 parami nieizomorficznych konfiguracji 12 pseudoprostych posiadających 19 punktów potrójnych i 9 punktów podwójnych. Dokładnie 3 z wymienionych 13 można zrealizować jako rzeczywiste konfiguracje prostych, jedna z tych konfiguracji to przykład Böröczky'ego.

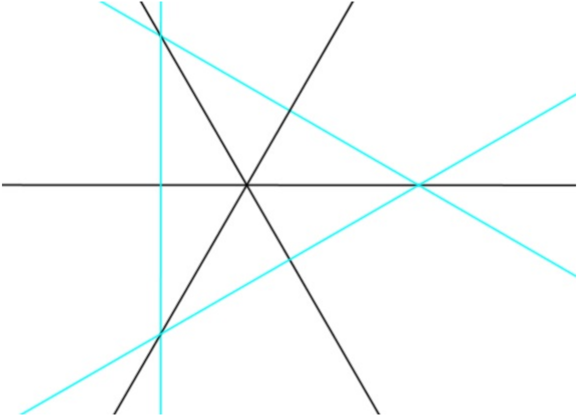
### Twierdzenie

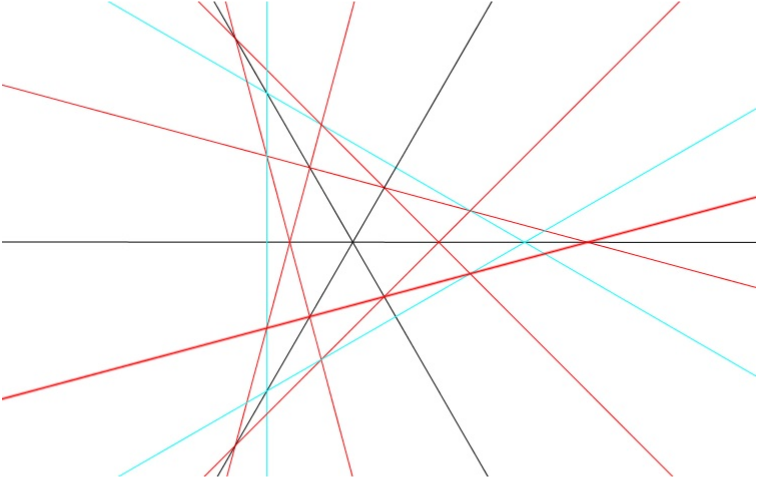
Niech $\mathcal{A}$ będzie konfiguracją prostych zawierającą jedynie podwójne oraz potrójne punkty przecięć. Wówczas jeśli $\mathcal{A}$ jest konfiguracją wolną, to $3 \leqslant |\mathcal{A}| \leqslant 9$.

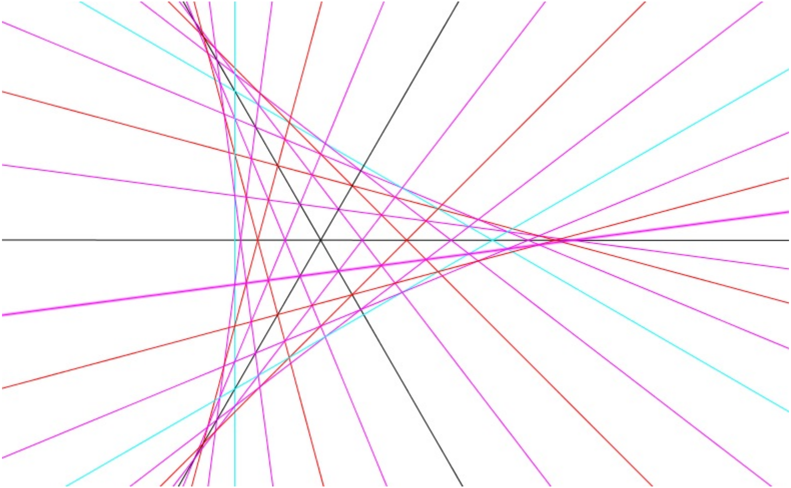
### Wniosek

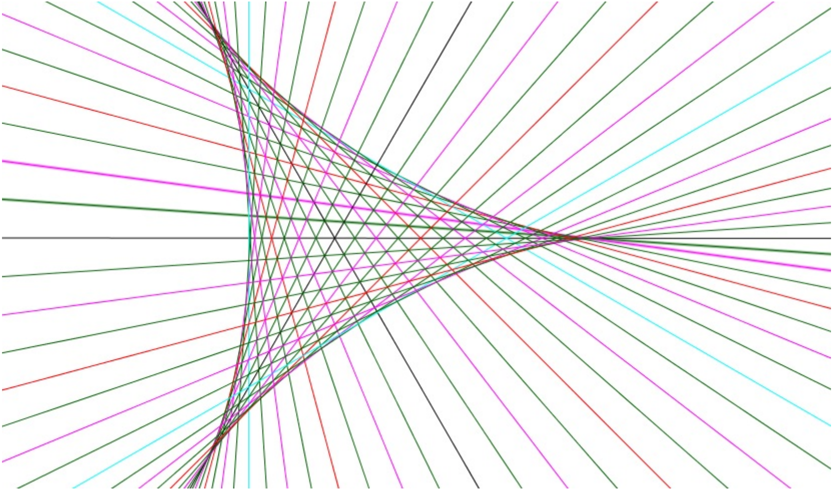
*Za wyjątkiem* $n = 4, 5, 6$*, konfiguracje Böröczky'ego* $n$ *prostych nie są konfiguracjami wolnymi.*

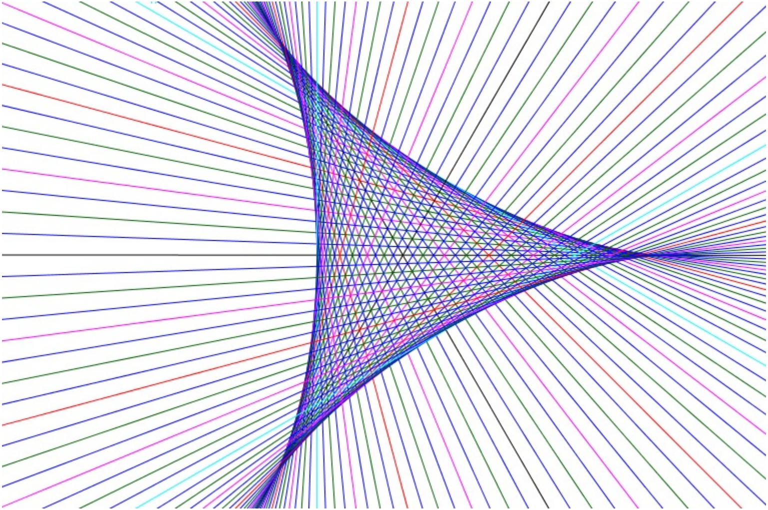












Dziękuję za uwagę !!