MATERIAŁY XVI KONFERENCJI SZKOLENIOWEJ
Z ANALIZY I GEOMETRII ZESPOLONEJ

1995 Łódź str. 21

ROZDMUCHANIA A PUNKTY BIFURKACYJNE I. TWIERDZENIE ZARISKIEGO O EQUISINGULARNOŚCI

T. Krasiński (Łódź)

Wstęp

W marcu 1993 roku ukazał się preprint Lê Dung Tranga i Claude'a Webera [LW], w którym podany był dowód hipotezy jakobianowej Kellera. Później autorzy przyznali, że w dowodzie tym jest pewna luka, której do tej pory nie udało im się usunąć. Jednak w cytowanej pracy podana jest interesująca charakteryzacja punktów bifurkacyjnych wielomianu $f(x, y)$ dwóch zmiennych tzn. tych wartości f w otoczeniu których f nie jest trywialną wiązką klasy C^∞ (zob. [K_1], [K_2]). Mianowicie, jeśli $f^*(x, y, z)$ jest ujednorodnieniem f, odwzorowanie $\pi : M \to \mathbb{P}^2$ – wielokrotnym rozdmuchaniem $\mathbb{P}^2$ nad punktami f w nieskończoności takim, że dla funkcji wymiernej $f^*/z^{\deg f} : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^1 \cong \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ złożenie $F := (f^*/z^{\deg f}) \circ \pi$ jest regularne na M oraz E – dywizorem wyjątkowym π, to punktami bifurkacyjnymi f są:

1. wartości krytyczne f,

2. wartości krytyczne, różne od ∞, odwzorowań $F|E_i$, gdzie E_i są składowymi E (w szczególności takie wartości α, że $F \mid E_i \equiv \alpha$).

Celem tej pracy, składającej się z dwóch części, jest podanie pełnego, analitycznego dowodu tego twierdzenia.

Kluczowym faktem, potrzebnym w dowodzie, jest twierdzenie Zariskiego o equisingularności dla krzywych. Oryginalny dowód Zariskiego w [Z] jest algebraiczny. Opierając się na pewnych własnościach standardowego rozwiązania osobliwości krzywych, opisanych dokładnie i elementarnie w [BK], Ch.8.4, str.455-535, podajemy w §7 analityczny dowód tego twierdzenia w I części pracy. Twierdzenie to poprzedzamy podstawowymi własnościami rozdmuchań (§§1-6)(inne podejście do teorii rozdmuchań można znaleźć w [P_1], [$Ł_1$]).

Druga część pracy będzie poświęcona punktom bifurkacyjnym i wspomnianej powyżej charakteryzacji tych punktów.

Na zakończenie chciałbym serdecznie podziękować drowi Stanisławowi Spodziei za cenne uwagi i wskazówki oraz drowi Andrzejowi Miodkowi za wykonanie rysunków.

0. Wiadomości wstępne

Najpierw ustalimy definicje pojęć, najczęściej występujących w pracy. Wszystkie pozostałe definicje i własności przyjmowane są według monografii S. Łojasiewicza [$Ł_2$].

Jeśli $f \neq 0$ jest funkcją holomorficzną w otoczeniu punktu $a \in \mathbb{C}^n$, $f(z) = \sum_{m=\nu}^{\infty} f_n(z-a)$ jest jej rozwinięciem w szereg wielomianów jednorodnych i $f_\nu \neq 0$, to ν nazywamy rzędem f w a i oznaczamy $\operatorname{ord}_a f$. Gdy $a = 0$, to piszemy $\operatorname{ord} f$. Kiełek funkcji f w a oznaczamy przez $\widehat{f}$.

W dalszym ciągu przez słowo rozmaitość będziemy rozumieli rozmaitość zespoloną dwuwymiarową. Niech M będzie rozmaitością. Krzywą w M nazywamy dowolny podzbiór analityczny M stałego wymiaru 1. Jeśli $V \subset M$ jest krzywą i $a \in V$, to krotnością V w a nazywamy rząd w a funkcji f opisującej kiełek V w a tzn. funkcji f holomorficznej w otoczeniu a takiej, że dla kiełka $\mathbf{V}$ krzywej V w a mamy $\mathbf{V} = V(\widehat{f})$ oraz $\widehat{f}$ nie ma czynników wielokrotnych w $\mathcal{O}_a(M)$). Wówczas ideał $\mathcal{I}(\mathbf{V}) \subset \mathcal{O}_a(M)$ kiełków funkcji holomorficznych zerujących się na $\mathbf{V}$ jest równy ideałowi $(\widehat{f})$. Krotność V w a oznaczamy przez $m_a(V)$.

Jeśli f jest funkcją opisującą kiełek krzywej $\mathbf{V}$ o środku w $0 \in \mathbb{C}^2$, to krotność $\mu_0(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$ odwzorowania $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$ w punkcie 0 nazywamy liczbą Milnora $\mathbf{V}$ i oznaczamy $\mu(\mathbf{V})$ lub $\mu(f)$ ([P_1], [P_3]).

Mówimy, że krzywe V_1 i V_2 w M przecinają się transwersalnie w punkcie $a \in M$, gdy $a \notin V_1 \cap V_2$ lub $a \in V_1 \cap V_2$, a jest regularnym punktem V_1 i V_2 oraz V_1 i V_2 nie mają w a wspólnej stycznej. Krzywe te przecinają się transwersalnie w M, gdy przecinają się transwersalnie w każdym punkcie M.

Dla dowolnego odwzorowania $F : X \times Y \to Z$, gdzie X, Y, Z są dowolnymi zbiorami, oraz $x_0 \in X$ przez F^{x_0} oznaczamy odwzorowanie $Y \ni y \mapsto F(x_0, y) \in Z$.

1. Kanoniczne rozdmuchanie

Przestrzeń rzutową jednowymiarową będziemy oznaczać przez $\mathbb{P}$ i utożsamiać ze zbiorem prostych $l \subset \mathbb{C}^2$ takich, że $0 \in l$.

Rozważmy zbiór $B := \{(z, l) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P} : z \in l\}$ i rzutowanie $\pi : B \to \mathbb{C}^2$, $\pi(z, l) := z$. Łatwo sprawdzamy następujące własności B i π:

(1.1) B jest podrozmaitością zespoloną $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}$,
(1.2) $\pi^{-1}(0) = \{0\} \times \mathbb{P}$ jest podrozmaitością zespoloną B,
(1.3) π jest odwzorowaniem holomorficznym właściwym,
(1.4) $\pi\,|_{B \setminus \pi^{-1}(0)}: B \setminus \pi^{-1}(0) \to \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ jest biholomorfizmem.

Powyższe odwzorowanie π nazywamy rozdmuchaniem kanonicznym w punkcie $0 \in \mathbb{C}^2$ (inne spotykane w literaturze nazwy, to σ-proces, przekształcenie monoidalne, przekształcenie kwadratowe), zaś zbiór $E := \pi^{-1}(0)$ dywizorem wyjątkowym rozdmuchania π.

Określimy teraz mapy na B, w których rzutowanie π ma szczególnie prostą postać. Definiujemy dwa zbiory otwarte B_0, B_1 w B, $B_0 \cup B_1 = B$

$$B_i := \{((x, y), (l_0 : l_1)) \in B : \ l_i \neq 0\}, \quad i = 0, 1$$

i biholomorfizmy $\psi_i : \ B_i \to \mathbb{C}^2$, $i = 0, 1$

$$\psi_0((x, y), (l_0 : l_1)) := (l_1/l_0, x),$$
$$\psi_1((x, y), (l_0 : l_1)) := (l_0/l_1, y).$$

Oznaczmy przez (u_i, v_i) współrzędne w przeciwdziedzinie $\mathbb{C}^2$ mapy ψ_i. Wówczas odwzorowania odwrotne ψ_i^{-1} zadane są wzorami

$$\psi_0^{-1}(u_0, v_0) = ((v_0, u_0 v_0), (1 : u_0)),$$
$$\psi_1^{-1}(u_1, v_1) = ((u_1 v_1, v_1), (u_1 : 1)),$$

zaś odwzorowania przejścia między mapami $\psi_1 \circ \psi_0^{-1}$ i $\psi_0 \circ \psi_1^{-1}$ wzorami

$$u_1 = 1/u_0, \quad v_1 = u_0 v_0, \quad (u_0, v_0) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{u_0 = 0\}$$
$$u_0 = 1/u_1, \quad v_0 = u_1 v_1, \quad (u_1, v_1) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{u_1 = 0\}$$

W mapach tych obraz dywizora wyjątkowego tzn. $\psi_i(B_i \cap E)$ jest osią $0u_0 = \{(u_0, v_0) : \ v_0 = 0\}$ w mapie ψ_0 i osią $0u_1 = \{(u_1, v_1) : \ v_1 = 0\}$ w mapie ψ_1. Zauważmy ponadto, że w zbiorze B_0 zawiera się cały E z wyjątkiem jednego punktu $\{((0,0),(0:1))\}$ i podobnie w B_1 zawiera się cały E z wyjątkiem jednego punktu $\{((0,0),(1:0))\}$.

Przyjmując $\pi_i := \pi \circ \psi_i^{-1}$, $i = 0, 1$ otrzymujemy, że rzutowanie π w mapach ψ_i ma postać

$$\pi_0(u_0, v_0) = (v_0, u_0 v_0)$$
$$\pi_1(u_1, v_1) = (u_1 v_1, v_1)$$

Z postaci π_i łatwo otrzymujemy następujące własności rozdmuchania π:

(1.5) dla dowolnej prostej $l \subset \mathbb{C}^2$, $0 \in l$, zbiór $\pi^{-1}(l) = E \cup \tilde{l}$, gdzie $\tilde{l}$ jest podrozmaitością w B mającą dokładnie jeden punkt wspólny z E (jest to punkt $(0, l) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}$),

(1.6) podrozmaitości E i $\tilde{l}$ nie mają wspólnej stycznej w punkcie wspólnym,

(1.7) $\pi^{-1}(l \setminus \{0\}) = \tilde{l} \setminus E$,

(1.8) $\overline{\pi^{-1}(l \setminus \{0\})} = \tilde{l}$,

(1.9) dla dowolnych prostych l, l', $l \neq l'$, $0 \in l$, $0 \in l'$ mamy $\tilde{l} \cap \tilde{l}' = \emptyset$.

Uwaga 1.10. Nietrudno zauważyć, że pojęcie rozdmuchania w punkcie uogólnia się na przypadek przestrzeni n-wymiarowej $\mathbb{C}^n$, $n \geq 3$ ([Ł$_1$], [Ł$_2$] Roz.VII, §5).

2. Rozdmuchania rozmaitości

Niech M będzie rozmaitością i $a \in M$. Rozdmuchaniem M w a nazywamy dowolne odwzorowanie holomorficzne $\tilde{\pi} : \tilde{M} \to M$, gdzie $\tilde{M}$ jest rozmaitością, takie, że

1. $\tilde{\pi} |_{\tilde{M} \setminus \tilde{\pi}^{-1}(a)}$: $\quad \tilde{M} \setminus \tilde{\pi}^{-1}(a) \to M \setminus \{a\}$ jest biholomorfizmem,

2. istnieje otoczenie U punktu a i otoczenie Ω punktu $0 \in \mathbb{C}^2$, że odwzorowania $\tilde{\pi} |_{\tilde{\pi}^{-1}(U)}$ i obcięcie rozdmuchania kanonicznego $\pi |_{\pi^{-1}(\Omega)}$ są biholomorficznie równoważne tzn. istnieją biholomorfizmy $\varphi : U \to \Omega$, $\varphi(a) = 0$ i $\tilde{\varphi} : \tilde{\pi}^{-1}(U) \to \pi^{-1}(\Omega)$, że $\pi \circ \tilde{\varphi} = \varphi \circ \tilde{\pi}$.

Wprost z tej definicji wynika, że rozdmuchanie w punkcie jest odwzorowaniem właściwym oraz, że dywizor wyjątkowy rozdmuchania $E := \tilde{\pi}^{-1}(a)$ jest biholomorficzny z $\mathbb{P}$.

Twierdzenie 2.1. ([Ł$_1$], §2). *1. Dla każdej rozmaitości M i dowolnego $a \in M$ istnieje rozdmuchanie M w a.*

2. Jeśli $h : M \to N$ jest biholomorfizmem rozmaitości, $h(a) = b$, $\pi_1 : \tilde{M} \to M$ – rozdmuchaniem M w a, $\pi_2 : \tilde{N} \to N$ – rozdmuchaniem N w b, to istnieje biholomorfizm $\tilde{h} : \tilde{M} \to \tilde{N}$ takie, że $h \circ \pi_1 = \pi_2 \circ \tilde{h}$.

3. Przeciwobraz właściwy krzywej

Niech $\pi : \tilde{M} \to M$ będzie rozdmuchaniem w punkcie $a \in M$ i V krzywą w M. Przeciwobrazem właściwym krzywej V nazywamy zbiór $\tilde{V} := \overline{\pi^{-1}(V \setminus \{a\})}$. Łatwo sprawdzamy, że zachodzą równości

$$\pi^{-1}(V \setminus \{a\}) = \pi^{-1}(V) \setminus E,$$
$$\pi^{-1}(V) = \tilde{V} \cup E, \quad \text{gdy} \quad a \in V.$$

Gdy $a \notin V$, to oczywiście $\tilde{V}$ jest krzywą w $\tilde{M}$ biholomorficzną z V. Zatem będziemy rozważać tylko takie krzywe $V \subset M$, że $a \in V$. Z twierdzenia 2.1 wynika, że wystarczy zbadać ten przypadek dla lokalnego, kanonicznego rozdmuchania w $0 \in \mathbb{C}^2$ tzn. rozdmuchania $\pi_U := \pi \mid_{\pi^{-1}(U)}$, gdzie U jest pewnym otoczeniem $0 \in \mathbb{C}^2$. Niech zatem V będzie krzywą w otoczeniu U punktu $0 \in \mathbb{C}^2$ i $0 \in V$. Zmniejszając U możemy założyć, że $V = V(f)$, gdzie f jest funkcją holomorficzną w U, która posiada w U rozwinięcie w szereg wielomianów jednorodnych

$$f(x,y) = \sum_{i=\nu}^{\infty} f_i(x,y), \quad f_\nu \neq 0, \quad \nu \geq 1.$$

Oznaczając $\tilde{U} := \pi^{-1}(U)$ otrzymamy, że $\pi_U^{-1}(V)$ jest zbiorem analitycznym w $\tilde{U}$ i

$$\begin{aligned}
\pi_0^{-1}(V) &= \{(u_0, v_0) \in \psi_0(B_0 \cap \tilde{U}) : \ f(v_0, u_0 v_0) = 0\} \\
&= \{(u_0, v_0) \in \psi_0(B_0 \cap \tilde{U}) : \ v_0^\nu [f_\nu(1, u_0) + v_0 f_{\nu+1}(1, u_0) + \ldots] = 0\}, \\
\pi_1^{-1}(V) &= \{(u_1, v_1) \in \psi_1(B_1 \cap \tilde{U}) : \ f(u_1 v_1, v_1) = 0\} \\
&= \{(u_1, v_1) \in \psi_1(B_1 \cap \tilde{U}) : \ v_1^\nu [f_\nu(u_1, 1) + v_1 f_{\nu+1}(u_1, 1) + \ldots] = 0\}
\end{aligned}$$

Funkcje holomorficzne w nawiasach kwadratowych oznaczamy odpowiednio przez $\tilde{f}_0$ i $\tilde{f}_1$. Zatem zbiór $\pi_U^{-1}(V \setminus \{0\})$ jest równy w mapie ψ_i

$$\pi_i^{-1}(V \setminus \{0\}) = \{(u_i, v_i) \in \psi_i(B_i \cap \tilde{U}) : \ \tilde{f}_i(u_i, v_i) = 0, \ v_i \neq 0\}.$$

Stąd przeciwobraz właściwy $\tilde{V}$ w mapie ψ_i (oznaczamy go przez $\tilde{V}_i$) jest równy

$$\tilde{V}_i = \{(u_i, v_i) \in \psi_i(B_i \cap \tilde{U}) : \ \tilde{f}_i(u_i, v_i) = 0\}.$$

Punktami domknięcia na E zbioru $\pi_U^{-1}(V \setminus \{0\})$ w mapach ψ_i są odpowiednio zbiory

$$\{(u_0, 0) : \ \tilde{f}_0(u_0, 0) = 0\} = \{(u_0, 0) : \ f_\nu(1, u_0) = 0\}, \tag{3.1}$$

$$\{(u_1, 0) : \ \tilde{f}_1(u_1, 0) = 0\} = \{(u_1, 0) : \ f_\nu(u_1, 1) = 0\}. \tag{3.2}$$

Jeśli $f_\nu(1, 0) \neq 0$ tzn. $(0, 0) \notin \tilde{V}_0$, to wszystkie punkty domknięcia $\pi_U^{-1}(V \setminus \{0\})$ na E leżą w dziedzinie mapy ψ_1. Warunek $f_\nu(1, 0) \neq 0$ oznacza, że oś $0x$ nie jest styczna do V w 0. Podobnie, jeśli oś $0y$ nie jest styczna do V w 0, to wszystkie punkty domknięcia $\pi_U^{-1}(V \setminus \{0\})$ na E leżą w dziedzinie mapy ψ_0. Zatem po "odpowiednim ułożeniu" zbioru V (np. przez zmianę współrzędnych w otoczeniu 0) do badania $\tilde{V}$ wystarczy zastosować jedno z rzutowań π_0 lub π_1 (por. definicję σ-procesu w [P$_2$], §2).

Z powyższego opisu przeciwobrazu właściwego i własności zbiorów analitycznych nietrudno udowodnić

Twierdzenie 3.3. *Niech $\pi : \tilde{M} \to M$ będzie rozdmuchaniem w $a \in M$, V – krzywą w M i $a \in V$. Wówczas:*

(i) przeciwobraz właściwy $\tilde{V}$ krzywej V jest krzywą w $\tilde{M}$,

(ii) jeśli kiełek $\mathbf{V}$ zbioru V w a jest nieprzywiedlny, to $\tilde{V} \cap E$ jest jednym punktem (który będziemy oznaczać przez $\tilde{a}_V$ lub krótko $\tilde{a}$) i kiełek $\tilde{\mathbf{V}}$ zbioru $\tilde{V}$ w $\tilde{a}_V$ jest nieprzywiedlny,

(iii) jeśli kiełek $\mathbf{V}$ zbioru V w a jest nieosobliwy (a więc nieprzywiedlny), to kiełek $\tilde{\mathbf{V}}$ zbioru $\tilde{V}$ w $\tilde{a}_V$ jest nieosobliwy i ponadto przecięcie $\tilde{V}$ z E w $\tilde{a}_V$ jest transwersalne.

Przykład 3.4. Niech $V = V(x^2 - y^3) \subset \mathbb{C}^2$. Wówczas

$$\tilde{V}_0 = \{(u_0, v_0) : \ 1 - u_0^3 v_0 = 0\}.$$

Krzywa ta nie ma punktów wspólnych z E w tej mapie.

$$\tilde{V}_1 = \{(u_1, v_1) : \ u_1^2 - v_1 = 0\}.$$

Zatem $\tilde{a}_V = (0, 0)$ w tej mapie i krzywa ta w tym punkcie jest nieosobliwa.

4. Rozdmuchania wielokrotne

Niech M będzie rozmaitością i V podzbiorem domkniętym M. Rozdmuchaniem wielokrotnym (lub krótko rozdmuchaniem) nad V nazywamy złożenie $\pi = \pi_1 \circ \cdots \circ \pi_r : \tilde{M} \to M$ rozdmuchań w punktach, gdzie

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & & E_r & & E_{r-1} & & \dots & & E_1 & & E_0 & = & V \\ & & \cap & & \cap & & \dots & & \cap & & \cap & & \\ \tilde{M} & = & M_r & \xrightarrow{\pi_r} & M_{r-1} & \xrightarrow{\pi_{r-1}} & \dots & \xrightarrow{\pi_2} & M_1 & \xrightarrow{\pi_1} & M_0 & = & M, \end{array}$$

$\pi_i : M_i \to M_{i-1}$ jest rozdmuchaniem w punkcie $a_i \in E_{i-1}$ oraz $E_i = \pi_i^{-1}(E_{i-1})$, $i = 1, \dots, r$.

Podobnie jak dla rozdmuchań pojedynczych wprowadzamy pojęcie dywizora wyjątkowego i przeciwobrazu właściwego rozdmuchania wielokrotnego. Mianowicie, sumę przeciwobrazów punktów a_i, za pomocą złożeń częściowych $\pi_i \circ \cdots \circ \pi_r$, nazywamy dywizorem wyjątkowym π i oznaczamy przez E. Inaczej, jeśli przyjmiemy $V' := \{\pi_1 \circ \cdots \circ \pi_{i-1}(a_i) : i = 2, \dots, r\} \cup \{a_1\} \subset M$, to $E = \pi^{-1}(V')$. Wówczas $\overline{\pi^{-1}(V \setminus V')}$ nazywamy przeciwobrazem właściwym V za pomocą π i oznaczamy $\tilde{V}$.

Ponieważ dywizor wyjątkowy rozdmuchania w punkcie jest podrozmaitością biholomorficzną z $\mathbb{P}$, więc stąd i z twierdzenia 3.3 (iii) łatwą indukcją względem ilości r złożeń otrzymujemy

Twierdzenie 4.1. *Dywizor wyjątkowy rozdmuchania wielokrotnego jest skończoną sumą podrozmaitości biholomorficznych z $\mathbb{P}$ oraz każde dwie z nich nie mają punktów wspólnych lub posiadają dokładnie jeden punkt wspólny, w którym przecinają się transwersalnie.*

5. Rozwiązanie osobliwości krzywych

Niech V będzie krzywą w rozmaitości M. Rozwiązaniem osobliwości krzywej V nazywamy każde rozdmuchanie wielokrotne $\pi : \tilde{M} \to M$ nad V takie, że przeciwobraz właściwy $\tilde{V}$ jest krzywą gładką w $\tilde{M}$ oraz $\tilde{V}$ przecina transwersalnie dywizor wyjątkowy E.

Twierdzenie 5.1. (por. Wn.3.6 w [P$_1$], Prop.10 w [Ł$_1$]). *Dla dowolnej krzywej V w rozmaitości M, o skończonej ilości punktów osobliwych, istnieje rozwiązanie osobliwości V.*

Dowód. Niech $\{a_1, \dots, a_k\}$ będą punktami osobliwymi V. Rozważmy punkt a_1. Udowodnimy, że istnieje takie rozdmuchanie wielokrotne $\pi : \tilde{M} \to M$ nad $\{a_1\}$, że $\tilde{V}$ ma osobliwości tylko w punktach $\pi^{-1}(a_2), \dots, \pi^{-1}(a_k)$ oraz $\tilde{V}$przecina transwersalnie E (zauważmy, że w tym przypadku $E = \pi^{-1}(a_1)$ oraz, że $\pi|_{\tilde{M} \setminus E}$ jest biholomorfizmem). Stąd łatwą indukcją otrzymamy tezę twierdzenia.

Ponieważ punkty osobliwe V są izolowane, więc za pomocą mapy wokół a_1 możemy rozważania przeprowadzić w otoczeniu U punktu $0 \in \mathbb{C}^2$ przyjmując $a_1 = 0$. Zatem V jest krzywą w U o jedynym punkcie osobliwym 0.

Rozważmy najpierw przypadek, gdy krzywa V ma kiełek nieprzywiedlny $\mathbf{V}$ w 0. Niech $n := m_0(V)$, $n > 1$. Wówczas z własności zbiorów analitycznych jednowymiarowych ([Ł$_2$],II.6.2) wynika, że zmniejszając U i stosując biholomorfizm, możemy założyć, że V w U ma parametryzację Φ postaci: $\Phi(t) = (t^n, \alpha_m t^m + \alpha_{m+1}t^{m+1} + \dots)$, $m \in \mathbb{N}$, $n < m$, $n \nmid m$, $\alpha_m \neq 0$, $|t| < \varepsilon$. Ponieważ jedyną styczną do V w 0 jest oś $0x$, więc przeciwobraz właściwy $\tilde{V}$(oznaczmy go przez $\tilde{V}^{(1)}$) zawiera się w dziedzinie mapy ψ_0. Zatem wystarczy zastosować rzutowanie π w mapie ψ, tzn π_0. Łatwo otrzymujemy, że

$$\tilde{V}^{(1)} = \{(u_0, v_0) :\ u_0 = \alpha_m t^{m-n} + \alpha_{m+1}t^{m+1-n} + \dots,\ v_0 = t^n,\ |t| < \varepsilon\}.$$

Jedynym możliwym punktem osobliwym $\tilde{V}^{(1)}$ jest punkt $\tilde{0}_V^{(1)} = (0, 0)$. Jeśli $m - n > n$, to stosujemy następne rozdmuchanie w punkcie $\tilde{0}_V^{(1)}$ itd. Po skończonej ilości ν kroków otrzymamy w końcu, że przeciwobraz właściwy $\tilde{V}^{(\nu)}$ za pomocą tego wielokrotnego rozdmuchania ma parametryzację $\Phi^{(\nu)}(t) = (\alpha_m t^{m-\nu n} + \dots, t^n)$, $|t| < \varepsilon$ i $m - \nu n < n$. Zatem krotność $\tilde{V}^{(\nu)}$ w jedynym możliwym punkcie osobliwym $\tilde{0}_V^{(\nu)}$ jest równa $m - \nu n < n$. Jeśli $m - \nu n > 1$, to powtarzamy całą procedurę od początku, przy czym teraz rozważany kiełek $\tilde{\mathbf{V}}^{(\nu)}$ ma krotność $m - \nu n < n$. Po skończonej ilości tych procedur otrzymamy, że kiełek przeciwobrazu właściwego $\tilde{V}^{(N)}$ w punkcie $\tilde{0}_V^{(N)}$ jest równy 1 tzn., że jest gładki.

Przejdźmy teraz do przypadku ogólnego. Niech V w U będzie krzywą taką, że jej kiełek $\mathbf{V}$ w 0 jest przywiedlny tzn. jest sumą skończonej ilości kiełków nieprzywiedlnych $\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_s$. Zmniejszając U możemy założyć, że V w U jest sumą nieprzywiedlnych w U reprezentantów $V_1, \dots, V_s$ kiełków $\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_s$. Stosując metodę z pierwszego przypadku do V_1, a następnie do przeciwobrazu właściwego V_2 itd. otrzymamy rozdmuchanie wielokrotne takie, że przeciwobrazy właściwe $\tilde{V}_1, \dots, \tilde{V}_s$ są nieosobliwe. Oczywiście, ich suma $\tilde{V}_1 \cup \dots \cup \tilde{V}_s$ równa $\tilde{V}$ może mieć punkty osobliwe. Mianowicie, takie punkty, które należą do co najmniej dwóch krzywych $\tilde{V}_1, \dots, \tilde{V}_s$. Weźmy pod uwagę jeden z takich punktów a. Oczywiście wystarczy ograniczyć się do przypadku, gdy przez ten punkt przechodzą tylko dwie krzywe np. $\tilde{V}_1$ i $\tilde{V}_2$. Jeśli ich styczne w tym punkcie są różne, to po jednokrotnym rozdmuchaniu w tym punkcie ich przeciwobrazy właściwe będą rozłączne. Jeśli zaś mają te same styczne, to w odpowiedniej mapie wokół a, możemy założyć, że $a = 0 \in \mathbb{C}^2$ oraz $\tilde{V}_1$ i $\tilde{V}_2$ mają odpowiednio parametryzacje postaci

$$\Phi_1(t) = (t, 0), \quad |t| < \varepsilon_1,$$
$$\Phi_2(t) = (t, t^m + \alpha_{m+1}t^{m+1} + \dots), \quad |t| < \varepsilon_2, \quad m \geq 2.$$

Po jednokrotnym rozdmuchaniu w 0 otrzymamy, że przeciwobrazy właściwe krzywych $\tilde{V}_1$ i $\tilde{V}_2$ mają parametryzacje

$$\tilde{\Phi}_1(t) = (0, t), \quad |t| < \varepsilon_1,$$
$$\tilde{\Phi}_2(t) = (t^{m-1} + \alpha_{m+1}t^m + \dots, t), \quad |t| < \varepsilon_2, \quad m \geq 2.$$

Zatem po $(m-1)$-rozdmuchaniach otrzymamy krzywe, które mają różne styczne, a stąd po m-tym rozdmuchaniu – krzywe rozłączne.

Otrzymaliśmy zatem, że istnieje rozdmuchanie wielokrotne $\pi : \tilde{U} \to U$ takie, że przeciwobraz właściwy $\tilde{V}$ krzywej V jest krzywą nieosobliwą. Niech $\tilde{V} \cap E = \{a_1, \dots, a_s\}$ (zauważmy, że ich ilość jest równa ilości kiełków nieprzywiedlnych V w 0). W punktach a_i, w których przecięcie z E nie jest transwersalne mogą zajść dwa przypadki:

1. przez a_i przechodzą dwie składowe E', E'' dywizora E (przecinają się one transwersalnie na mocy twierdzenia 4.1) oraz $\tilde{V}$ nie ma wspólnej stycznej ani z E', ani z E''. W tym przypadku pojedyncze rozdmuchanie w a_i daje transwersalne przecięcie przeciwobrazu właściwego $\tilde{V}$ z dywizorem wyjątkowym w punkcie $\tilde{a}_i$,

2. w punkcie a_i krzywa $\tilde{V}$ ma wspólną styczną z jedną ze składowych E' dywizora E. Powtarzając rozumowanie z pierwszej części dowodu, przez wielokrotne rozdmuchanie nad $\{a_i\}$ otrzymamy, że przeciwobrazy właściwe E' i $\tilde{V}$ będą miały różne styczne. W takim punkcie otrzymamy zatem sytuację rozważaną w punkcie 1.

To kończy dowód twierdzenia 5.1.

Wniosek 5.2. *Dowolna krzywa algebraiczna w $\mathbb{P}^2$ posiada rozwiązanie osobliwości.*

Dowód. Wynika to z faktu, że krzywa algebraiczna w $\mathbb{P}^2$ posiada skończoną ilość punktów osobliwych.

6. Opis rozwiązania osobliwości krzywej

Niech V będzie krzywą w rozmaitości M i $a \in V$ – punktem osobliwym V. Rozwiązaniem standardowym osobliwości V w punkcie a nazywamy ciąg rozdmuchań

$$M_N \xrightarrow{\pi_N} M_{N-1} \xrightarrow{\pi_{N-1}} \dots \xrightarrow{\pi_2} M_1 \xrightarrow{\pi_1} M_0 = M \tag{6.1}$$

określony rekurencyjnie w następujący sposób:

1. π_1 jest rozdmuchaniem M_0 w a,

2. załóżmy, że $\pi_1, \dots, \pi_i$, $i \geq 1$ są już zdefiniowane. Niech $\chi := \pi_1 \circ \dots \circ \pi_i$, $E_i := \chi_i^{-1}(a)$ – dywizor wyjątkowy χ_i i $V^i := \overline{\chi_i^{-1}(V \setminus \{a\})}$ – przeciwobraz właściwy V za pomocą χ_i. Wówczas $\pi_{i+1} : M_{i+1} \to M_i$ określamy jako złożenie rozdmuchań M_i dokładnie w tych punktach $V^i \cap E_i$ w których V^i nie jest gładkie lub nie przecina transwersalnie E_i (gdy takich punktów nie ma, to $N = i$. Na mocy twierdzenia 5.1 ciąg ten jest skończony.

Z twierdzenia 2.1 p.2 wynika, że lokalna zmiana w M prowadzona przez standardowe rozwiązanie osobliwości V w a zależy tylko od kiełka $\mathbf{V}$ krzywej V w a. Mianowicie, zachodzi

Stwierdzenie 6.2. *Niech* (a, V, M) *i* (a', V', M') *będą trójkami jak powyżej oraz (6.1) i*

$$(6.3) \qquad M'_{N'} \xrightarrow{\pi'_{N'}} M'_{N'-1} \xrightarrow{\pi'_{N'-1}} \dots \xrightarrow{\pi'_2} M'_1 \xrightarrow{\pi'_1} M'_0 = M'$$

będą rozwiązaniami standardowymi osobliwości V *w* a *i odpowiednio* V' *w* a'. *Jeśli istnieją otoczenia* U *i* U' *punktów* a *i* a' *oraz biholomorfizm* $h_0 : U \to U'$ *taki, że* $h_0(V \cap U) = V' \cap U'$, *to rozwiązania standardowe (6.1) i (6.3) są biholomorficznie równoważne nad* U *i* U' *tzn.* $N = N'$ *i istnieją biholomorfizmy* $h_i : M_i \mid_U \to M'_i \mid_{U'}$, *gdzie przyjęliśmy* $M_i \mid_U := (\pi_1 \circ \dots \circ \pi_i)^{-1}(U)$ *i analogicznie dla* $M'_i \mid_{U'}$ *takie, że diagram jest przemienny*

$$\begin{array}{ccccccccc}
M_N|_U & \xrightarrow{\pi_N} & M_{N-1}|_U & \xrightarrow{\pi_{N-1}} & \dots & \xrightarrow{\pi_2} & M_1|_U & \xrightarrow{\pi_1} & U \\
\downarrow{\scriptstyle h_N} & & \downarrow{\scriptstyle h_{N-1}} & & & & \downarrow{\scriptstyle h_1} & & \downarrow{\scriptstyle h_0} \\
M'_N|_{U'} & \xrightarrow{\pi'_N} & M'_{N-1}|_{U'} & \xrightarrow{\pi'_{N-1}} & \dots & \xrightarrow{\pi'_2} & M'_1|_{U'} & \xrightarrow{\pi'_1} & U'
\end{array}$$

Niech V będzie krzywą w M i niech $\mathbf{V}$ będzie kiełkiem V w punkcie $a \in V$. Załóżmy, że a jest punktem osobliwym V. Niech $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 \cup \dots \cup \mathbf{V}_s$ będzie rozkładem $\mathbf{V}$ na kiełki nieprzywiedlne. Kiełkowi $\mathbf{V}$ i wybranej powyżej numeracji jego składowych nieprzywiedlnych przyporządkujemy trzy układy danych liczbowych, będących niezmiennikami biholomorficznymi $\mathbf{V}$.

I. Układy ciągów krotności. Biorąc zamiast M odpowiednie otoczenie punktu a możemy założyć, że reprezentanty $V_1, \dots, V_s$ kiełków $\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_s$ są jednocześnie składowymi nieprzywiedlnymi V w M. Niech wówczas (6.1) będzie rozwiązaniem standardowym osobliwości V w a. Niech V_i^r będzie przeciwobrazem właściwym V_i za pomocą χ_r, $1 \le r \le N$. Na mocy twierdzenia 3.3 przecięcie $V_i^r \cap E_r$ jest dokładnie jednym punktem. Oznaczmy go przez a_i^r (punkty te w klasycznej literaturze nazywane są punktami nieskończenie bliskimi punktu a). Wówczas definiujemy

$$m_r(\mathbf{V}_i) := m_{a_i^r}(V_i^r), \qquad 1 \le i \le s, \quad 1 \le r \le N.$$

Liczby te są dobrze określone, gdyż jak łatwo sprawdzić nie zależą one od wyboru reprezentantów $V_1, \dots, V_s$ kiełków $\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_s$. Dodatkowo określamy $m_0(\mathbf{V}_i) := m_a(\mathbf{V}_i)$, $i = 1, \dots, s$. Otrzymamy s ciągów $M_i := (m_0(\mathbf{V}_i), ..., m_N(\mathbf{V}_i))$, $i = 1, ..., s$, liczb naturalnych przyporządkowanych gałęziom kiełka $\mathbf{V}$. Przy ustalonym r, $0 \le r \le N$ pewne z krotności $m_r(\mathbf{V}_1), ..., m_r(\mathbf{V}_s)$ są obliczane w tych samych punktach. Zatem dla każdego r, $0 \le r \le N$ istnieje rozkład zbioru $\{1, ..., s\}$ na podzbiory rozłączne takie, że i, i' są w tym samym podzbiorze, gdy $a_i^r = a_{i'}^r$, tzn. gdy przeciwobrazy właściwe V_i^r i $V_{i'}^r$ przechodzą przez ten sam punkt E_r. Oczywiście dla $r = 0$ mamy rozkład $\{\{1, ..., s\}\}$, zaś dla $r = N$ rozkład $\{\{1\}, ..., \{s\}\}$.

Układ s ciągów M_i, $i = 1, ..., s$ wraz z opisanym rozkładem zbioru $\{1, ..., s\}$ dla każdego r nazywamy układem ciągów krotności kiełka $\mathbf{V}$ z wybraną numeracją $\mathbf{V}_1, ..., \mathbf{V}_s$ jego składowych nieprzywiedlnych.

II. Graf rozwiązania osobliwości. Grafem nazywamy dowolny skończony zbiór (jego elementy nazywamy wierzchołkami grafu) z wyróżnionym zbiorem dwuelementowych podzbiorów tego zbioru (zwanych krawędziami grafu). Podobnie jak w I zmniejszając M do otoczenia punktu a możemy założyć, że reprezentanty $V_1, ..., V_s$ kiełków $\mathbf{V}_1, ..., \mathbf{V}_s$ są jednocześnie składowymi nieprzywiedlnymi V w M. Niech (6.1) będzie rozwiązaniem standardowym osobliwości V w a. Temu rozwiązaniu przyporządkujemy pewien graf. Wierzchołkami grafu są składowe nieprzywiedlne dywizora wyjątkowego E_N oraz składowe nieprzywiedlne przeciwobrazu właściwego $\tilde{V}^N = \overline{\chi_N^{-1}(V \setminus \{a\})}$ (tych ostatnich jest dokładnie s). Graficznie składowe E_N będziemy oznaczać punktami, zaś składowe V^N gwiazdkami. Dwa wierzchołki połączone są krawędzią gdy odpowiadające tym wierzchołkom składowe mają punkt wspólny. Dodatkowo każdemu wierzchołkowi przypisujemy wagę. Mianowicie, składowej D dywizora E_N przypisujemy wagę $i(D)$, $1 \leq i(D) \leq N$, równą najmniejszemu indeksowi i dla którego obraz D w M_i za pomocą $\pi_{i+1} \circ \ldots \pi_N$ nie jest punktem, zaś składowej W krzywej $\tilde{V}^N$ przypisujemy wagę równą numerowi składowej V_i krzywej V, której przeciwobrazem właściwym za pomocą χ_N jest W.

Opisany powyżej graf nie zależy od wyboru reprezentantów V_i kiełków $\mathbf{V}_i$. Graf ten nazywamy grafem rozwiązania osobliwości kiełka $\mathbf{V}$ z wybraną numeracją $\mathbf{V}_1, ..., \mathbf{V}_s$ jego składowych nieprzywiedlnych.

III. Układ charakterystyk. Trzecim systemem danych o kiełku $\mathbf{V}$ są charakterystyki Puiseux poszczególnych gałęzi kiełka $\mathbf{V}$ oraz układ krotności przecięć każdych dwóch z nich. Mianowicie, każdej składowej $\mathbf{V}_i$ kiełka $\mathbf{V}$ w mapie wokół a przeprowadzającej a na punkt $0 \in \mathbb{C}^2$ przypisany jest, z dokładnością do elementu odwracalnego, nieprzywiedlny element $\widehat{f_i}$ pierścienia kiełków funkcji holomorficznych $\mathcal{O}_2$ w punkcie $0 \in \mathbb{C}^2$. Niech $\beta^i := (\beta_0^i, \beta_1^i, ..., \beta_{g_i}^i)$ będzie charakterystyką $\widehat{f_i}$ (zob. [P$_1$], §5), $i = 1, ...s$, zaś $\mu_{ij} = \mu_0(f_i, f_j)$ krotnością odwzorowania (f_i, f_j) w 0 dla $1 \leq i \leq s$, $1 \leq j \leq s$, $i \neq j$. Jak wiadomo, charakterystyki i krotności nie zależą od wyboru mapy, ani od wyboru elementów $\widehat{f_i}$. Układ złożony z charakterystyk β^i oraz tablicy $< \mu_{ij} >_{i<j}$ nazywamy układem charakterystyk kiełka $\mathbf{V}$ z wybraną numeracją $\mathbf{V}_1, ..., \mathbf{V}_s$ jego składowych nieprzywiedlnych.

Dodatkowo, gdy kiełek $\mathbf{V}$ krzywej V w punkcie $a \in M$ nie jest osobliwy, to przyporządkowujemy mu następujące dane:

I. układ ciągów krotności: $M_1 = (1)$

II. graf rozwiązania osobliwości: $\overset{1}{*}$

III. układ charakterystyk: $\beta^1 = (1)$.

Przykład 6.4. ([BK], str. 511) Niech $V := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : x(x^2 - y^3)(y^2 - x^3) = 0\}$, $V_1 := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : x = 0\}$, $V_2 := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : x^2 - y^3 = 0\}$, $V_3 := \{(x, y) \in$

$\mathbb{C}^2 : y^2 - x^3 = 0\}$. Wówczas kiełek $\mathbf{V}$ zbioru V w 0 jest przywiedlny i równy $\mathbf{V}_1 \cup \mathbf{V}_2 \cup \mathbf{V}_3$, gdzie $\mathbf{V}_i$ jest kiełkiem zbioru V_i w 0. Wówczas rozwiązanie standardowe osobliwości V w 0 jest złożeniem trzech rozdmuchań $\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_3$:

1. π_1 jest rozdmuchaniem w punkcie 0. Mamy $a_1^1 = a_2^1 \neq a_3^1$, V_1^1, V_2^1, V_3^1 są nieosobliwe, punkt $a_1^1 = a_2^1$ jest punktem osobliwym V^1, zaś V_3^1 nie przecina transwersalnie E_1 w a_3^1 (na rysunku liniami ciągłymi oznaczamy składowe dywizora wyjątkowego, zaś przerywanymi składowe przeciwobrazu właściwego; dodatkowo na składowych dywizora wyjątkowego zaznaczamy ich wagi)

2. π_2 jest rozdmuchaniem w $a_1^1 = a_2^1$ i w a_3^1. Mamy $a_1^2 \neq a_2^2 \neq a_3^2$, V_1^2 przecina transwersalnie E_2, zaś V_2^2 i V_3^3 nie.

3. π_3 jest rozdmuchaniem w a_2^2 i a_3^2.

Wówczas:
I. Układem ciągów krotności $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 \cup \mathbf{V}_2 \cup \mathbf{V}_3$ jest:

$$M_1 = (1,1,1,1) \qquad M_2 = (2,1,1,1) \qquad M_3 = (2,1,1,1)$$

oraz rozkłady:

$$\begin{array}{cccc} r=0 & r=1 & r=2 & r=3 \\ \{\{1,2,3\}\} & \{\{1,2\},\{3\}\} & \{\{1\},\{2\},\{3\}\} & \{\{1\},\{2\},\{3\}\}. \end{array}$$

II. Grafem rozwiązania osobliwości kiełka $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 \cup \mathbf{V}_2 \cup \mathbf{V}_3$ jest:

III. Układem charakterystyk kiełka $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 \cup \mathbf{V}_2 \cup \mathbf{V}_3$ jest:

$$\begin{array}{ccc} \beta^1 = (1) & \beta^2 = (2,3) & \beta^3 = (2,3) \\ \mu_{12} = 3 & \mu_{13} = 2 & \mu_{23} = 4. \end{array}$$

Twierdzenie 6.5. ([BK],Th. 21, p.535) *Dla dowolnego kiełka* $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 \cup \ldots \mathbf{V}_s$ *krzywej* $V \subset M$ *w punkcie* $a \in V$ *z wybraną numeracją składowych nieprzywiedlnych następujące układy danych są równoważne:*
1. układ ciągów krotności kiełka $\mathbf{V}$*,*
2. graf rozwiązania osobliwości kiełka $\mathbf{V}$*,*
3. układ charakterystyk kiełka $\mathbf{V}$.

Oznacza to, że jeśli weźmiemy pod uwagę zbiór wszystkich układów ciągów krotności wszystkich kiełków krzywych z wybraną numeracją jego składowych nieprzywiedlnych oraz analogiczne zbiory grafów i układów charakterystyk, to istnieją takie bijekcje między tymi zbiorami, że dla dowolnego kiełka $\mathbf{V}$ krzywej i określonej numeracji jego składowych nieprzywiedlnych, przypisane mu w powyższych konstrukcjach układy danych odpowiadają sobie przy tych bijekcjach.

7. Twierdzenie Zariskiego o equisingularności

Niech $\mathbf{V}$ i $\mathbf{V}'$ będą kiełkami krzywych V i V' w punktach $a \in M$ i $a' \in M'$, gdzie M i M' są rozmaitościami. Mówimy, że kiełki te są równoważne, gdy istnieje taka numeracja składowych nieprzywiedlnych $\mathbf{V}$ i $\mathbf{V}'$, dla której odpowiadające im układy danych liczbowych w twierdzeniu 6.5 są identyczne.

Uwaga 7.1. Powyższa relacja równoważności pokrywa się z relacją równoważności topologicznej kiełków krzywych, którą definiuje się następująco:

kiełki $\mathbf{V}$ i $\mathbf{V}'$ są topologicznie równoważne, gdy istnieją otoczenia U i U' punktów a i a' oraz homeomorfizm $h : U \to U'$ taki, że $h(V \cap U) = V' \cap U'$. (zob. Th.15, §8.3 w [BK]).

Niech $f(\lambda, x, y)$ będzie pseudowielomianem postaci

$$(7.2) \qquad f(\lambda, x, y) = y^n + a_1(\lambda, x)y^{n-1} + \cdots + a_n(\lambda, x), \qquad n \geq 1,$$

gdzie a_i są funkcjami holomorficznymi w pewnym otoczeniu $U \times U'$ punktu $(0,0) \in \mathbb{C}^2$, gdzie U i U' są spójnymi otoczeniami $0 \in \mathbb{C}$, posiadającymi tam rozwinięcia w szeregi potęgowe. Ponadto zakładamy, że dla każdego $\lambda \in U$, $a_i(\lambda, 0) = 0$ tzn. dla każdego $\lambda \in U$, $f^\lambda(x, y)$ jest pseudowielomianem wyróżnionym. Zatem dla każdego $\lambda \in U$ zbiór

$$V^\lambda = \{(x, y) \in U' \times \mathbb{C} : f^\lambda(x, y) = 0\}$$

jest krzywą w $U' \times \mathbb{C}$ przechodzącą przez $(0, 0)$. Jej kiełek w $(0, 0)$ oznaczamy przez $\mathbf{V}^\lambda$.

Mówimy, że powyższa rodzina kiełków $\mathbf{V}^\lambda$, $\lambda \in U$, jest equisingularna, gdy dla dowolnych λ_1, $\lambda_2 \in U$, kiełki $\mathbf{V}^{\lambda_1}$ i $\mathbf{V}^{\lambda_2}$ są równoważne.

Oznaczmy przez $D(\lambda, x)$ wyróżnik pseudowielomianu $f(\lambda, x, y)$. W dalszym ciągu będziemy zakładać, że dla każdego $\lambda \in U$, $D^\lambda \neq 0$ w U' tzn., że kiełek funkcji $f^\lambda(x, y)$ w $\mathcal{O}_2$ nie ma czynników wielokrotnych. Stąd wynika, że f^λ jest funkcją opisującą kiełek $\mathbf{V}^\lambda$ tzn. $\mathcal{I}(\mathbf{V}^\lambda) = (\widehat{f^\lambda})$ w $\mathcal{O}_2$. Przy powyższym założeniu mamy również, że $D \neq 0$ w $U \times U'$. Niech zatem

$$(7.3) \qquad D(\lambda, x) = d_N(\lambda)x^N + d_{N+1}(\lambda)x^{N+1} + \ldots, \qquad d_N \neq 0,\, (\lambda, x) \in U \times U'.$$

Twierdzenie 7.4. (Zariskiego o equisingularności). *Przy powyższych założeniach rodzina $\mathbf{V}^\lambda$, $\lambda \in U$, jest equisingularna wtedy i tylko wtedy gdy $d_N(\lambda) \neq 0$ dla $\lambda \in U$.*

Zanim podamy dowód tego twierdzenia udowodnimy potrzebny lemat o holomorficznej zależności czynników rozkładu $f(\lambda, x, y)$ i parametryzacji ich zbiorów zer od parametru λ.

Lemat 7.5. (por. Th. w [Pa] lub [K_1] [K_3] w przypadku otoczeń nieskończoności). *Niech $f(\lambda, x, y)$ będzie pseudowielomianem postaci (7.2) i spełnia wymienione tam założenia, przy czym zakładamy, że U jest dowolnym kołem K na płaszczyźnie, zaś U' kołem $K(r)$ o środku w 0 i promieniu r. Jeśli wyróżnik $D(\lambda, x)$ pseudowielomianu f nie znika dla $\lambda \in K$ i $x \in K(r) \setminus \{0\}$, to istnieją*

1. pseudowielomiany

$$f_i(\lambda, x, y) = y^{n_i} + a_1^i(\lambda, x)y^{n_i-1} + \cdots + a_{n_i}^i(\lambda, x), \qquad n_i \geq 1,\, i = 1, ..., l$$

o współczynnikach holomorficznych w $K \times K(r)$, $a_j^i(\lambda, 0) = 0$ *dla* $\lambda \in K$ *takie że*

$$f = f_1 \dots f_l \qquad w \quad K \times K(r) \times \mathbb{C}$$

oraz dla każdego $\lambda \in K$

$$\widehat{f^\lambda} = \widehat{f_1^\lambda} \dots \widehat{f_l^\lambda}$$

jest rozkładem $\widehat{f^\lambda}$ *na czynniki nierozkładalne w* $\mathcal{O}_2$.

2. odwzorowania holomorficzne $\Phi_i : K \times K(r^{1/n_i}) \to K(r) \times \mathbb{C}$, $i = 1, ..., l$, *postaci*

$$\Phi_i(\lambda, t) = (t^{n_i}, \varphi_i(\lambda, t))$$

takie, że dla każdego $\lambda \in K$, Φ_i^λ *jest parametryzacją zbioru zer funkcji* f_i^λ *w* $K(r) \times \mathbb{C}$, $\Phi_i^\lambda(0) = (0, 0)$.

Dowód. Niech $\Theta \in \mathbb{R}$ będzie taką liczbą, że $r = \exp(-2\pi\Theta)$. Oznaczmy przez $H_\Theta = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} w > \Theta\}$. Rozważmy pseudowielomian $P(\lambda, w, y) = f(\lambda, \exp(2\pi i w), y)$, $\lambda \in K$, $w \in H_\Theta$, $y \in \mathbb{C}$. Wyróżnik P jest równy $D(\lambda, \exp(2\pi i w))$, a więc nie znika nigdzie w $K \times H_\Theta$. Zatem, jeśli $P(\lambda, w, y) = 0$ dla pewnych $(\lambda, w, y) \in K \times H_\Theta \times \mathbb{C}$, to $\frac{\partial P}{\partial y}(\lambda, w, y) \neq 0$. Ponieważ P jest pseudowielomianem stopnia n i zbiór $K \times H_\Theta$ jest jednospójny, więc na mocy twierdzenia o monodromii istnieje n funkcji holomorficznych $p_1, ..., p_n$ w $K \times H_\Theta$ takich, że dla każdego punktu $(\lambda, w) \in K \times H_\Theta$ wartości $p_1(\lambda, w), ..., p_n(\lambda, w)$ są parami różne oraz

$$P(\lambda, w, y) = \prod_{i=1}^{n} (y - p_i(\lambda, w)). \tag{7.6}$$

Ponadto dla każdego $\lambda \in K$, $p_i^\lambda(w) \to 0$, gdy $\operatorname{Im} w \to +\infty$. Zauważmy, że $P(\lambda, w + 1, y) = P(\lambda, w, y)$. Zatem z (7.6) wynika, że dla każdego i, $1 \leq i \leq n$ istnieje j, $1 \leq j \leq n$, że $p_i(\lambda, w + 1) = p_i(\lambda, w)$. Stąd dla każdego i, $1 \leq i \leq n$, istnieje $k(i)$, $1 \leq k(i) \leq n$, że $p_i(\lambda, w + k(i)) = p_i(\lambda, w)$. Zatem, po odpowiednim przenumerowaniu funkcji p_i, możemy podzielić ciąg $p_1, ..., p_n$ na cykle tj. istnieją liczby $n_1, ..., n_l \in \mathbb{N}$ takie, że $n_1 + \dots + n_l = n$ oraz pierwszych n_1 funkcji tworzy cykl tzn. $p_1(\lambda, w+1) = p_2(\lambda, w)$, $p_2(\lambda, w+1) = p_3(\lambda, w), ..., p_{n_1}(\lambda, w+1) = p_1(\lambda, w)$, następnych n_2 funkcji tworzy cykl itd.

Rozważmy pierwszy cykl $p_1, ..., p_{n_1}$. Przyjmijmy $r' = r^{1/n_1}$ i zdefiniujmy funkcje $\varphi_i^1 : K \times (K(r') \setminus \{0\}) \to \mathbb{C}$, $i = 1, ..., n_1$, wzorami $\varphi_i^1(\lambda, t) := p_i(\lambda, n_1 w)$, gdzie $w = (1/2\pi i) \log t$. Oczywiście, φ_i^1 są poprawnie określone, holomorficzne (ponieważ lokalnie w $K(r') \setminus \{0\}$ istnieje gałąź logarytmu $\log t$), dla każdego (λ, t) wartości $\varphi_i^1(\lambda, t)$, $i = 1, ..., n_1$ są parami różne, oraz dla każdego $\lambda \in K$, $\varphi_i^1(\lambda, t) \to 0$, gdy $t \to 0$ (bo gdy $t \to 0$, to $\operatorname{Im} w \to +\infty$). Zatem każda z funkcji φ_i^1 przedłuża się holomorficznie na $K \times K(r')$ tak, że $\varphi_i^1(\lambda, 0) = 0$. Co więcej, funkcje φ_i^1, $i = 1, ..., n_1$ tworzą cykl Puiseux tzn. dla każdego pierwotnego pierwiastka ε stopnia n_1 z jedności możemy tak przenumerować φ_i^1, że $\varphi_i^1(\lambda, t) = \varphi_1^1(\lambda, \varepsilon^{i-1} t)$ dla każdego $i = 1, ..., n_1$.

Zauważmy, że dla każdego ustalonego $(\lambda, t) \in K \times K(r')$, $t \neq 0$ wartości $\varphi_i^1(\lambda, t)$, $i = 1, ..., n_1$, są pierwiastkami równania $f(\lambda, t^{n_1}, y) = 0$, gdyż dla dowolnego w takiego, że $t = \exp(2\pi i w)$ mamy $f(\lambda, t^{n_1}, \varphi_i^1(\lambda, t)) = f(\lambda, \exp(2\pi i n_1 w), \varphi_i^1(\lambda, \exp(2\pi i w)) = P(\lambda, n_1 w, p_i(\lambda, n_1 w)) = 0$. Stąd

$$f(\lambda, t^{n_1}, y) = \left(\prod_{i=1}^{n_1} (y - \varphi_i^1(\lambda, t)) \right) \tilde{f}(\lambda, t, y) \tag{7.7}$$

gdzie $\tilde{f}$ jest pseudowielomianem monicznym stopnia $n - n_1$ o współczynnikach holomorficznych w $K \times (K(r') \setminus \{0\})$. Ponieważ φ_i^1, $i = 1, ..., n_1$, tworzą cykl Puiseux, więc $\prod_{i=1}^{n_1}(y - \varphi_i^1(\lambda, t)) = y^{n_1} + a_1^1(\lambda, t^{n_1}) y^{n_1 - 1} + \cdots + a_{n_1}^1(\lambda, t^{n_1})$ dla pewnych funkcji holomorficznych a_j^i w $K \times K(r)$, $a_j^i(\lambda, 0) = 0$, oraz dla każdego $\lambda \in K$ kiełek $\widehat{f_1^\lambda}$ pseudowielomianu

$$f_1(\lambda, x, y) := y^{n_1} + a_1^1(\lambda, x) y^{n_1 - 1} + \cdots + a_{n_1}^1(\lambda, x)$$

jest elementem nierozkładalnym w $\mathcal{O}_2$ (Tw.1.3 w [P$_2$]). Z powyższego i z (7.7) otrzymujemy, że również współczynniki $\tilde{f}$ są holomorficzne w $K \times K(r')$ i zależą od t^{n_1}. W konsekwencji otrzymujemy, że $f = f_1 \tilde{F}$, gdzie $\tilde{F}$ jest pseudowielomianem monicznym stopnia $n - n_1$ o współczynnikach holomorficznych w $K \times K(r')$.

Dla $(\lambda, t) \in K \times K(r')$ kładziemy

$$\varphi_1(\lambda, t) := \varphi_1^1(\lambda, t), \qquad \Phi_1(\lambda, t) := (t^{n_1}, \varphi_1(\lambda, t)).$$

Z powyższego wynika, że dla każdego $\lambda \in K$ odwzorowanie Φ_1^λ jest parametryzacją zbioru zer f_1^λ w $K(r) \times \mathbb{C}$.

Postępując analogicznie z pozostałymi cyklami w ciągu $p_1, ..., p_n$ otrzymujemy l pseudowielomianów $f_1, ..., f_l$ i l odwzorowań $\Phi_1, ..., \Phi_l$, które spełniają wszystkie warunki tezy lematu.

Dowód twierdzenia 7.4. 1. $\Longleftarrow$. Załóżmy, że $d_N(\lambda) \neq 0$ dla $\lambda \in U$. Ponieważ U jest spójne więc wystarczy pokazać, że dla dowolnego $\lambda_0 \in U$ istnieje jego otoczenie $\tilde{U} \subset U$ takie, że rodzina $\mathbf{V}^\lambda$, $\lambda \in \tilde{U}$, jest equisingularna. Dla uproszczenia możemy przyjąć, że $\lambda_0 = 0$. Ponieważ $d_N(0) \neq 0$, więc istnieją koła, $K \subset U$ i $K(r) \subset U'$ o środku w punkcie 0, że $D(\lambda, x) \neq 0$ dla $(\lambda, x) \in K \times (K(r) \setminus \{0\})$. Na mocy lematu 7.5 istnieją pseudowielomiany $f_1, ..., f_l$ i odwzorowania $\Phi_1, ..., \Phi_l$ o własnościach wymienionych w lemacie.

Dla dowolnego $\lambda \in K$ niech

$$\beta^i := (\beta_0^i(\lambda), ..., \beta_{h^i(\lambda)}^i(\lambda))$$

będzie charakterystyką szeregu f_i^λ, $i = 1, ..., l$. Twierdzimy, że istnieje takie otoczenie $U_2 \subset K$ punktu 0, że dla każdego $i \in \{1, ..., l\}$, $\beta^i(\lambda) = \beta^i(\lambda')$, dla λ, $\lambda' \in U_2 \setminus \{0\}$. Rzeczywiście, niech

$$\varphi_i(\lambda, t) = \alpha_{m_i}^i(\lambda) t^{m_i} + \ldots, \qquad (\lambda, t) \in K \times K(r^{1/n_i}).$$

Rozważmy, wszystkie funkcje $\alpha^i_j \neq 0$ takie, że $i \in \{1, ..., l\}$, $j \leq \beta^i_{h^i(0)}(0)$. Ponieważ ilość ich jest skończona i niepusta, więc istnieje spójne otoczenie $U_2 \subset K$ takie, że dla każdej funkcji tej rodziny mamy $\alpha^i_j(\lambda) \neq 0$ dla $\lambda \in U_2 \setminus \{0\}$. Ponieważ wówczas $\beta^i_{h^i(\lambda)}(\lambda) \leq \beta^i_{h^i(0)}(0)$ dla $\lambda \in U_2$, więc z wyboru U_2 łatwo wynika, że $\beta^i(\lambda)$ są identyczne dla $\lambda \in U_2 \setminus \{0\}$. Oznaczmy tę "generyczną" charakterystykę przez $\beta^i = (\beta^i_0, ..., \beta^i_{h^i})$. Z powyższego mamy $\beta^i_{h^i} \leq \beta^i_{h^i(0)}(0)$.

Jeśli przez $D_i(\lambda, x)$ oznaczymy wyróżnik f_i oraz przez $R_{ij}(\lambda, x)$ rugownik f_i i f_j dla $i \neq j$, to z równości $f = f_1 \dots f_l$ oraz własności wyróżnika (zob. np. [MS], X, 3.1, Zad. 3) mamy

$$D(\lambda, x) = \prod_{i=1}^{l} D_i(\lambda, x) \prod_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{l} R^2_{ij}(\lambda, x) \tag{7.8}$$

a stąd dla każdego $\lambda \in U_2$

$$\operatorname{ord} D^\lambda = \sum_{i=1}^{l} \operatorname{ord} D^\lambda_i + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{l} \operatorname{ord} R^\lambda_{ij} \tag{7.9}$$

Założenie, że $d_N(\lambda) \neq 0$ dla $\lambda \in U_2$ jest równoważne warunkowi

$$\operatorname{ord} D^\lambda = \text{const.} = N, \qquad \lambda \in U_2. \tag{7.10}$$

Pokażemy najpierw, że istnieje spójne otoczenie $U_3 \subset U_2$ punktu 0 takie, że dla każdego i, $j = 1, ..., l$, $i < j$ mamy

$$\operatorname{ord} D^\lambda_i = \text{const.} =: d_i, \qquad \operatorname{ord} R^\lambda_{ij} = \text{const.} =: \mu_{ij}, \qquad \lambda \in U_3 \setminus \{0\} \tag{7.11}$$

oraz

$$\operatorname{ord} D^0_i \geq d_i, \qquad \operatorname{ord} R^0_{ij} \geq \mu_{ij}. \tag{7.12}$$

Rzeczywiście, ponieważ Φ^λ_i jest parametryzacją zbioru zer f^λ_i w $K(r) \times \mathbb{C}$, więc jeśli przez ε_i oznaczymy pierwiastek pierwotny stopnia n_i z jedności, to

$$f_i(\lambda, t^{n_i}, y) = \prod_{k=1}^{n_i} (y - \varphi_i(\lambda, \varepsilon^k_i t)).$$

Zatem, jeśli przyjmiemy $M := \mathrm{NWW}(n_1, ..., n_l)$ i $N_i := M/n_i$, to

$$f_i(\lambda, t^M, y) = \prod_{k=1}^{n_i} (y - \varphi_i(\lambda, \varepsilon^k_i t^{N_i})).$$

Stąd, z własności rugownika i wyróżnika ([MS], X.3.1, Wn. 1, Wn. 2) oraz holomorficzności φ_i otrzymujemy istnienie $U_3 \subset U_2$ takie, że zachodzi (7.11) i (7.12).

Pokażemy teraz, że rodzina $\mathbf{V}^\lambda$, $\lambda \in U_3$ jest equisingularna. Przypuśćmy, że jest przeciwnie. Ze stałości charakterystyk $\beta^i(\lambda)$ i rzędów $\operatorname{ord} R_{ij}^\lambda$ dla $\lambda \in U_3 \setminus \{0\}$ oraz ze znanego faktu, że dla pseudowielomianów wyróżnionych f_i^λ, f_j^λ, $i \neq j$ mamy $\operatorname{ord} R_{ij}^\lambda = \mu_0(f_i^\lambda, f_j^\lambda)$ wynika, że rodzina $\mathbf{V}^\lambda$ jest equisingularna dla $\lambda \in U_3 \setminus \{0\}$. Zatem z naszego przypuszczenia wynika, że $\mathbf{V}^0$ nie jest equisingularny z żadnym $\mathbf{V}^\lambda$, $\lambda \in U_3 \setminus \{0\}$. Oznacza to w szczególności, że dla wybranej powyżej numeracji składowych, mianowicie $\mathbf{V}_1^\lambda = V(\widehat{f_1^\lambda}), ..., \mathbf{V}_l^\lambda = V(\widehat{f_l^\lambda})$, istnieje $i \in \{1, ..., l\}$, że charakterystyka generyczna β^i jest różna od charakterystyki $\beta^i(0)$ lub istnieją $i, j \in \{1, ..., l\}$, że krotność "generyczna" μ_{ij} jest różna od krotności $\mu_0(f_i^0, f_j^0)$ (dokładniej, z (7.12) wynika, że wtedy $\mu_{ij} < \mu_0(f_i^0, f_j^0)$).

W drugim przypadku otrzymalibyśmy natychmiast sprzeczność z (7.10), gdyż dla ustalonego $\lambda \in U_3$, $\lambda \neq 0$ z (7.9), (7.11) i (7.12)

$$N = \operatorname{ord} D^\lambda = \sum_{k=1}^{l} d_k + 2 \sum_{\substack{r,s=1 \\ r<s}}^{l} \mu_{rs} < \sum_{k=1}^{l} \operatorname{ord} D_k^0 + 2 \sum_{\substack{r,s=1 \\ r<s}}^{l} \mu_0(f_r^0, f_s^0) = \operatorname{ord} D^0 = N.$$

Rozważmy teraz pierwszy przypadek, gdy $\beta^i \neq \beta^i(0)$ tzn. $(\beta_0^i, ..., \beta_{h^i}^i) \neq (\beta_0^i(0), ..., \beta_{h^i(0)}^i(0))$. Dla uproszczenia zapisu oznaczmy pierwszy ciąg przez $(\beta_0, ..., \beta_g)$, zaś drugi przez $(\beta_0', ..., \beta_h')$. Oczywiście $\beta_0 = \beta_0' = n_i$. Zatem istnieje r, $r \in \{1, ..., \min(g, h)\}$, że $\beta_0 = \beta_0', ..., \beta_{r-1} = \beta_{r-1}'$, $\beta_r \neq \beta_r'$.

Jeśli oznaczymy $e_q := \mathrm{NWP}(\beta_0, ..., \beta_q)$, $q = 0, ..., g$ oraz $e_q' := \mathrm{NWP}(\beta_0', ..., \beta_q')$, $q = 0, ..., h$, to ze znanego wzoru na rząd wyróżnika ([P$_1$], wzór w dowodzie tw. 5.2) mamy

$$(7.13) \qquad \operatorname{ord} D^\lambda = \sum_{q=1}^{g} \beta_q (e_{q-1} - e_q) =$$

$$\beta_1 e_0 + \sum_{q=1}^{g-1} (\beta_{q+1} - \beta_q) e_q - \beta_g e_g, \qquad \lambda \in U_3 \setminus \{0\}$$

$$(7.14) \qquad \operatorname{ord} D^0 = \sum_{q=1}^{h} \beta_q' (e_{q-1}' - e_q') = \beta_1' e_0' + \sum_{q=1}^{h-1} (\beta_{q+1}' - \beta_q') e_q' - \beta_h' e_h'.$$

Zapiszmy szereg $\varphi_i(\lambda, t)$ w postaci

$$\varphi_i(\lambda, t) = \alpha_{k_1}(\lambda) t^{k_1} + \alpha_{k_2}(\lambda) t^{k_2} + \dots, \qquad k_1 < k_2 < ...,$$

gdzie $\alpha_{k_j} \neq 0$ w U_3 (jest to możliwe, gdyż w rozważanym przypadku nie może być $\varphi_i(\lambda, t) \equiv 0$, bo wówczas byłoby $\Phi_i(\lambda, t) = (t, 0)$, czyli $f_i(\lambda, x, y) = y$, a stąd otrzymalibyśmy $\beta^i = \beta^i(0)$). Wówczas istnieje s, że $\beta_g = k_s$ oraz (7.13) możemy przedstawić w postaci

$$\text{(7.15)} \quad \operatorname{ord} D^\lambda = \sum_{q=0}^{s-1} (k_{q+1} - k_q)\tilde{e}_q - k_s \tilde{e}_s, \quad k_0 := 0,\ \tilde{e}_0 := \beta_0,$$
$$\tilde{e}_q := \mathrm{NWP}(\beta_0, k_1, ..., k_q),\ q = 1, ..., s.$$

Dla $\lambda = 0$ w szeregu $\varphi_i(0, t) = \alpha_{k_1}(0)t^{k_1} + \alpha_{k_2}(0)t^{k_2} + \dots$ pewne z współczynników $\alpha_{k_j}(0)$ mogą się zerować (ale również $\varphi_i(0, t) \not\equiv 0$, gdyż w przeciwnym razie byłoby $\Phi_i(0, t) = (t, 0)$, czyli $f_i(0, x, y) = y$, a stąd otrzymalibyśmy $f_i(\lambda, x, y) = y + a_1^i(\lambda, x)$ i dalej $\beta^i = \beta^i(0)$). Podobnie jak powyżej istnieje s', że $\beta'_h = k_{s'}$. Ponadto $\beta'_h \geq \beta_g$, czyli $k_{s'} \geq k_s$, a stąd $s' \geq s$. Ponieważ $(\beta_0, ..., \beta_{r-1}) = (\beta'_0, ..., \beta'_{r-1})$, więc również $\beta'_r > \beta_r$. Analogicznie, wzór (7.14) możemy przedstawić w postaci

$$\text{(7.16)} \quad \operatorname{ord} D^0 = \sum_{q=0}^{s'-1} (k_{q+1} - k_q)\tilde{e}'_q - k_{s'} \tilde{e}'_{s'}, \qquad k'_0 := 0,\ \tilde{e}'_0 := \beta_0,$$
$$\tilde{e}'_q := \mathrm{NWP}(\beta'_0, k_{q_1}, ..., k_{q_p} : q_j \leq q, \alpha_{k_{q_j}}(0) \neq 0),\ q = 1, ..., s'.$$

Oczywiście

$$\text{(7.17)} \qquad \tilde{e}'_q \geq \tilde{e}_q, \qquad q = 0, ..., s.$$

Niech $\beta_r = k_{q_0}$. Aby porównać (7.15) z (7.16) rozbijemy prawą stronę (7.15) na cztery składniki

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \sum_{q=0}^{q_0-1} (k_{q+1} - k_q)\tilde{e}_q + (k_{q_0+1} - k_{q_0})\tilde{e}_{q_0} + \sum_{q=q_0+1}^{s-1} (k_{q+1} - k_q)\tilde{e}_q - k_s \tilde{e}_s$$

i prawą stronę (7.16) na cztery lub pięć składników (w zależności od tego, czy $s = s'$, czy $s < s'$)

$$S'_1 + \cdots + S'_5 = \sum_{q=0}^{q_0-1} (k_{q+1} - k_q)\tilde{e}'_q + (k_{q_0+1} - k_{q_0})\tilde{e}'_{q_0} + \sum_{q=q_0+1}^{s-1} (k_{q+1} - k_q)\tilde{e}'_q$$
$$+ \sum_{q=s}^{s'-1} (k_{q+1} - k_q)\tilde{e}'_q - k_{s'} \tilde{e}'_{s'}.$$

Oczywiście $S_1 = S'_1$.

Ponieważ $\alpha_{\beta_r}(0) = \alpha_{k_{q_0}}(0) = 0$, więc $\tilde{e}_{q_0} < \tilde{e}'_{q_0}$ (bo $\tilde{e}_{q_0} = \mathrm{NWP}(\beta_0, k_1, ..., k_{q_0}) = \mathrm{NWP}(\beta_0, \beta_1, ..., \beta_r) = e_r$, zaś $\tilde{e}'_{q_0} = \mathrm{NWP}(\beta_0, k_{q_1}, ..., k_{q_p} : q_j \leq q_0, \alpha_{k_{q_j}}(0) \neq 0) \geq \mathrm{NWP}(\beta_0, k_1, ..., k_{q_0 - 1}) = \mathrm{NWP}(\beta_0, \beta_1, ..., \beta_{r-1}) = e_{r-1}$). Stąd $S_2 < S'_2$.

Z (7.17) dostajemy $S_3 \leq S'_3$.

Gdy $s = s'$, to wtedy S'_4 jest sumą pustą i $S_4 = S'_5$. Gdy zaś $s < s'$, to ponieważ $\tilde{e}'_q > 1$ dla $q \in \{s, ..., s'-1\}$ oraz $\tilde{e}_s = \tilde{e}'_{s'} = 1$, więc

$$\sum_{q=s}^{s'-1} (k_{q+1} - k_q)\tilde{e}'_q \geq \sum_{q=s}^{s'-1} (k_{q+1} - k_q) = k_{s'} - k_s = k_{s'}\tilde{e}'_{s'} - k_s\tilde{e}_s.$$

To daje nierówność $S_4 \leq S'_4 + S'_5$.

W konsekwencji $\mathrm{ord}\, D^\lambda = S_1 + \cdots + S_4 < S'_1 + \cdots + S'_5 = \mathrm{ord}\, D^0$, co przeczy (7.10).

2. $\Longrightarrow$. Załóżmy, że rodzina kiełków $\mathbf{V}^\lambda$, $\lambda \in U$, jest equisingularna. Zatem dla każdego $\lambda \in U$ ilość składowych $\mathbf{V}^\lambda$ jest taka sama. Oznaczmy tę ilość przez l. Zatem dla każdego $\lambda \in U$ istnieje otoczenie U_λ punktu $(0,0) \in \mathbb{C}^2$, że

$$f^\lambda = f_1^\lambda \dots f_l^\lambda \qquad \text{w } U_\lambda$$

gdzie $f_i^\lambda(x,y)$ są pseudowielomianami wyróżnionymi oraz dla kiełków $\mathbf{V}_i^\lambda$ zbiorów $V(f_i^\lambda)$ mamy, że $\mathbf{V}^\lambda = \mathbf{V}_1^\lambda \cup ... \cup \mathbf{V}_l^\lambda$ jest rozkładem $\mathbf{V}^\lambda$ na składowe nieprzywiedlne. Zmieniając numerację $f_1^\lambda, ..., f_l^\lambda$ możemy założyć, że dla dowolnych λ, $\lambda' \in U$, $\lambda \neq \lambda'$, $\mathbf{V}^\lambda$ i $\mathbf{V}^{\lambda'}$ są equisingularne przy tej zmienionej numeracji. Zatem z definicji equisingularności dla dowolnych λ, $\lambda' \in U$, $\lambda \neq \lambda'$

$$\beta^i(\lambda) = \beta^i(\lambda'), \qquad i = 1, ..., l \tag{7.18}$$

$$\mu_0(f_i^\lambda, f_j^\lambda) = \mu_0(f_i^{\lambda'}, f_j^{\lambda'}), \qquad i, j = 1, ..., l, \ i \neq j, \tag{7.19}$$

gdzie $\beta^i(\lambda)$ jest charakterystyką f_i^λ, zaś $\mu_0(f_i^\lambda, f_j^\lambda)$ krotnością odwzorowania $(f_i^\lambda, f_j^\lambda)$ w zerze. Wówczas dla każdego i, jeśli przez D_i^λ oznaczymy wyróżnik f_i^λ, to na mocy wzoru (7.13) na rząd wyróżnika mamy

$$\mathrm{ord}\, D_i^\lambda = \sum_{q=1}^{h^i(\lambda)} \beta_q^i(\lambda)(e_{q-1}^i(\lambda) - e_q^i(\lambda)),$$

gdzie $\beta^i(\lambda) = (\beta_0^i(\lambda), ..., \beta_{h^i(\lambda)}^i(\lambda))$ i $e_q^i(\lambda) = \mathrm{NWP}(\beta_0^i(\lambda), ..., \beta_q^i(\lambda))$. Stąd i z (7.18) $\mathrm{ord}\, D_i^\lambda$ nie zależy od λ dla $\lambda \in U$. Podobnie z (7.19) dla każdych i, j, krotność $\mu_0(f_i^\lambda, f_j^\lambda)$ nie zależy od $\lambda \in U$. Dla każdego $\lambda \in U$ oznaczmy przez $\tilde{D}^\lambda$ wyróżnik pseudowielomianu f^λ. Ponieważ f jest pseudowielomianem monicznym względem y, więc dla każdego $\lambda \in U$, mamy $D^\lambda = \tilde{D^\lambda}$. Stąd oraz ze wzoru (7.9) otrzymujemy, że dla dowolnego $\lambda \in U$ mamy

$$\operatorname{ord} D^\lambda = \operatorname{ord} \tilde{D^\lambda} = \sum_{k=1}^{l} \operatorname{ord} D_i^\lambda + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{l} \mu_0(f_i^\lambda, f_j^\lambda)$$

jest stały i nie zależy od λ. Oznacza to, że $d_N(\lambda) \neq 0$ dla każdego $\lambda \in U$.

Wniosek 7.20. *Przy założeniach twierdzenia 7.4 rodzina* $\mathbf{V}^\lambda$*,* $\lambda \in U$*, jest equisingularna wtedy i tylko wtedy* $\mu(\mathbf{V}^\lambda) \equiv \mathrm{const}$.

Dowód. Dla dowolnego $\lambda \in U$, $\widehat{f^\lambda}$ nie ma czynników wielokrotnych w $\mathcal{O}_2$, tzn. $\widehat{f^\lambda}$ jest zredukowany w $\mathcal{O}_2$. Zatem mamy ze wzoru Teissiera ([P$_1$] Lemat 3.2 lub [P$_3$], Lemma 2.1)

$$\mu_0\left(f^\lambda, \frac{\partial f^\lambda}{\partial y}\right) = \mu(f^\lambda) + \mu_0(f^\lambda, x) - 1.$$

Ponieważ $\mu_0\left(f^\lambda, \frac{\partial f^\lambda}{\partial y}\right) = \operatorname{ord} D^\lambda$ oraz $\mu_0(f^\lambda, x) = n$, więc $\operatorname{ord} D^\lambda = \mu(\mathbf{V}^\lambda) + n - 1$. Na mocy poprzedniego twierdzenia otrzymujemy tezę.

Uwaga 7.21. Wniosek, analogiczny do powyższego, z zamianą liczby Milnora $\mu(\mathbf{V}^\lambda)$ na niezmiennik $\delta(\mathbf{V}^\lambda)$ (zob. [P$_1$], [P$_3$]) nie jest prawdziwy. Wystarczy rozważyć przykład rodziny kiełków w $0 \in \mathbb{C}^2$ krzywych

$$V^\lambda := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : \ y^2 - (x^3 + 2x^2)y - x^4(\lambda - 1) = 0\}, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

dla której mamy: $\delta(\mathbf{V}^\lambda) = 2$ dla $\lambda \in \mathbb{C}$, zaś $\mu(\mathbf{V}^\lambda) = 3$ dla $\lambda \neq 0$ i $\mu(\mathbf{V}^0) = 4$. Stałość niezmiennika δ w rodzinie kiełków krzywych jest równoważna ich "słabej equirozwiązalności" (zob. [T], Th.1.3.2).

Spis literatury

[BK] E. Brieskorn, H. Knörrer, *Plane Algebraic Curves*, Birkhäuser, Basel-Boston-Stuttgart, 1986.

[K$_1$] T. Krasiński, *Poziomice wielomianów dwóch zmiennych a hipoteza jakobianowa*, Acta Universitatis Lodziensis, Wyd. UŁ, Łódź, 1991.

[K$_2$] —, *O punktach bifurkacyjnych wielomianów*, Mat. XII Konf. Szkol. z Teorii Zagadnień Ekstremalnych, Wyd. UŁ, Łódź (1991), 6–20.

[K$_3$] —, *On branches at infinity of a pencil of polynomials in two complex variables*, Ann. Pol. Math. **55** (1991), 213–220.

[LW] D. T. Lê, C. Weber, *La Conjecture pour $n = 2$*, preprint, marzec (1993).

[Ł$_1$] S. Łojasiewicz, *Desyngularyzacja geometryczna krzywej w rozmaitości*, Mat. X Konf. Szkol. z Teorii Zagadnień Ekstremalnych, Wyd. UŁ, Łódź (1989), 31–64.

[Ł$_2$] —, *Wstęp do Geometrii Analitycznej Zespolonej*, PWN, Warszawa, 1988.

[MS] A. Mostowski, M. Stark, *Elementy algebry wyższej*, Wyd. IX, PWN, Warszawa, 1977.

[P$_1$] A. Płoski, *O niezmiennikach osobliwości krzywych analitycznych*, Mat. VII Konf. Szkol. z Teorii Zagadnień Ekstremalnych, Wyd. UŁ, Łódź (1985), 80–93.

[P_2]—, *Szeregi Puiseux, diagramy Newtona i odwzorowania holomorficzne płaszczyzny* $\mathbb{C}^2$, Mat. X Konf. Szkol. z Teorii Zagadnień Ekstremalnych, Wyd. UŁ, Łódź (1989), 74–99.

[P_3]—, *The Milnor number of a plane algebraic curve*, (w tym tomie).

[Pa] W. Pawłucki, *Le théorème de Puiseux pour une application sous-analytique*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. **32** (1984), 555–560.

[T] B. Teissier, *Resolution simultanee I, II*, in: Séminaire sur les Singularités des Surfaces (M. Demazure, H. Pinkham et B. Teissier), Lecture Notes in Math. 777, Springer Verlag (1980), 71–146.

[Z] O. Zariski, *Studies in equisingularity I. Equivalent singularities of plane algebroid curves*, Amer. J. Math. **87** (1965), 507–536.

Blowing-ups and bifurcation points I. The Zariski theorem on equisingularity

Summary. In the paper basic elementary properties of blowing-ups of two-dimensional complex manifolds, and an analytic proof of the Zariski theorem on equisingularity for curves are given.

Bronisławów, 9–13 stycznia, 1995 r.