MATERIAŁY XIV KONFERENCJI SZKOLENIOWEJ Z TEORII ZAGADNIEŃ EKSTREMALNYCH

1993 **Łódź** **str. 31**

TWIERDZENIE MOHA

T. Krasiński (Łódź)

1. Wstęp

Niech $f \in \mathbb{C}[X,Y]$, $f \neq$ const. Oznaczmy przez $C := V(f)$ zbiór zer f w $\mathbb{C}^2$ i przez $\bar{C}$ jego domknięcie w przestrzeni rzutowej zespolonej dwuwymiarowej $\mathbb{P}^2$. Niech H_∞ będzie prostą w nieskończoności przestrzeni $\mathbb{P}^2$. Zbiór $\bar{C} \cap H_\infty$ jest skończony i niepusty. Jego elementy nazywamy *punktami f w nieskończoności*. Zbiór $\bar{C}$ jest podzbiorem algebraicznym (a więc i analitycznym) przestrzeni $\mathbb{P}^2$ równym zbiorowi zer w $\mathbb{P}^2$ ujednorodnienia $f^\star(X,Y,Z) := Z^n f(X/Z, Y/Z)$, $n = \deg f$, wielomianu f. Nierozkładalne kiełki analityczne zbioru $\bar{C}$ w punktach f w nieskończoności nazywamy *gałęziami f w nieskończoności* i ich ilość oznaczamy przez $r(f)$. Analitycznie gałęzie te wyznaczamy w następujący sposób: niech P będzie punktem f w nieskończoności i niech U będzie taką kanoniczną częścią afiniczną $\mathbb{P}^2$, że $P \in U$. Wielomian $f^\star$ wyznacza w sposób kanoniczny funkcję holomorficzną f_U w U. Niech $(f_U)_P = \xi_1^{l_1} \cdots \xi_m^{l_m}$ będzie rozkładem kiełka $(f_U)_P$ na nieprzywiedlne i niestowarzyszone czynniki w pierścieniu kiełków funkcji holomorficznych $\mathcal{O}_P$ w punkcie P. Wówczas kiełki $V(\xi_1), \dots, V(\xi_m)$ są gałęziami f w nieskończoności w punkcie P. Dodatkowo liczby $l_1, \dots, l_m$ nazywamy *krotnościami* tych gałęzi. Można pokazać ([K1], Stw. 6.1), że krotności wszystkich gałęzi f w nieskończoności są równe 1 wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian f jest *zredukowany* w $\mathbb{C}[X,Y]$, tzn. nie jest podzielny przez kwadrat żadnego wielomianu stopnia dodatniego.

Rozważmy teraz pęk wielomianów $f_\lambda := f - \lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Poza skończoną ilością wartości parametru λ liczba gałęzi $r(f_\lambda)$ jest funkcją stałą od λ ([K1] Tw. 10.2, [K2] Tw. 1). W punktach λ, w których $r(f_\lambda)$ ma wartość różną od "generycznie stałej", funkcja $r(f_\lambda)$ nie ma żadnej własności półciągłości. Pokazują to następujące przykłady:

Przykład 1. Niech $f(X,Y) := XY^2 + Y$. Dla każdego $\lambda \in \mathbb{C}$, punktami f_λ w nieskończoności, we współrzędnych jednorodnych $(x : y : z)$ przestrzeni $\mathbb{P}^2$ są punkty $P_1 = (1 : 0 : 0)$ i $P_2 = (0 : 1 : 0)$. Ponieważ $f^\star_\lambda(X,Y,Z) = XY^2+YZ^2-\lambda Z^3$, więc należy zbadać rozkład kiełków $(y^2+yz^2-\lambda z^3)_{(0,0)}$ i $(x+z^2-\lambda z^3)_{(0,0)}$ na czynniki nieprzywiedlne w $\mathcal{O}_{(0,0)}$ w zależności od parametru λ. Ponieważ rozważane kiełki są kiełkami wielomianów wyróżnionych Weierstrassa, a rozkładalność tych ostatnich jest równoważna ich rozkładowi na kiełki również wielomianów wyróżnionych Weierstrassa, więc łatwo wykazujemy, że pierwszy kiełek rozkłada się na dwa czynniki nieprzywiedlne dla $\lambda = 0$ i jest nieprzywiedlny dla $\lambda \neq 0$, zaś drugi kiełek jest nieprzywiedlny dla każdego $\lambda \in \mathbb{C}$. Stąd

$$r(f_\lambda) = \begin{cases} 2 & \text{dla } \lambda \neq 0 \\ 3 & \text{dla } \lambda = 0. \end{cases}$$

Przykład 2. Niech $f(X,Y) := Y - (XY-1)^2$. Punktami f w nieskończoności są również punkty $P_1 = (1 : 0 : 0)$ i $P_2 = (0 : 1 : 0)$. Po ujednorodnieniu f_λ otrzymamy, że należy zbadać rozkład kiełków $(yz^3 - (y - z^2)^2 - \lambda z^4)_{(0,0)}$ i $(z^3 - (x - z^2)^2 - \lambda z^4)_{(0,0)}$ na czynniki nieprzywiedlne w $\mathcal{O}_{(0,0)}$ w zależności od parametru λ. Stosując metodę z Przykładu 1, nietrudno wykazujemy, że

$$r(f_\lambda) = \begin{cases} 3 & \text{dla } \lambda \neq 0 \\ 2 & \text{dla } \lambda = 0. \end{cases}$$

Zatem zaskakującym jest fakt, że funkcja $r(f_\lambda)$ jest stała, gdy $r(f_{\lambda_0}) = 1$ dla przynajmniej jednej wartości λ_0, tzn. zachodzi

Twierdzenie Moha ([M]). . *Jeśli $f \in \mathbb{C}[X,Y]$, $f \neq \mathrm{const.}$, f jest zredukowany w $\mathbb{C}[X,Y]$ i $r(f) = 1$, to $r(f_\lambda) = 1$ dla każdego $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Celem artykułu jest przedstawienie dowodu twierdzenia Moha według idei dowodu Abhyankara [A], Cor. 11.16, w oparciu o własności pierwiastków aproksymatywnych, podanych w artykule A. Płoskiego [P2].

Warto również zauważyć, że twierdzenie Moha nie jest prawdziwe, gdy parametr λ w pęku f_λ nie jest wyrazem wolnym, gdyż dla

$$f_\lambda(X,Y) := Y^2 + Y + \lambda X,$$

$$r(f_\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{dla } \lambda \neq 0 \\ 2 & \text{dla } \lambda = 0. \end{cases}$$

2. Lematy pomocnicze

Niech $\mathbb{C}\{x\}$ oznacza pierścień szeregów zbieżnych jednej zmiennej. Niech $f \in (\mathbb{C}\{x\})[Y]$ będzie wielomianem o współczynnikach w pierścieniu $\mathbb{C}\{x\}$ nierozkładalnym, monicznym, wyróżnionym rzędu $n \geq 1$, tzn.

$$(1)\quad f(x,Y) = Y^n + a_1(x)Y^{n-1} + \cdots + a_n(x),$$
$$a_i \in \mathbb{C}\{x\}, \quad \operatorname{ord} a_i \geq i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Założenie o nierozkładalności implikuje, na mocy twierdzenia Newtona–Puiseux, że istnieje szereg $\varphi \in \mathbb{C}\{t\}$, $\varphi(t) = c_1 t^{n_1} + c_2 t^{n_2} + \cdots$, $n \leq n_1 < n_2 < \cdots$, $c_i \neq 0$, $NWP(n, n_1, n_2, \dots) = 1$ taki, że

$$f(t^n, Y) = \prod_{\varepsilon^n = 1} (Y - \varphi(\varepsilon t)).$$

Niech $b_0, \dots, b_h$ będzie charakterystyką szeregu $f(x,y)$. Przyjmijmy $B_i := NWP(b_0, \dots, b_i)$, $i = 0, \dots, h$ (zob. [P2]). Ciągi $(b_0, \dots, b_h)$, $(B_0, \dots, B_h)$ nazywamy również ciągami charakterystycznymi f. Zauważmy, że ciąg $(b_0, \dots, b_h)$ jest podciągiem skończonym ciągu $(n, n_1, n_2, \dots)$ oraz że $b_0 = B_0 > \cdots > B_h = 1$.

Można pokazać, że prawdziwy jest następujący wzór (zob. dowód Tw. 5.2 w [P1]).

Lemat 1. $\operatorname{ord} \prod_{\substack{\varepsilon^n = 1\\ \varepsilon \neq 1}} (\varphi(t) - \varphi(\varepsilon t)) = \sum_{i=1}^h b_i(B_{i-1} - B_i)$.

Lemat 2. *Jeśli $f \in \mathbb{C}[X,Y]$, $f \neq \mathrm{const.}$, jest zredukowany w $\mathbb{C}[X,Y]$ i ma jedną gałąź w nieskończoności, to dla dowolnego $g \in \mathbb{C}[X,Y]$ mamy $g|V(f) = \mathrm{const.}$ lub $V(f) \cap V(g) \neq \emptyset$.*

Dowód. Z założeń wynika, że f jest nieprzywiedlny w $\mathbb{C}[X,Y]$. Istotnie, gdyby f był przywiedlny, to $f = f_1 f_2$, $\deg f_1 > 0$ i $\deg f_2 > 0$. Ponieważ f jest zredukowany w $\mathbb{C}[X,Y]$, więc f_1 i f_2 byłyby względnie pierwsze w $\mathbb{C}[X,Y]$. Zatem na mocy znanego twierdzenia (zob. np. [F], Prop. 2, Ch. 1), zbiór $V(f_1) \cap V(f_2)$ byłby skończony. Z drugiej strony, ponieważ f ma jedną gałąź w nieskończoności, więc f_1 i f_2 miałyby wspólną gałąź w nieskończoności. Stąd zbiór $V(f_1) \cap V(f_2)$ byłby nieskończony, co sprzeczne z powyższym. Zatem f jest nieprzywiedlny w $\mathbb{C}[X,Y]$. Stąd zbiór algebraiczny $V(f)$ jest również nieprzywiedlny.

Weźmy teraz dowolne $g \in \mathbb{C}[X,Y]$. Załóżmy, że $g|V(f) \neq \mathrm{const.}$ Z nieprzywiedlności $V(f)$ wynika, na mocy wspomnianego wyżej twierdzenia, że $g|V(f)$ nie jest stałe w żadnym otoczeniu każdego punktu $P \in V(f)$.

Pokażemy teraz, że $g|V(f)$ jest odwzorowaniem otwartym i domkniętym:

1. otwartość $g|V(f)$. Dla dowolnego $P \in V(f)$ istnieją lokalne holomorficzne parametryzacje kiełków nieprzywiedlnych zbioru $V(f)$ w punkcie P ([Ł], Tw. Puiseux, II.6.2).Złożenia tych paramteryzacji z g są funkcjami holomorficznymi i niestałymi, a więc odwzorowaniami otwartymi. Stąd łatwo wynika otwartość $g|V(f)$.

2. domkniętość $g|V(f)$. Wystarczy pokazać, że $g|V(f)$ jest odwzorowaniem właściwym, gdyż każde odwzorowanie właściwe jest domknięte. Weźmy

holomorficzną parametryzację $\Phi : \{t \in \mathbb{C} : |t| > R\} \to U$ jedynej gałęzi f w nieskończoności w otoczeniu nieskończoności U w $\mathbb{C}^2$ (zob. [CK]). Wówczas złożenie $g \circ \Phi$ jest niestałym szeregiem Laurenta o środku w $\infty \in \bar{C}$ postaci $g \circ \Phi(t) = c_p t^p + c_{p-1} t^{p-1} + \ldots$, $a_p \neq 0$, $p \in \mathbb{Z}$. Ponieważ $V(f)$ jest zbiorem algebraicznym nieprzywiedlnym, więc na $V(f)$ obowiązuje zasada Liouville'a ([C], §13, Tw. 2), tzn. każda funkcja holomorficzna i ograniczona jest stała. Zatem dla złożenia $g \circ \Phi$ mamy $p > 0$. Stąd nietrudno dostajemy, że $g|V(f)$ jest właściwe.

Ponieważ $g|V(f)$ jest otwarte i domknięte, więc $g|V(f)) = \mathbb{C}$. Stąd $V(f) \cap V(g) \neq \emptyset$.

Wniosek. *Przy założeniach Lematu 2, jeśli dodatkowo* $g \neq \mathrm{const.}$ *i* $\deg g < \deg f$, *to* $V(f) \cap V(g) \neq \emptyset$.

Dowód. Na mocy lematu wystarczy pokazać, że $g|V(f) \neq \mathrm{const.}$ Przypuśćmy, że jest przeciwnie, tzn. $g|V(f) = c$, $c \in \mathbb{C}$. Wtedy $g - c$ zeruje się na $V(f)$. Na mocy twierdzenia Hilberta o zerach, $g - c$ należy do radykału $\mathrm{Rad}((f))$ ideału $(f) \subset \mathbb{C}[X, Y]$. Ponieważ f jest zredukowany, więc $\mathrm{Rad}((f)) = (f)$. Stąd $g - c \in (f)$, a to oznacza, że f dzieli $g - c$ w $\mathbb{C}[X, Y]$, co niemożliwe na mocy założenia, że $\deg g < \deg f$.

3. Kryterium nierozkładalności

Niech $f \in (\mathbb{C}\{x\})[Y]$ będzie nierozkładalny i ma postać (1). Niech $f(t^n, Y) = \prod_{\varepsilon^n=1}(Y - \varphi(\varepsilon t))$, $\varphi \in \mathbb{C}\{t\}$, oraz $(b_0, \ldots, b_h)$, $(B_0, \ldots, B_h)$ będą ciągami charakterystycznymi f.

Twierdzenie (kryterium nierozkładalności, [A], Th. 12.4). *Niech* $g \in (\mathbb{C}\{x\})[Y]$ *będzie wielomianem monicznym, wyróżnionym rzędu* n *(tzn. ma postać analogiczną do (1)). Jeśli*

$$\operatorname{ord} g(t^n, \varphi(t)) > \sum_{i=1}^{h} b_i (B_{i-1} - B_i) + b_h, \tag{2}$$

to g *jest nierozkładalny.*

Dowód. Oznaczmy prawą stronę nierówności (2) przez B. Z twierdzenia Newtona–Puiseux wynika, że istnieje $N > 0$ oraz szeregi $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{C}\{t\}$ takie, że $g(t^N, Y) = \prod_{i=1}^{n}(Y - \beta_i(t))$. Zwiększając N możemy założyć, że $N = nk$, $k \in \mathbb{N}$. Wtedy

$$\begin{aligned}\operatorname{ord} \prod_{i=1}^{n} (\varphi(t^k) - \beta_i(t)) = \operatorname{ord} g(t^N, \varphi(t^k)) &= \operatorname{ord} g((t^k)^n, \varphi(t^k)) \\ &= k \operatorname{ord} g(t^n, \varphi(t)) > kB.\end{aligned}$$

Ponieważ $\operatorname{ord} g(t^n, \varphi(t)) = \operatorname{ord} g(t^n, \varphi(\varepsilon t))$ dla każdego ε, $\varepsilon^n = 1$, więc otrzymujemy

$$\operatorname{ord} \prod_{i=1}^{n} (\varphi(\varepsilon t^k) - \beta_i(t)) > kB \quad \text{dla każdego } \varepsilon,\ \varepsilon^n = 1.$$

Dodając te nierówności stronami otrzymamy kolejno

$$\operatorname{ord}\big(\prod_{i=1}^{n}\prod_{\varepsilon^n=1}(\varphi(\varepsilon t^k)-\beta_i(t)\big)>nkB,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\operatorname{ord}\big(\prod_{\varepsilon^n=1}(\beta_i(t)-\varphi(\varepsilon t^k)\big)>nkB.$$

Zatem istnieje $i_0\in\{1,\dots,n\}$, że

$$\operatorname{ord}\big(\prod_{\varepsilon^n=1}(\beta_{i_0}(t)-\varphi(\varepsilon t^k)\big)>kB. \tag{3}$$

Twierdzimy, że wówczas istnieje ε_0, $\varepsilon_0^n=1$ takie, że

$$\operatorname{ord}(\beta_{i_0}(t)-\varphi(\varepsilon_0 t^k))>kb_h. \tag{4}$$

Rzeczywiście, gdyby było przeciwnie, to przyjmując $s=\max_\varepsilon \operatorname{ord}(\beta_{i_0}(t)-\varphi(\varepsilon t^k))$ mielibyśmy $s\le kb_h$. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że $s=\operatorname{ord}(\beta_{i_0}(t)-\varphi(t^k))$. Stąd mielibyśmy dla dowolnego ε, $\varepsilon^n=1$, $\varepsilon\neq 1$

$$\begin{aligned}\operatorname{ord}(\varphi(t^k)-\varphi(\varepsilon t^k))&=\operatorname{ord}(\varphi(t^k)-\beta_{i_0}(t)+\beta_{i_0}(t)-\varphi(\varepsilon t^k))\\ &\ge\min(\operatorname{ord}(\varphi(t^k)-(\beta_{i_0}(t)),\operatorname{ord}(\beta_{i_0}(t)-\varphi(\varepsilon t^k))=\operatorname{ord}(\beta_{i_0}(t)-\varphi(\varepsilon t^k))\end{aligned}$$

Stąd i z Lematu 1

$$\begin{aligned}\operatorname{ord}\prod_{\varepsilon^n=1}(\beta_{i_0}(t)-\varphi(\varepsilon t^k))&=\operatorname{ord}(\beta_{i_0}(t)-\varphi(t^k))+\operatorname{ord}\prod_{\substack{\varepsilon^n=1\\ \varepsilon\neq1}}(\beta_{i_0}(t)-\varphi(\varepsilon t^k))\\ &=s+\sum_{\substack{\varepsilon^n=1\\ \varepsilon\neq1}}\operatorname{ord}(\beta_{i_0}(t)-\varphi(\varepsilon t^k))\le kb_h+\sum_{\substack{\varepsilon^n=1\\ \varepsilon\neq1}}\operatorname{ord}(\varphi(t^k)-\varphi(\varepsilon t^k))\\ &=kb_h+\operatorname{ord}\prod_{\substack{\varepsilon^n=1\\ \varepsilon\neq1}}\operatorname{ord}(\varphi(t^k)-\varphi(\varepsilon t^k))=k(b_h+\operatorname{ord}\prod_{\substack{\varepsilon^n=1\\ \varepsilon\neq1}}\operatorname{ord}(\varphi(t)-\varphi(\varepsilon t)))\\ &=k(b_h+\sum_{i=1}^{h}b_i(B_{i-1}-B_i))=kB,\end{aligned}$$

co sprzeczne z (3). Zatem istnieje ε_0, $\varepsilon_0^n=1$ takie, że zachodzi (4). Ponieważ od początku rozważań możemy zastąpić szereg $\varphi(t)$ przez $\varphi(\varepsilon_0 t)$, więc będziemy w dalszym ciągu zakładać, że $\varepsilon_0=1$.

Rozłóżmy teraz g w $(\mathbb{C}\{x\}[Y]$ na czynniki nierozkładalne wyróżnione i moniczne, $g=g_1\cdots g_p$. Wówczas szereg β_{i_0} występuje w rozkładzie Newtona–Puiseux jednego z tych czynników. Dokładniej, istnieje $j_0\in\{1,\dots,p\}$ takie, że w rozkładzie Newtona–Puiseux $g_{j_0}(t^q,Y)=\prod_{\eta^q=1}(Y-\gamma(\eta t))$, $\gamma\in\mathbb{C}\{t\}$, czynnika $g_{j_0}(x,Y):=Y^q+\tilde a_1(x)Y^{q-1}+\cdots+\tilde a_q(x)$, $1\le q\le n$, $\operatorname{ord}\tilde a_i\ge i$, mamy $\beta_{j_0}(t)=\gamma(\eta_o t^r)$, gdzie $qr=N$ i η_0 jest pewnym pierwiastkiem q-tego stopnia z 1. Podobnie jak powyżej, zastępując w rozkładzie g_{j_0} szereg $\gamma(t)$ przez

$\gamma(\eta_0 t)$, możemy założyć, że $\eta_0 = 1$. Zatem z (4) uwzględniając, że $\varepsilon_0 = 1$, mamy

$$\operatorname{ord}(\gamma(t^r) - \varphi(t^k)) > kb_h.$$

Stąd, przyjmując że $\varphi(t) := c_{n_1}t^{n_1} + c_{n_2}t^{n_2} + \cdots$ i $\gamma(t) := d_{q_1}t^{q_1} + d_{q_2}t^{q_2} + \cdots$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} c_{n_1} &= d_{q_1}, \ldots, c_{b_h} = d_{b_h}, \\ kn_1 &= rq_1, \ldots, kb_h = rb_h. \end{aligned}$$

Ponieważ $NWP(n, n_1, \ldots, b_h) = 1$, więc $k = NWP(kn, kn_1, \ldots, kb_h) = NWP(rq, rq_1, \ldots, rb_h) = r\,NWP(q, q_1, \ldots, b_h)$. Stąd $r|k$. Ponieważ $rq = kn$, więc $q = vn$, $v \in \mathbb{N}$. Jak zauważyliśmy poprzednio, $q \leq n$. Zatem $q = n$. Oznacza to, że stopień czynnika g_{j_0} ze względu na Y jest równy n. Zatem $g = g_{j_0}$, czyli g jest elementem nierozkładalnym.

4. Dowód twierdzenia Moha

Niech będą spełnione założenia twierdzenia Moha. Ponieważ f ma jedną gałąź w nieskończoności, więc ma tylko jeden punkt w nieskończoności. Stosując liniową zmianę współrzędnych w $\mathbb{C}^2$ będziemy zakładać, że we współrzędnych jednorodnych $(x : y : z)$ przestrzeni $\mathbb{P}^2$ jest to punkt $P = (1 : 0 : 0)$. Nie zmienia to ilości gałęzi wielomianu w nieskończoności, gdyż każde nieosobliwe przekształcenie liniowe $L(x, y) = (L_1(x, y), L_2(x, y))$ przestrzeni $\mathbb{C}^2$ przedłuża się do biholomorfizmu $L^\star((x : y : z)) := (L_1^\star(x : y : z) : (L_2^\star(x : y : z) : z)$ przestrzeni $\mathbb{P}^2$ przekształcającego prostą w nieskończoności H_∞ na siebie. Ponadto będziemy zakładać, że $n := \deg f > 1$, gdyż dla $n = 1$ teza jest oczywista. Zatem f ma postać

$$f(X, Y) = Y^n + a_1(X)Y^{n-1} + \cdots + a_n(X), \qquad n > 1, \quad a_i \in \mathbb{C}[X], \quad \deg a_i < i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

Wynika stąd, że każdy element pęku $f_\lambda = f - \lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}$ ma również dokładnie jeden punkt w nieskończoności i to równy P. Ujednorodnienie f_λ ma postać $f_\lambda^\star(X, Y, Z) = Y^n + Za_1(X/Z)Y^{n-1} + \cdots + Z^n a_n(X/Z) - \lambda Z^n$. Zatem w mapie części afinicznej $U = \{(x : y : z) \in \mathbb{P}^2 : x \neq 0\}$, $f_\lambda^\star$ wyznacza pęk wielomianów

$$g_\lambda(Z, Y) := f_\lambda^\star(1, Y, Z) = Y^n + Za_1(1/Z)Y^{n-1} + \cdots + Z^n a_n(1/Z) - \lambda Z^n.$$

Założenie, że f ma jedną gałąź w nieskończoności oznacza, że kiełek $(g_0)_{(0,0)} \in \mathcal{O}_{(0,0)}$ jest nierozkładalny. Z postaci f wynika, że $(g_0)_{(0,0)}$ jest kiełkiem wyróżnionym względem zmiennej y w $\mathcal{O}_{(0,0)}$. Zatem na mocy znanej własności kiełków wyróżnionych ([Ł], I, §2, 2b), g_0 rozważany jako element $(\mathbb{C}\{z\})[Y]$ jest w tym pierścieniu nierozkładalny. Analogicznie, nierozkładalność g_λ w pierścieniu $(\mathbb{C}\{z\})[Y]$ jest równoważna temu, że f_λ ma jedną gałąź w nieskończoności. Zatem wystarczy pokazać, że $g_\lambda \in (\mathbb{C}\{z\})[Y]$ są nierozkładalne dla każdego $\lambda \neq 0$.

Z twierdzenia Newtona–Puiseux wynika, że istnieje szereg $\varphi \in \mathbb{C}\{t\}$ taki, że $g_0(t^n, Y) = \prod_{\varepsilon^n = 1}(Y - \varphi(\varepsilon t))$ w $(\mathbb{C}\{t\})[Y]$. Zatem $g_0(t^n, \varphi(t)) \equiv 0$ i dla $\lambda \neq 0$ mamy

$$\operatorname{ord} g_\lambda(t^n, \varphi(t)) = \operatorname{ord}(g_0(t^n, \varphi(t)) - \lambda t^{n^2}) = \operatorname{ord}(-\lambda t^{n^2}) = n^2. \tag{5}$$

Niech $(b_0, \dots, b_h)$ i $(B_0, \dots, B_h)$ będą ciągami charakterystycznymi g_0. Ponieważ $n > 1$, więc $h > 0$ (gdyż w przeciwnym przypadku byłoby $n = b_0 = B_0 = B_h = 1$). Zatem $B_{h-1} > 1$.

Rozważmy pierwiastek aproksymatywny $\sqrt[B_{h-1}]{g_0}$ wielomianu g_0 rozważanego jako element $(\mathbb{C}[Z])[Y]$ (zob. [P2]). Jest to wielomian moniczny w $(\mathbb{C}[Z])[Y]$ stopnia n/B_{h-1} względem zmiennych Z, Y ([P2], Wniosek 1.3). Po przejściu do wyjściowej części afinicznej (zmiennych X, Y) przestrzeni $\mathbb{P}^2$ otrzymamy z wielomianu $\sqrt[B_{h-1}]{g_0}$ wielomian

$$h(X,Y) := X^{n/B_{h-1}} \sqrt[B_{h-1}]{g_0}(1/X,\, Y/X)$$

stopnia n/B_{h-1}. Ponieważ $B_{h-1} > 1$, więc $\deg h = n/B_{h-1} < n = \deg f$. Zatem na mocy Wniosku z Lematu 2 wielomiany h i f mają przynajmniej jedno wspólne zero w $\mathbb{C}^2$. Stąd, na mocy twierdzenia Bezouta dla krotności $(g_0, \sqrt[B_{h-1}]{g_0})_P$ w punkcie P mamy ostrą nierówność

$$(g_0,\ \sqrt[B_{h-1}]{g_0})_P < \deg g_0 \deg \sqrt[B_{h-1}]{g_0} = n^2/B_{h-1}. \tag{6}$$

Z drugiej strony, na mocy podstawowego twierdzenia o pierwiastkach aproksymatywnych ([P2])

$$(g_0,\ \sqrt[B_{h-1}]{g_0})_P = \frac{1}{B_{h-1}} \sum_{i=1}^{h-1} b_i(B_{i-1} - B_i) + b_h.$$

Stąd i z (6) po łatwych przekształceniach otrzymujemy

$$n^2 > \sum_{i=1}^{h} b_i(B_{i-1} - B_i) + b_h.$$

Zatem z równości (5) mamy dla każdego $\lambda \neq 0$

$$\operatorname{ord} g_\lambda(t^n, \varphi(t)) > \sum_{i=1}^{h} b_i(B_{i-1} - B_i) + b_h.$$

Na mocy kryterium nierozkładalności g_λ są nierozkładalne w $(\mathbb{C}\{z\})[Y]$, co mieliśmy pokazać.

SPIS LITERATURY

[A] S.S. Abhyankar, *Expansion Techniques in Algebraic Geometry*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1977.

[C] J. Chądzyński, *O stabilności odwzorowań holomorficznych*, Acta Universitatis Lodziensis, Wyd. UŁ, Łódź, 1983.

[CK] J. Chądzyński, T. Krasiński, in: *Singularities*, Banach Center Publ. **20**, PWN, Warszawa, 1988, pp. 147–160.

[F] W. Fulton, *Algebraic Curves. An Introduction to Algebraic Geometry*, Addison—Wesley, 1989.

[K1] T. Krasiński, *Poziomice wielomianów dwóch zmiennych a hipoteza jakobianowa*, Acta Universitatis Lodziensis, Wyd. UŁ, Łódź, 1991.

[K2] T. Krasiński, *On branches at infinity of a pencil of polynomials in two complex variables*, Ann. Pol. Math. **55** (1991), 213–220.

[Ł] S. Łojasiewicz, *Wstęp do geometrii analitycznej zespolonej*, PWN, Warszawa, 1988.

[M] T.T. Moh, *On analytic irreducibility at* ∞ *of a pencil of curves*, Proc. Amer. Math. Soc. **44** (1974), 22–24.

[P_1] A. Płoski, *O niezmiennikach osobliwości krzywych analitycznych*, Mat. VII Konf. Szkol. z Teorii Zagadnień Ekstremalnych, Wyd. UŁ, Łódź 1985, 80–93.

[P_2] A. Płoski, *Pierwiastki aproksymatywne wielomianów według S.S. Abhyankara i T.T. Moha*, (w tym tomie).

Moh Theorem

Summary. Let $f \in \mathbb{C}[X,Y]$, $f \neq \text{const.}$. In the paper a proof (after S.S. Abhyankar) of the following Moh theorem is given: if f is reduced and has one branch at infinity, then each element of the pencil $f - \lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}$, has also one branch at infinity.

Bronisławów, 11–15 stycznia, 1993 r.