

MATERIAŁY NA XXXII KONFERENCJĘ SZKOLENIOWĄ
Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ
ZESPOŁONEJ

2011

Łódź

str. 23

KRZYWE A WĘZŁY I.
WĘZŁY TORYCZNE PIERWSZEGO RZĘDU

Tadeusz Krasieński (Łódź)

ABSTRACT. W pracy omówiony jest najprostszy typ węzłów torycznych – węzły toryczne pierwszego rzędu. Są to węzły związane z najprostszymi krzywymi lokalnymi mającymi jedną parę charakterystyczną.

1. WSTĘP

Teoria krzywych analitycznych w \mathbb{C}^2 ściśle wiąże się z teorią węzłów. Jeśli $V = V(f)$, $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$, $f \neq \text{const}$, jest krzywą lokalną opisaną przez równanie $f(x, y) = 0$ w pewnym otoczeniu U punktu $0 \in \mathbb{C}^2$, to jej część wspólna $V \cap \mathbb{S}_r^3$ z dowolną 3-wymiarową sferą $\mathbb{S}_r^3 := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : |x|^2 + |y|^2 = r^2\}$ o dostatecznie małym promieniu r jest homeomorficzna z okręgiem jednostkowym \mathbb{S}^1 (gdy V jest nieprzywiedlna) lub skończoną rozłączną sumą okręgów jednostkowych (gdy V jest przywiedlna). Zatem jest to węzeł lub splot w \mathbb{S}_r^3 . Co więcej, dla wszystkich dostatecznie małych r węzeł (splot) ten nie zależy od r z dokładnością do homeomorfizmu sfer i jednoznacznie charakteryzuje topologię V w 4-wymiarowej kuli, której brzegiem jest ta sfera. Okazuje się, że węzły te są szczególnego rodzaju. Są to tzw. węzły toryczne. W artykule omówimy najprostszy typ tych węzłów, tzw. węzły toryczne pierwszego rzędu. Są to węzły krzywych lokalnych o jednej parze charakterystycznej, w szczególności krzywych $x^n - y^m = 0$, $n, m \in \mathbb{N}$,

$NWD(n, m) = 1$. Ze względu na postać parametryzacji tych krzywych prościej jest rozważać brzegi policylindrów $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : |x| \leq r, |y| \leq r'\}$ niż sfery (są to oczywiście zbiory homeomorficzne). W punkcie pierwszym przedstawimy krótko podstawowe definicje dotyczące węzłów, a w drugim omówimy węzły toryczne pierwszego rzędu. Związek krzywych z węzłami omówimy w następnym artykule.

2. ELEMENTY TEORII WĘZŁÓW

Oznaczmy przez $\mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{2\pi i\theta} : \theta \in [0, 1]\}$ okrąg jednostkowy w \mathbb{C} , a przez \mathbb{S}^3 sferę trójwymiarową, zdefiniowaną jako przestrzeń \mathbb{R}^3 uzupełnioną punktem ∞ , tzn.

$$\mathbb{S}^3 := \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$$

z topologią Aleksandrowa. Zbiorami otwartymi w \mathbb{S}^3 są: zbiory otwarte w \mathbb{R}^3 oraz dopełnienia zbiorów zwartych w \mathbb{R}^3 uzupełnione punktem ∞ .

Węzłem nazywamy obraz homeomorficzny okręgu \mathbb{S}^1 w \mathbb{S}^3 tzn. podzbiór $W \subset \mathbb{S}^3$ taki, że $W = \Phi(\mathbb{S}^1)$, gdzie

$$\Phi : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^3$$

jest homeomorfizmem na obraz. *Splotem* nazywamy skończoną liczbę rozłącznych węzłów. Zatem węzeł jest szczególnym przypadkiem splotu.



Węzeł
(koniczynka)



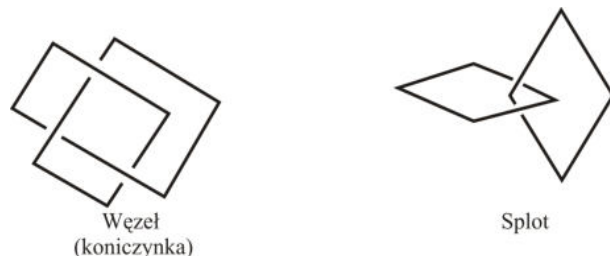
Splot

Dwa węzły (sploty) W_1, W_2 nazywamy *równoważnymi*, gdy istnieje homeomorfizm $F : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ taki, że $F(W_1) = W_2$. Mówimy wtedy, że węzły (sploty) mają ten sam *typ*. Oznaczamy to $W_1 \sim W_2$. *Węzłem trywialnym* nazywamy węzeł

$$\mathbb{S}^1 \ni e^{2\pi i\theta} \mapsto (\cos \theta, \sin \theta, 0) \in \mathbb{S}^3$$

Ponieważ dalej będziemy rozważać tylko węzły analityczne, tzn. funkcje $\Phi : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^3$ są analityczne, więc wystarczy ograniczyć się do węzłów będących

łamanymi. Wynika to z faktu, że każdy węzeł klasy C^1 (w szczególności analityczny) jest równoważny węzłowi będącemu łamaną ([CF], App. 1).

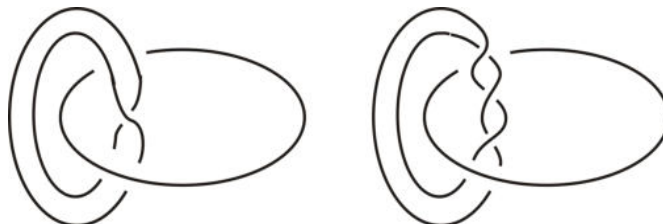


Aby odróżnić węzły (a dokładniej typy węzłów) definiuje się różne niezmienniki węzłów i splotów. Jeśli każdemu węzłowi (odp. splotowi) W , będącemu łamaną, przypiszemy element $\kappa(W)$ pewnego zbioru X w taki sposób, że jeśli $W_1 \sim W_2$ to $\kappa(W_1) = \kappa(W_2)$, to funkcję κ nazywamy *niezmiennikiem węzłów*.

Podstawowym niezmiennikiem węzłów jest dopełnienie węzła $\mathbb{S}^3 \setminus W$, traktowane jako przestrzeń topologiczna wyposażona w topologię naturalną. Jest to zupełny niezmiennik węzłów, gdyż zachodzi podstawowe w teorii węzłów twierdzenie (zob. [GL]).

Twierdzenie 2.1. *Dwa węzły są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy ich dopełnienia są homeomorficzne.*

Niestety, powyższe twierdzenie nie jest prawdziwe dla splotów. Następujące dwa sploty nie są równoważne, lecz mają homeomorficzne dopełnienia [R], str. 49.



Słabszym niezmiennikiem węzłów (splotów) jest grupa podstawowa dopełnienia węzła (splotu). Oznaczamy ją $\pi(W)$ i nazywamy *grupą węzła (splotu)*. Zatem

$$\pi(W) := \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus W; *),$$

gdzie $*$ jest dowolnym punktem dopełnienia węzła (splotu). Ponieważ $\mathbb{R}^3 \setminus W$ jest zbiorem łukowo spójnym, więc z dokładnością do izomorfizmu definicja ta nie zależy od wyboru punktu $*$. Grupa węzła (splotu) nie jest zupełnym niezmiennikiem węzła (splotu). Istnieją węzły mające izomorficzne grupy lecz nie będące równoważnymi (zob. [CF], VIII, 4.8).

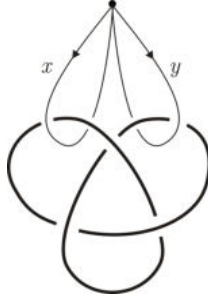
Istnieją ogólne metody wyznaczania grupy węzła (splotu) poprzez podanie generatorów tej grupy i relacji między nimi (np. metoda Wirtingera, zob np. [D], [CF]). Ponieważ w przypadku węzłów (splotów) związanych z krzywymi analitycznymi będziemy bezpośrednio wyznaczać generatory i relacje między nimi, więc

nie przedstawiamy tych metod. Dla ilustracji podamy tylko dwa różne przedstawienia grupy tego samego węzła - koniczynki:

Przykład 2.2. I przedstawienie grupy węzła koniczynki W . Mamy

$$\pi(W) = \mathcal{F}(x, y) / (xyxy^{-1}x^{-1}y^{-1})$$

gdzie x, y są pętlami przedstawionymi na rysunku

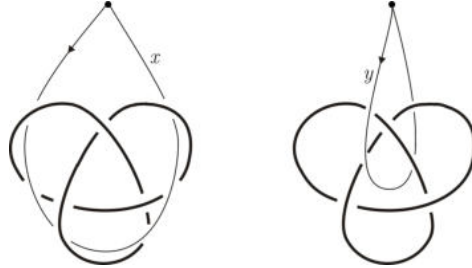


a $\mathcal{F}(x, y)$ oznacza grupę wolną (nieabelową) generowaną przez dwa elementy x, y , a $(xyxy^{-1}x^{-1}y^{-1})$ oznacza najmniejszy dzielnik normalny w $\mathcal{F}(x, y)$ zawierający $xyxy^{-1}x^{-1}y^{-1}$.

Przykład 2.3. II przedstawienie grupy węzła koniczynki W . Mamy również

$$\pi(W) = \mathcal{F}(x, y) / (x^2y^{-3})$$

gdzie x, y są pętlami przedstawionymi na rysunku.



Mimo, że grupa węzła (splotu) nie jest zupełnym niezmiennikiem węzła, jednak w przypadku klasy węzłów odpowiadających krzywym analitycznym lokalnym jest takim niezmiennikiem. Ponieważ grupy te są nadal trudne do odróżnienia (tzn. trudno rozstrzygnąć na podstawie znajomości generatorów i relacji czy dane dwie grupy są czy nie są izomorficzne), więc rozważymy jeszcze słabszy niezmiennik węzłów - wielomian Aleksandra węzła. Jego definicja jest następująca.

Oznaczmy przez $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x_1, \dots, x_n)$ grupę wolną o n generatorach x_1, \dots, x_n . Niech $G = \mathcal{F}(x_1, \dots, x_n) / (r_1, \dots, r_m)$ będzie dowolną grupą o generatorach x_1, \dots, x_n i relacjach $r_1, \dots, r_m \in \mathcal{F}(x_1, \dots, x_n)$ (przez (r_1, \dots, r_m) oznaczyliśmy najmniejszy dzielnik normalny w grupie $\mathcal{F}(x_1, \dots, x_n)$ zawierający elementy r_1, \dots, r_m). Dodając trywialne relacje np. $x_1x_1^{-1}$ możemy założyć, że $m \geq n - 1$.

W pierścieniu grupowym $\mathbb{Z}[\mathcal{F}]$ definiujemy *formalne różniczkowanie*. Określamy je najpierw na elementach $\mathcal{F} \subset \mathbb{Z}[\mathcal{F}]$, a następnie przedłużamy w naturalny sposób na cały pierścień $\mathbb{Z}[\mathcal{F}]$. Dla dowolnego elementu $g \in \mathcal{F}$ zapisujemy go w następujący sposób

$$g = x_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots x_{i_k}^{\varepsilon_k}, \quad \varepsilon_j = \pm 1,$$

i następnie definiujemy

$$\frac{\partial g}{\partial x_j} := \varepsilon_1 \delta_{j i_1} x_{i_1}^{(\varepsilon_1-1)/2} + x_{i_1}^{\varepsilon_1} \varepsilon_2 \delta_{j i_2} x_{i_2}^{(\varepsilon_2-1)/2} + \dots + x_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots x_{i_{k-1}}^{\varepsilon_{k-1}} \varepsilon_k \delta_{j i_k} x_{i_k}^{(\varepsilon_k-1)/2} \in \mathbb{Z}[G].$$

W szczególności

$$\frac{\partial (xx^{-1})}{\partial x} = 1 - xx^{-1} = 0,$$

co dowodzi poprawności określenia formalnego różniczkowania. Dla ilustracji rozważmy następujące ważne przykłady.

Przykład 2.4. W $\mathcal{F}(x, y)$ dla $n, m \in \mathbb{N}$ mamy:

1. Jeśli $g = x^n$, to $\frac{\partial g}{\partial x} = 1 + x + \dots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}$.
2. Jeśli $g = y^{-m}$, to $\frac{\partial g}{\partial y} = -y^{-1} - y^{-2} - \dots - y^{-m} = -y^{-m} \frac{y^m - 1}{y - 1} = -\mathbf{g} \frac{y^m - 1}{y - 1}$.
3. Jeśli $g = x^n y^{-m}$, to

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 1 + x + \dots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1},$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = -x^n y^{-1} - x^n y^{-2} - \dots - x^n y^{-m} = -x^n y^{-m} \frac{y^m - 1}{y - 1} = -\mathbf{g} \frac{y^m - 1}{y - 1}.$$

Dla grupy $G = \mathcal{F}(x_1, \dots, x_n) / (r_1, \dots, r_m)$, $m \geq n - 1$, określamy macierz o wyrazach w $\mathbb{Z}[\mathcal{F}]$

$$M_G := \begin{bmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial r_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial r_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial r_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Przykład 2.5. Niech $G = \mathcal{F}(x, y) / (x^2 y^{-3})$. Wtedy M_G jest macierzą 1×2 .

$$M_G = [1 + x, x^2(-y^{-1} - y^{-2} - y^{-3})] = \left[\frac{x^2 - 1}{x - 1}, -x^2 y^{-3} \frac{y^3 - 1}{y - 1} \right].$$

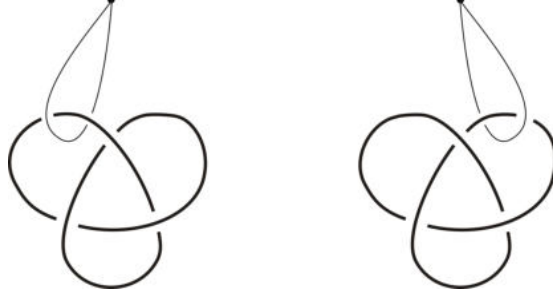
Ponieważ będziemy używać minorów macierzy M_G , a wyznaczniki mają "dobre własności" w pierścieniach przemiennych, więc dokonujemy abelianizacji grupy G , tzn. dzielimy grupę G przez jej *komutator* $[G : G] := (xyx^{-1}y^{-1} : x, y \in G) \subset \mathcal{F}$. Otrzymujemy grupę abelową

$$G' := G/[G : G]$$

i odpowiadający jej pierścień grupowy $\mathbb{Z}[G']$, oczywiście przemienny.

W przypadku, gdy $G = \pi(W) = \mathcal{F}(x_1, \dots, x_n) / (r_1, \dots, r_m)$ jest grupą węzła W , to grupa abelowa G' jest izomorficzna z \mathbb{Z} i jej generatorem jest każda pętla

obejmująca jedną nić węzła, np. w przypadku koniczynki są takimi następujące



Wynika to z pewnych faktów topologii algebraicznej. Jak wiadomo abelianizacja grupy podstawowej $\pi_1(X)$ "dobrej" przestrzeni topologicznej X (np. rozmaitości topologicznej, a taką jest dopełnienie węzła) jest izomorficzna z pierwszą grupą homologii X , tzn.

$$\pi_1(X)' = \pi_1(X)/[\pi_1(X) : \pi_1(X)] \cong H_1(X, \mathbb{Z}).$$

W przypadku, gdy $X = \mathbb{R}^3 \setminus W$ jest dopełnieniem węzła, to można nietrudno wykazać, że $H_1(\mathbb{R}^3 \setminus W, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. Wynika to również dualności Aleksandera

$$H_1(\mathbb{R}^3 \setminus W, \mathbb{Z}) \cong H^1(W, \mathbb{Z}) \cong H^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}.$$

Zatem w przypadku $G = \pi(W)$, wybierając jeden z generatorów G' otrzymujemy dla pierścienia grupowego $\mathbb{Z}[G']$ izomorfizm

$$\mathbb{Z}[G'] \cong \mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$$

Ale pierścień grupowy $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$ jest izomorficzny z *pierścieniem wielomianów Laurenta* $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$. Nietrudno wykazać, że $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ ma następujące własności.

Własność 2.6. 1. Jedynymi elementami odwracalnymi w $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ są potęgi $\pm t^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

2. Każdy element $A(t) \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ ma jednoznaczne przedstawienie w postaci

$$A(t) = t^n \tilde{A}(t), \text{ gdzie } n \in \mathbb{Z} \text{ i } \tilde{A}(t) \in \mathbb{Z}[t], \tilde{A}(0) \neq 0.$$

3. Wielomian $A(t) \in \mathbb{Z}[t]$ jest nierozkładalny w $\mathbb{Z}[t]$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest nierozkładalny w $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$.

4. Pierścień $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ jest pierścieniem z jednoznacznością rozkładu.

Po rozszerzeniu kanonicznych homomorfizmów $\mathcal{F} \rightarrow G \rightarrow G' \rightarrow \mathbb{Z}$ do homomorfizmów pierścieni grupowych $\mathbb{Z}[\mathcal{F}] \rightarrow \mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z}[G'] \rightarrow \mathbb{Z}[\mathbb{Z}] \rightarrow \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ oraz zastosowaniu tego ostatniego ciągu homomorfizmów do elementów macierzy M_G otrzymamy macierz

$$M'_G := \begin{bmatrix} A_{11}(t) & \dots & A_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{m1}(t) & \dots & A_{mn}(t) \end{bmatrix}$$

o elementach będących wielomianami Laurenta. Nazywamy ją *macierzą Aleksandra* G . Macierz ta ma podstawowe znaczenie w teorii węzłów na mocy następującego twierdzenia (zob. [CF], Rozdział VII).

Twierdzenie 2.7. *Ideał $E \subset \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ generowany przez minory stopnia $n - 1$ macierzy M'_G nie zależy od wyboru generatorów x_1, \dots, x_n i relacji r_1, \dots, r_m grupy G , czyli zależy tylko od grupy G .*

Uwaga 2.8. *Prawdziwe jest znacznie ogólniejsze twierdzenie. Ideały $E_k \subset \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ generowane przez minory stopni $n - k$ macierzy M'_G dla $k = 1, \dots, n - 1$ (zwane ideałami elementarnymi macierzy M'_G) również nie zależą od wyboru generatorów x_1, \dots, x_n i relacji r_1, \dots, r_m grupy G . Zauważmy, że $E_1 = E$.*

Ponieważ ideały elementarne $E_k, k = 1, \dots, n - 1$, są również trudne do wyznaczenia, więc rozważa się jeszcze słabsze niezmienniki węzłów. Mianowicie, największe wspólne dzielniki minorów stopni $n - k$ macierzy M'_G dla $k = 1, \dots, n - 1$. Są to pewne wielomiany Laurenta $A_k, k = 1, \dots, n - 1$, wyznaczone z dokładnością do elementów odwracalnych, czyli potęg $t^n, n \in \mathbb{Z}$. Pierwszy z nich A_1 nazywamy *wielomianem Aleksandra węzła* W i oznaczamy A_W . Zatem

$$A_W(t) = \text{NWD}(M_1, \dots, M_k) \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}],$$

gdzie M_1, \dots, M_k są minorami stopnia $n - 1$ macierzy M'_G . Ponieważ A_W jest określony z dokładnością do potęg $\pm t^n, n \in \mathbb{Z}$, więc wybieramy zawsze jego znormalizowaną postać, tzn. taki, który jest zwykłym wielomianem o wyrazie wolnym różnym od zera i najwyższym współczynnikiem dodatnim. Zatem ostatecznie

$$A_W(t) \in \mathbb{Z}[t], \quad A_W(0) \neq 0, \quad \text{in } A_W(t) > 0.$$

Na przykład znormalizowaną postacią wielomianu Laurenta $t^{-2} + 2t^{-1} - 3t$ będzie $-1 - 2t + 3t^3$.

Wprost z twierdzenia 2.7 otrzymujemy

Własność 2.9. *Jeśli dla węzłów W_1 i W_2 mamy $\pi(W_1) \cong \pi(W_2)$, to $A_{W_1} = A_{W_2}$.*

Przykład 2.10. *Dla węzła koniczynki W mamy dwa przedstawienia jego grupy.*

I przedstawienie: $\pi(W) = \mathcal{F}(x, y) / (xyxy^{-1}x^{-1}y^{-1})$. W tym przypadku mamy

$$M_{\pi(W)} = [1 + xy - xyxy^{-1}x^{-1}, x - xyxy^{-1} - xyxy^{-1}x^{-1}y^{-1}]$$

Ponieważ generatorem $\pi(W)' = \pi(W) / [\pi(W) : \pi(W)]$ jest klasa $[x]$ (może to być również klasa $[y] = [x]$), więc oznaczając $t = [x]$ mamy

$$M'_{\pi(W)} = [1 + t^2 - t, t - t^2 - 1].$$

Stąd

$$A_W(t) = t^2 - t + 1 = \frac{(t^6 - 1)(t - 1)}{(t^2 - 1)(t^3 - 1)}.$$

II przedstawienie: $\pi(W) = \mathcal{F}(x, y) / (x^2y^{-3})$. W tym przypadku mamy

$$M_{\pi(W)} = [1 + x, x^2(-y^{-1} - y^{-2} - y^{-3})]$$

W tym przypadku ani $[x]$ ani $[y]$ nie są generatorami $\pi(W)'$. Jeśli wybierzemy jako generator pętlę x z poprzedniego przedstawienia (dla odróżnienia oznaczmy ją przez \tilde{x} i przyjmijmy jak poprzednio $t = [\tilde{x}]$), to $[x] = t^3$ i $[y] = t^2$. Wtedy

$$M'_{\pi(W)} = [1 + t^3, -t^4 - t^2 - 1] = \left[\frac{t^6 - 1}{t^3 - 1}, -\frac{t^6 - 1}{t^2 - 1} \right].$$

Stąd

$$A_W(t) = \frac{(t^6 - 1)(t - 1)}{(t^2 - 1)(t^3 - 1)} = t^2 - t + 1.$$

3. WĘZŁY TORYCZNE PIERWSZEGO RZĘDU

W tym paragrafie omówimy szczególny typ węzłów, tzw. węzły toryczne, związane z osobliwościami krzywych. Zaczniemy od najprostszych z nich – węzłów torycznych pierwszego rzędu.

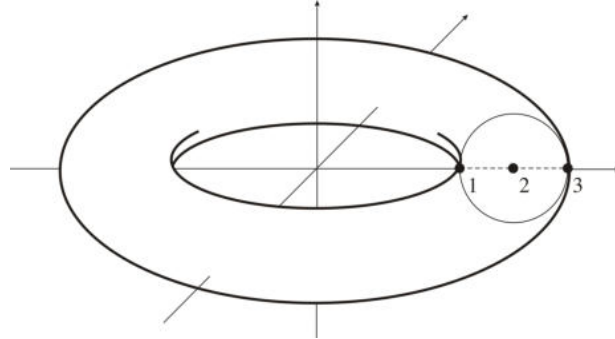
Przez T i \mathbb{T} oznaczamy *torus* i *pełny torus* w \mathbb{C}^2 określone następująco

$$\begin{aligned} T &:= \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : |x| = 1, |y| = 1\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : x = e^{2\pi i \eta}, y = e^{2\pi i \theta}, 0 \leq \eta, \theta \leq 1\}, \\ \mathbb{T} &:= \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : |x| = 1, |y| \leq 1\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : x = e^{2\pi i \eta}, y = r e^{2\pi i \theta}, 0 \leq \eta, \theta \leq 1, 0 \leq r \leq 1\}. \end{aligned}$$

Zarówno T jak i \mathbb{T} leżą w brzegu ∂P policylindra $P = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$. Ponieważ ∂P jest homeomorficzne z \mathbb{S}^3 (zob. dalej), więc każdy węzeł w T lub w \mathbb{T} może być rozważany jako węzeł w \mathbb{S}^3 . Jednak zależy to od wybranego homeomorfizmu ∂P z \mathbb{S}^3 . Dla konkretnych obliczeń i graficznego przedstawienia wybierzemy taki, że poprzez ten homeomorfizm T i \mathbb{T} przejdą na *standardowy torus* T^{st} i *standardowy pełny torus* \mathbb{T}^{st} określone parametrycznie w \mathbb{R}^3 następująco

$$\begin{aligned} T^{st} : \quad x_1 &= (2 + \cos 2\pi\theta) \cos 2\pi\eta, \\ x_2 &= (2 + \cos 2\pi\theta) \sin 2\pi\eta, \quad 0 \leq \eta, \theta \leq 1 \\ x_3 &= \sin 2\pi\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{T}^{st} : \quad x_1 &= (2 + r \cos 2\pi\theta) \cos 2\pi\eta, \\ x_2 &= (2 + r \cos 2\pi\theta) \sin 2\pi\eta, \quad 0 \leq \eta, \theta \leq 1, 0 \leq r \leq 1 \\ x_3 &= r \sin 2\pi\theta \end{aligned}$$



Odwzorowanie

$$F : \partial P \rightarrow \mathbb{S}^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$$

określimy oddzielnie na $(\partial P)_1$ i na $(\partial P)_2$, gdzie $\partial P = (\partial P)_1 \cup (\partial P)_2$ oraz

$$\begin{aligned} (\partial P)_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : |x| = 1, |y| \leq 1\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : x = e^{2\pi i \eta}, y = r e^{2\pi i \theta}, 0 \leq \eta, \theta \leq 1, 0 \leq r \leq 1\}, \\ (\partial P)_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : |x| \leq 1, |y| = 1\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : x = r e^{2\pi i \eta}, y = e^{2\pi i \theta}, 0 \leq \eta, \theta \leq 1, 0 \leq r \leq 1\}, \end{aligned}$$

Na $(\partial P)_1$ homeomorfizm F określamy wzorem

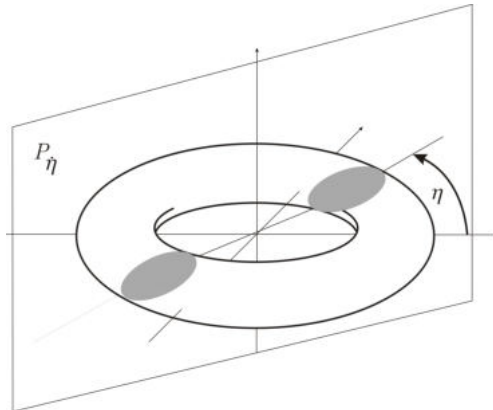
$$\begin{aligned} F|_{(\partial P)_1}(e^{2\pi i \eta}, r e^{2\pi i \theta}) &:= ((2 + r \cos 2\pi \theta) \cos 2\pi \eta, (2 + r \cos 2\pi \theta) \sin 2\pi \eta, r \sin 2\pi \theta), \\ &0 \leq \eta, \theta \leq 1, 0 \leq r \leq 1. \end{aligned}$$

Przekształca on $(\partial P)_1 = \mathbb{T}$ na standardowy pełny torus \mathbb{T}^{st} .

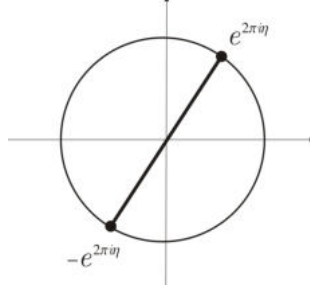
Określimy teraz F na $(\partial P)_2$. Ma on przekształcać $(\partial P)_2$ na zewnętrzne pełnego torusa w $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$. Określimy homeomorfizm odwrotny

$$(F|_{(\partial P)_2})^{-1} : \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} \setminus \text{Int}(\mathbb{T}^{st}) \rightarrow (\partial P)_2.$$

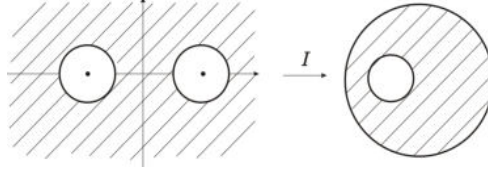
Wystarczy zdefiniować $(F|_{(\partial P)_2})^{-1}$ na cięciach zbioru $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} \setminus \text{Int}(\mathbb{T}^{st})$ płaszczyznami P_η przechodzącymi przez oś $0z$



tak by cięcia te, będące płaszczyznami z usuniętymi dwoma kołami, przechodziły na iloczyny kartezjańskie odcinków $[e^{2\pi i\eta}, -e^{2\pi i\eta}]$ na płaszczyźnie \mathbb{C}



z okręgiem jednostkowym, czyli na dowolny pierścień. W płaszczyźnie P_η realizuje to np. standardowa inwersja I względem okręgu o środku w punkcie 2 i promieniu 1



po złożeniu z homeomorfizmem przekształcającym ten ostatni zbiór na iloczyn kartezjański $[e^{2\pi i\eta}, -e^{2\pi i\eta}] \times S^1$. Ten ostatni homeomorfizm można tak dobrać, by otrzymany w konsekwencji homeomorfizm $F|_{(\partial P)_2}$ był identyczny z $F|_{(\partial P)_1}$ na wspólnej części ich dziedzin, czyli na torusie T . To kończy konstrukcję homeomorfizmu F .

Dla każdego węzła W w ∂P mamy odpowiadający mu (za pomocą F) węzeł w S^3 . W szczególności węzłowi

$$\mathbb{S}^1 \ni e^{2\pi it} \mapsto (e^{2\pi it}, 0) \in \partial P$$

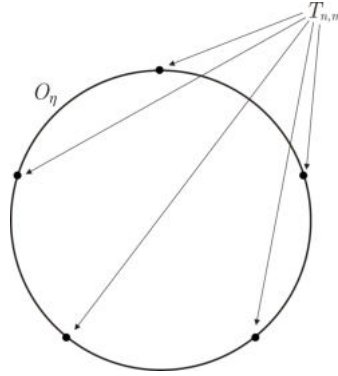
odpowiada węzeł trywialny w S^3 . Gdy $W \subset T$ lub $W \subset \mathbb{T}$, to otrzymamy węzły w \mathbb{R}^3 leżące w T^{st} lub w \mathbb{T}^{st} .

Rozważmy teraz najprostsze węzły toryczne. Niech $n, m \in \mathbb{N}$ będą liczbami względnie pierwszymi, tzn. $\text{NWD}(n, m) = 1$. Wówczas $\Phi : S^1 \rightarrow \partial P$ określone wzorem

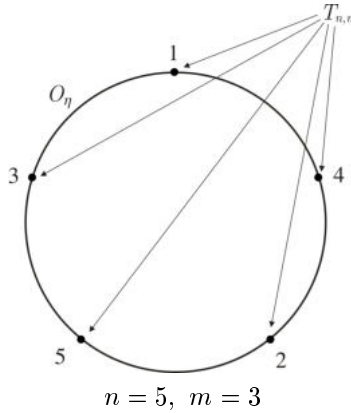
$$\Phi(e^{2\pi it}) := (e^{2\pi int}, e^{2\pi imt}), \quad t \in [0, 1]$$

jest różnowartościowe (z wyjątkiem krańców) na mocy własności funkcji wykładniczej i oczywiście ciągle, a zatem homeomorfizmem okręgu na obraz, a więc Φ definiuje węzeł w ∂P . Oznaczamy go przez $T_{n,m}$ i parę (n, m) nazywamy jego *typem*. Oczywiście $T_{n,m}$ leży w T . Dla każdego okręgu $O_\eta := \{(e^{2\pi i\eta}, e^{2\pi i\theta}) : \theta \in [0, 1]\}$, $\eta \in [0, 1]$, część wspólna $O_\eta \cap T_{n,m}$ składa się z n punktów rozmieszczonych symetrycznie oraz podobnie dla każdego okręgu $O_\theta := \{(e^{2\pi i\eta}, e^{2\pi i\theta}) :$

$\eta \in [0, 1]$ $\theta \in [0, 1]$, część wspólna $O_\theta \cap T_{n,m}$ składa się z m punktów rozmieszczonych symetrycznie



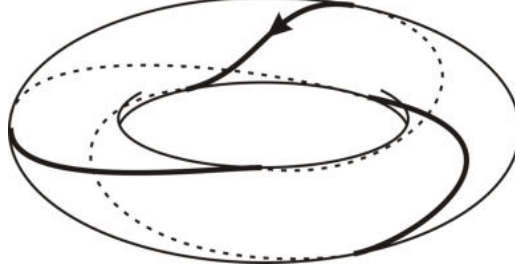
Dowolny z tych punktów $(e^{2\pi i\eta}, e^{2\pi i\theta}) = (e^{2\pi int_0}, e^{2\pi imt_0})$ po obiegnięciu raz okręgu (tzn. dla $t \in [t_0, t_0 + \frac{1}{n}]$) przechodzi w punkt różniący się od wyjściowego o kąt $\frac{2\pi m}{n}$ (o m/n obrotu). Na przykład jeśli w powyższym rysunku przyjmiemy, że $n = 5$ i $m = 3$, to kolejność punktów będzie następująca (wybierając pierwszy punkt dowolnie)



Poprzez homeomorfizm F otrzymamy węzeł w \mathbb{S}^3 leżący w T^{st} . Oznaczamy go tym samym symbolem $T_{n,m}$ i nazywamy *węzłem torycznym typu (n, m)* . Zatem jest on zadany w \mathbb{S}^3 wzorem

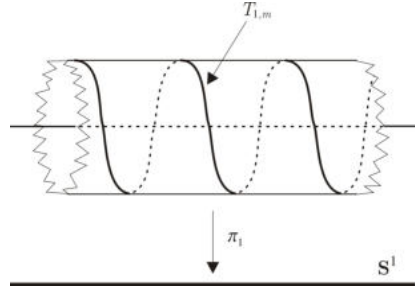
$$F \circ \Phi(e^{2\pi it}) = ((2 + \cos 2\pi mt) \cos 2\pi nt, (2 + \cos 2\pi mt) \sin 2\pi nt, \sin 2\pi mt), t \in [0, 1].$$

Na przykład węzeł $T_{2,3}$



Uwaga 3.1. Można wykazać, że na torusie T węzły innych typów (tzn. węzły $T_{n,m}$ dla $\text{NWD}(n,m) > 1$) nie istnieją (zob. [Rol], str. 19).

Uwaga 3.2. Nietrudno wykazać, że węzły $T_{n,m}$ dla $n = 1$ lub $m = 1$ są trywialne.



Zanim przejdziemy do wyznaczenia grupy fundamentalnej węzła $T_{n,m}$ musimy podać pewne własności torusa T , a w szczególności własności *uniwersalnego nakrycia torusa*. Jest to odwzorowanie

$$p: \mathbb{R}^2 \rightarrow T,$$

$$p(\eta, \theta) := (e^{2\pi i \eta}, e^{2\pi i \theta}), \quad (\eta, \theta) \in \mathbb{R}^2.$$

Zauważmy, że $p(\eta, \theta) = p(\eta', \theta')$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(\eta, \theta) - (\eta', \theta') \in \mathbb{Z}^2$. Mówimy wtedy, że punkty (η, θ) i (η', θ') na płaszczyźnie \mathbb{R}^2 są *równoważne*. Odwzorowanie p ma następujące znane własności:

1. Dla każdego $z \in T$ istnieje jego otoczenie U takie, że $p^{-1}(U)$ jest sumą rozłączną $\bigcup V_i$ zbiorów otwartych i rozłącznych takich, że $p|_{V_i}: V_i \rightarrow U$ jest homeomorfizmem (jest to definicja nakrycia),

2. Dla każdej krzywej $\gamma: [0, 1] \rightarrow T$ i dowolnego punktu $(\eta, \theta) \in p^{-1}(\gamma(0))$ istnieje dokładnie jedna krzywa $\hat{\gamma}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ taka, że $\hat{\gamma}(0) = (\eta, \theta)$ i $p \circ \hat{\gamma} = \gamma$ ($\hat{\gamma}$ nazywamy *podniesieniem krzywej γ o początku w (η, θ)*),

3. Niech $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow T$ będzie *homotopią w T* , tzn. H jest ciągłe i $H([0, 1] \times \{0\})$, $H([0, 1] \times \{1\})$ są pojedynczymi punktami. Oznaczmy przez $\gamma_s: [0, 1] \rightarrow T$, $s \in [0, 1]$, krzywe wyznaczone przez tę homotopię, $\gamma_s(t) := H(s, t)$, $t \in [0, 1]$, oraz niech $\hat{\gamma}_s$ będą podniesieniami krzywych γ_s o tym samym początku. Wówczas $\hat{\gamma}_0$ i $\hat{\gamma}_1$ są homotopijne oraz $\hat{\gamma}_0(1) = \hat{\gamma}_1(1)$.

4. Grupa fundamentalna $\pi_1(T)$ torusa T jest izomorficzna z \mathbb{Z}^2 . Jej generatorami są krzywe $\alpha(t) := (e^{2\pi it}, 1)$ i $\beta(t) := (1, e^{2\pi it})$, $t \in [0, 1]$, zwane *równikiem* i *południkiem* torusa.

5. Jeśli γ jest dowolną krzywą zamkniętą w T oraz $\gamma = n\alpha + m\beta$, $n, m \in \mathbb{Z}$ w $\pi_1(T)$ (działanie w grupie zapisujemy addytywnie, gdyż jest to grupa przemienna), to liczby n, m są scharakteryzowane za pomocą p następująco. Niech $\hat{\gamma}$ będzie podniesieniem γ o początku w $(\eta_0, \theta_0) \in p^{-1}(\gamma(0))$. Ponieważ $\gamma(0) = \gamma(1)$, więc $\hat{\gamma}(1) - \hat{\gamma}(0) \in \mathbb{Z}^2$. Wówczas $\hat{\gamma}(1) - \hat{\gamma}(0) = (n, m)$. Mówimy wówczas, że γ *obiega torus T n -razy wzdłuż i m -razy wokół*.

6. Grupa podstawowa pełnego torusa \mathbb{T} , tzn. $\pi_1(\mathbb{T})$ jest izomorficzna z \mathbb{Z} i jej generatorem jest pętla α . Dla dowolnej pętli κ w \mathbb{T} o tym samym początku co i α , mamy $\kappa = \alpha^n$, gdzie n jest indeksem krzywej będącej rzutem κ na \mathbb{C} za pomocą π_1 względem punktu $0 \in \mathbb{C}$ ($n = \text{Ind}_0 \pi_1 \circ \kappa$).

7. Grupa podstawowa dopełnienia pełnego torusa \mathbb{T} w ∂P , tzn. $\pi_1(\partial P \setminus \mathbb{T})$ jest izomorficzna z \mathbb{Z} i jej generatorem jest pętla β . Podobnie jak powyżej dla dowolnej pętli κ w $\partial P \setminus \mathbb{T}$ o tym samym początku co i β , mamy $\kappa = \beta^n$, gdzie n jest indeksem krzywej będącej rzutem κ na \mathbb{C} za pomocą π_2 względem punktu $0 \in \mathbb{C}$.

Podamy teraz pewne dodatkowe własności węzła $T_{n,m}$.

Lemat 3.3. *Zbiór $p^{-1}(T_{n,m})$ składa się z rodziny prostych równoległych*

$$L_k := \{(\eta, \theta) \in \mathbb{R}_{(\eta, \theta)}^2 : \theta = \frac{m}{n}\eta + \frac{k}{n}\}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Dowód. Jeśli $(\eta, \theta) \in p^{-1}(T_{n,m})$, to istnieje $t \in [0, 1]$ takie, że $(e^{2\pi i n t}, e^{2\pi i \theta}) = (e^{2\pi i n t}, e^{2\pi i m t})$. Z własności funkcji wykładniczej otrzymujemy, że $\eta = nt + r$, $\theta = mt + s$, $r, s \in \mathbb{Z}$. Stąd

$$\theta = \frac{m}{n}\eta + \frac{ns - mr}{n},$$

czyli $(\eta, \theta) \in L_{ns - mr}$.

Na odwrót, jeśli $\theta = \frac{m}{n}\eta + \frac{k}{n}$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$, to przyjmując $t = \frac{\eta}{n} + \frac{ka}{n}$, gdzie $a, b \in \mathbb{Z}$ i $am - bn = 1$ (takie a, b istnieją, bo $\text{NWD}(n, m) = 1$), otrzymujemy

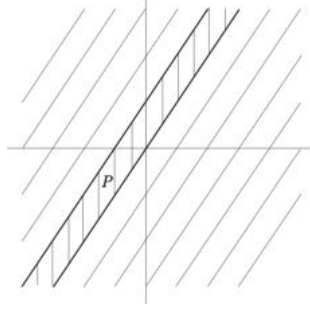
$$\begin{aligned} e^{2\pi i n t} &= e^{2\pi i(\eta + ka)} = e^{2\pi i \eta}, \\ e^{2\pi i m t} &= e^{2\pi i(mt - kb)} = e^{2\pi i(\frac{m}{n}\eta + \frac{k(am - bn)}{n})} = e^{2\pi i(\frac{m}{n}\eta + \frac{k}{n})} = e^{2\pi i \theta}. \end{aligned}$$

Zatem $(\eta, \theta) \in p^{-1}(T_{n,m})$. ■

Lemat 3.4. *Dla dowolnych $P, Q \in T \setminus T_{n,m}$ istnieje krzywa łącząca P, Q w $T \setminus T_{n,m}$.*

Dowód. Niech $p : \mathbb{R}_{(\eta, \theta)}^2 \rightarrow T$ będzie uniwersalnym nakryciem torusa. Wówczas na mocy lematu 3.3 $p^{-1}(T_{n,m})$ jest rodziną prostych równoległych L_k , $k \in \mathbb{Z}$, w płaszczyźnie $\mathbb{R}_{(\eta, \theta)}^2$. Każdy z pasów zawartych między sąsiednimi prostymi równoległymi jest oczywiście zbiorem wypukłym. Zatem dowolne dwa jego punkty można połączyć odcinkiem. Wówczas obraz tego odcinka (za pomocą p) będzie oczywiście krzywą w T łączącą obrazy końców tego odcinka. Zatem wystarczy wykazać, że

obraz każdego pasa (otwartego) jest równy $T \setminus T_{n,m}$. Dla uproszczenia zapisów rozważmy pas $\mathbf{P} := \{(\eta, \theta) : \eta \in \mathbb{R}, \frac{m}{n}\eta < \theta < \frac{m}{n}\eta + \frac{1}{n}\}$



Weźmy dowolny punkt $Q = (e^{2\pi i\eta}, e^{2\pi i\theta}) \in T \setminus T_{n,m}$. Musimy wykazać, że istnieje punkt $(\eta', \theta') \in \mathbf{P}$ taki, że $(\eta' - \eta, \theta' - \theta) \in \mathbb{Z}^2$. Ponieważ $\text{NWD}(n, m) = 1$, więc istnieją $a, b \in \mathbb{N}$ takie, że

$$(1) \quad am - bn = 1.$$

Oznaczmy $s := [n\theta - m\eta]$. Wówczas punkt $(\eta', \theta') := (\eta + as, \theta + bs)$ spełnia warunki:

1. $p(\eta', \theta') = p(\eta, \theta) = Q$,
2. $(\eta', \theta') \in \mathbf{P}$.

Pierwszy warunek jest oczywisty, a drugi wynika z ciągu nierówności

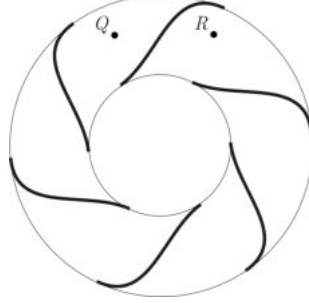
$$\begin{aligned} 0 &< n\theta - m\eta - [n\theta - m\eta] < 1, \\ 0 &< n\theta - m\eta - s < 1, \\ 0 &< n\theta - m\eta - s(am - bn) < 1, \\ m\eta + mas &< n\theta + nbs < m\eta + mas + 1, \\ \frac{m}{n}(\eta + as) &< \theta + bs < \frac{m}{n}(\eta + as) + \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Pierwsza nierówność jest oczywista, bo $n\theta - m\eta \notin \mathbb{Z}$ (na mocy założenia, że $(\eta, \theta) \notin T_{n,m}$). ■

Rozważmy w szczególności dwa punkty Q, R na torusie nienależące do $T_{n,m}$ różniące się tylko argumentem $\frac{2\pi}{m}$ pierwszej współrzędnej. Zatem

$$\begin{aligned} Q &:= (e^{2\pi i\eta}, e^{2\pi i\theta}) \notin T_{n,m}, \\ R &:= (e^{2\pi i(\eta - \frac{1}{m})}, e^{2\pi i\theta}) \notin T_{n,m} \end{aligned}$$

Leżą one na okręgu $\{(e^{2\pi it}, e^{2\pi i\theta}), t \in [0, 1]\}$, i są przedzielone "jedną nicią" węzła $T_{n,m}$ (na tym okręgu leży m punktów $T_{n,m}$ rozmieszczonych symetrycznie).



Lemat 3.5. Dla powyżej określonych punktów $Q, R \notin T_{n,m}$ krzywą łączącą Q, R w $T \setminus T_{n,m}$ jest obraz odcinka $[(\eta, \theta), (\eta - \frac{1}{m} + a, \theta + b)]$ za pomocą p .

Dowód. Oczywiście $p(\eta, \theta) = Q$ i $p(\eta - \frac{1}{m} + a, \theta + b) = R$. Ponadto współczynnik kierunkowy tego odcinka jest równy $\frac{m}{n}$, bo

$$\frac{\theta + b - \theta}{\eta - \frac{1}{m} + a - \eta} = \frac{bm}{am - 1} = \frac{bm}{bn} = \frac{m}{n},$$

a więc jest on równoległy do prostych L_k . Zatem leży on w jednym z pasów. ■

Lemat 3.6. Zbiór punktów (η', θ') równoważnych (η, θ) w \mathbb{R}^2 (tzn. $p(\eta', \theta') = p(\eta, \theta)$) i leżących w tym samym pasie co (η, θ) jest równy $\{(\eta + kn, \theta + km) : k \in \mathbb{Z}\}$.

Dowód. Oczywiście punkty $(\eta + kn, \theta + km)$, $k \in \mathbb{Z}$, są równoważne (η, θ) . Ponadto leżą w tym samym pasie co (η, θ) , gdyż współczynnik kierunkowy wektora $[m, n]$ o wielokrotności którego przesuwamy punkt (η, θ) jest równy m/n (jest on równoległy do prostych L_k).

Weźmy teraz dowolny punkt (η', θ') równoważny (η, θ) w \mathbb{R}^2 i leżący w tym samym pasie co (η, θ) . Niech dla uproszczenia rozważań

$$(2) \quad \frac{m}{n}\eta < \theta < \frac{m}{n}\eta + \frac{1}{n}.$$

Zatem $(\eta', \theta') = (\eta + r, \theta + s)$ dla pewnych $r, s \in \mathbb{Z}$ i

$$(3) \quad \frac{m}{n}(\eta + r) < \theta + s < \frac{m}{n}(\eta + r) + \frac{1}{n}.$$

Z (2) i (3) otrzymujemy dwie nierówności

$$\begin{aligned} 0 &< n\theta - m\eta < 1, \\ 0 &< (n\theta - m\eta) + (ns - mr) < 1. \end{aligned}$$

Ponieważ $ns - mr \in \mathbb{Z}$, więc $ns - mr = 0$, a stąd i z względnej pierwszości n i m otrzymujemy $r = kn$ i $s = km$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$. ■

Z ostatniego lematu wynika pełny opis grupy podstawowej dopełnienia węzła $T_{n,m}$ w torusie T .

Własność 3.7. Dla dowolnego punktu $* \in T \setminus T_{n,m}$

$$(4) \quad \pi_1(T \setminus T_{n,m}; *) \cong \mathbb{Z}$$

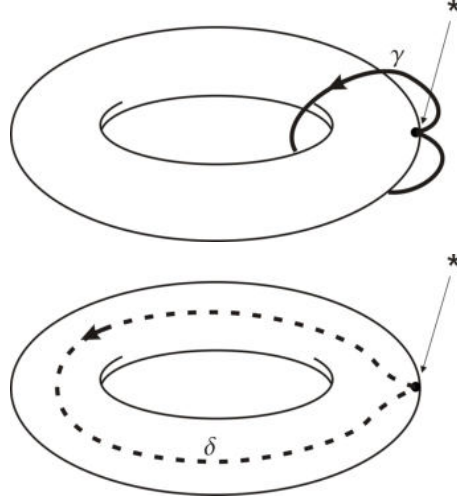
i generatorem $\pi_1(T \setminus T_{n,m}; *)$ jest krzywa zamknięta κ będąca obrazem za pomocą p odcinka $(\eta, \theta), (\eta + n, \theta + m)$, gdzie $p(\eta, \theta) = *$. Zatem

$$\pi_1(T \setminus T_{n,m}; *) = \mathcal{F}(\kappa) \cong \mathbb{Z}.$$

Dowód. Mamy $\kappa(t) = p((\eta + tn, \theta + tm))$, $t \in [0, 1]$, oraz dla dowolnego $k \in \mathbb{Z}$, $\kappa^k(t) = p((\eta + tkn, \theta + tkm))$, $t \in [0, 1]$. Weźmy dowolną krzywą ι w $T \setminus T_{n,m}$ o początku i końcu w $*$. Jej podniesienie $\widehat{\iota}$ o początku w punkcie (η, θ) ma koniec w punkcie $(\eta + kn, \theta + km)$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$ (na mocy poprzedniego lematu) oraz leży w pasie zawierającym punkt (η, θ) . Ponieważ pas jest zbiorem jednorodnym, więc krzywa $\widehat{\iota}$ jest homotopijna odcinkowi łączącemu jej końce, czyli odcinkowi $(\eta, \theta), (\eta + kn, \theta + km)$. Stąd po złożeniu z p krzywa ι jest homotopijna κ^k . Zatem κ jest generatorem grupy $\pi_1(T \setminus T_{n,m}; *)$.

Aby wykazać izomorfizm 4 wystarczy udowodnić, że żadna z krzywych κ^k dla $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ nie jest homotopijna krzywej stałej w punkcie $*$. Istotnie, gdyby tak było to dla podniesienia $\widehat{\kappa^k}$ krzywej κ^k o początku w (η, θ) mielibyśmy $\widehat{\kappa^k}(1) = (\eta, \theta)$. Z drugiej strony jest $\widehat{\kappa^k}(1) = (\eta + kn, \theta + km)$, co implikuje $k = 0$. ■

Wyznamy teraz grupę węzła $T_{n,m}$. Z definicji $\pi(T_{n,m}) = \pi_1(\partial P \setminus T_{n,m}; *) = \pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus T_{n,m}; *)$, gdzie punkt $* \notin T_{n,m}$. Dla uproszczenia rozważań obierzmy punkt $* \in T \setminus T_{n,m}$. Rozważmy dwie następujące pętle γ, δ (dokładniej klasy tych pętli w $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus T_{n,m}; *)$)



Wykażemy teraz

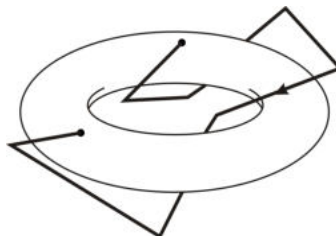
Lemat 3.8. Pętle γ i δ są generatorami grupy $\pi(T_{n,m})$.

Dowód. Weźmy dowolną pętlę κ w $\mathbb{S}^3 \setminus T_{n,m}$ o początku i końcu w $*$. Zmieniając homotopijnie κ możemy założyć, że κ jest łamaną. Zatem κ ma skończona ilość

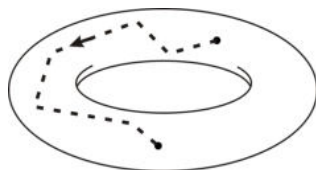
punktów A_1, \dots, A_m wspólnych z T . Pozwala to przedstawić κ jako sumę skończonej ilości krzywych

$$\kappa = \kappa_1 \dots \kappa_k,$$

gdzie każda z krzywych κ_i przebiega albo w $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{T}$ (tzn. poza pełnym torusem z wyjątkiem krańców)

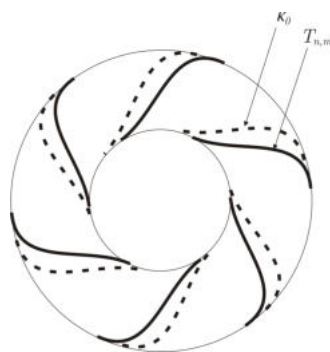


albo κ_i przebiega w $\text{Int } \mathbb{T}$ (tzn. we wnętrzu torusa pełnego z wyjątkiem krańców)



Na mocy lematu 3.4 każdy z punktów A_i można połączyć krzywą z punktem $*$ w $T \setminus T_{n,m}$. Zatem zmieniając homotopijnie κ (przesuwając każdy punkt A_i wraz z całą krzywą do punktu $*$ wzdłuż takiej krzywej) możemy założyć, że $A_1 = \dots = A_m = *$. Stąd κ jest homotopijne sumie $\tilde{\kappa}_1 \dots \tilde{\kappa}_k$, gdzie każda z krzywych $\tilde{\kappa}_i$ jest pętlą w $\mathbb{R}^3 \setminus T_{n,m}$ o początku i końcu w $*$ i przebiega albo w $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{T}$ albo w $\text{Int } \mathbb{T}$. Zatem każda pętla $\tilde{\kappa}_i$ jest homotopijna wielokrotności γ albo wielokrotności δ . Zatem γ i δ są generatorami grupy $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus T_{n,m}; *)$. ■

Określimy teraz relację między γ i δ w $\pi(T_{n,m})$. Niech $*$ = $p(\eta_0, \theta_0)$. Rozważmy pętlę κ_0 będącą obrazem odcinka $[(\eta_0, \theta_0), (\eta_0 + n, \theta_0 + m)]$ za pomocą p . Jest to pętla o początku i końcu w punkcie $*$, leżąca w $T \setminus T_{n,m}$, "równoległa" do $T_{n,m}$ w T obiegająca T n -razy wzdłuż i m -razy wokół.



Zmieńmy homotopijnie pętlę κ_0 (pozostawiając początek i koniec w punkcie $*$) na dwa sposoby:

1. "wyciągając" pętlę κ_0 z T . Otrzymamy homotopijną pętlę leżącą w $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{T}$ obiegającą \mathbb{T} m -razy dookoła. Zatem κ_0 jest homotopijna z γ^m .

2. "wciskając" pętlę κ_0 do wnętrza T . Otrzymamy pętlę leżącą w \mathbb{T} przebiegającą \mathbb{T} n -razy wzdłuż. Zatem κ_0 jest homotopijna z δ^n .

W konsekwencji

Lemat 3.9. *Dla pętli γ i δ w $\pi(T_{n,m})$ mamy*

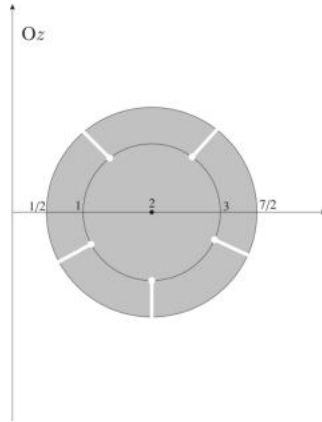
$$\gamma^m = \delta^n.$$

Jest to jedyna nietrywialna relacja między γ i δ w $\pi(T_{n,m})$. Do precyzyjnego uzasadnienia tego faktu zastosujemy twierdzenie Seiferta-van Kampena (zob. np. [CF], [D]).

Twierdzenie 3.10. *Dla wzajemnie pierwszych $n, m \in \mathbb{N}$*

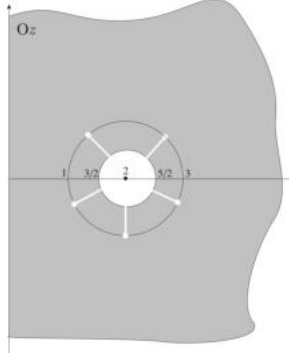
$$\pi(T_{n,m}) = \mathcal{F}(\gamma, \delta) / (\delta^n \gamma^{-m}).$$

Dowód. Ze względu na kanoniczny homeomorfizm $F : \partial P \rightarrow \mathbb{S}^3$ rozważania będziemy prowadzić w $\mathbb{S}^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$. Przypomnijmy, że $T_{n,m} \subset T^{st} \subset \mathbb{S}^3$. Weźmy pod uwagę dwa zbiory otwarte U_1 i U_2 w \mathbb{S}^3 . Pierwszy z nich U_1 w przecięciu z każdą półpłaszczyzną zawierającą oś Oz jest otwartym okręgiem o środku w punkcie $(0, 2)$ i promieniu $3/2$ (zauważmy, że torus T^{st} w przecięciu z tą półpłaszczyzną jest okręgiem o środku w punkcie $(0, 2)$ i promieniu 1 w którym leży n punktów węzła $T_{n,m}$ rozmieszczonych symetrycznie) z usuniętymi odcinkami wzdłuż promieni tego okręgu o jednym z krańców w punktach $T_{n,m}$



Drugi zbiór U_2 w przecięciu z każdą z tych półpłaszczyzn jest zewnętrzem (wraz z punktem ∞) okręgu o środku w punkcie $(0, 2)$ i promieniu $1/2$ z usuniętymi

odcinkami wzdłuż promieni tego okręgu o jednym z krańców w punktach $T_{n,m}$.



Zbiory U_1, U_2 są otwarte, łukowo spójne, $U_1 \cup U_2 = \mathbb{S}^3$ oraz $\pi_1(U_1, *) = \mathcal{F}(\delta)$, $\pi_1(U_2, *) = \mathcal{F}(\gamma)$. Zbiór $U_1 \cap U_2$ jest łukowo spójny, ma grupę fundamentalną równą $\pi_1(T \setminus T_{n,m}; *)$, gdyż każda pętla w $U_1 \cap U_2$ o początku i końcu w $*$ jest oczywiście homotopijna pętli leżącej w $T \setminus T_{n,m}$. Ale $\pi_1(T \setminus T_{n,m}; *) = \mathcal{F}(\kappa)$ (zob. stwierdzenie 3.7), gdzie krzywa zamknięta κ jest obrazem za pomocą p odcinka $(\eta, \theta), (\eta + n, \theta + m)$ oraz $p(\eta, \theta) = *$. Homomorfizmy

$$\varphi_i : \pi_1(U_1 \cap U_2, *) \rightarrow \pi_1(U_i, *), \quad i = 1, 2,$$

określone są na generatorze κ następująco

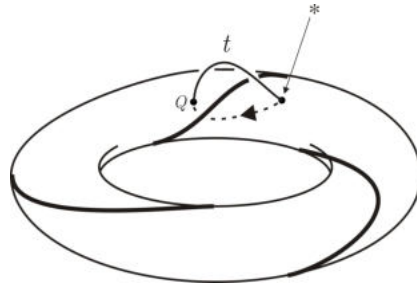
$$\begin{aligned} \varphi_1(\kappa) &= \delta^n, \\ \varphi_2(\kappa) &= \gamma^m. \end{aligned}$$

Istotnie, $\pi_1 \circ \kappa(t) = \pi_1 \circ p(\eta + tn, \theta + tm) = e^{2\pi i(\eta + tn)} = e^{2\pi i\eta} e^{2\pi i tn}$ dla $t \in [0, 1]$, a stąd $\text{Ind}_0 \pi_1 \circ \kappa = n$. Zatem κ , rozważana jako pętla w U_1 , jest homotopijna δ^n . Podobnie wykazujemy, że κ rozważana jako pętla w U_2 jest homotopijna γ^m . Zatem na mocy twierdzenia Seiferta-van Kampena

$$\pi(T_{n,m}) = \pi_1(\partial P \setminus T_{n,m}; *) = \mathcal{F}(\gamma, \delta) / (\delta^n \gamma^{-m})$$

■

Weźmy teraz pod uwagę szczególną pętlę t o początku i końcu w $*$



gdzie punkt Q różni się od punktu $*$ o argument $\frac{2\pi}{m}$ pierwszej współrzędnej. Dokładniej, jeśli $Q = (e^{2\pi i\eta}, e^{2\pi i\theta})$, to $*$ = $(e^{2\pi i(\eta-1/m)}, e^{2\pi i\theta})$. Najpierw przedstawimy t za pomocą generatorów.

Lemat 3.11. W $\pi(T_{n,m})$

$$t = \delta^a \gamma^{-b},$$

gdzie $a, b \in \mathbb{N}$ oraz $am - bn = 1$.

Dowód. Niech $p(\eta, \theta) = Q$. Na mocy lematu 3.5 punkt Q można połączyć z punktem $*$ w $T \setminus T_{n,m}$ za pomocą krzywej będącej obrazem, za pomocą p , odcinka $[(\eta, \theta), (\eta - \frac{1}{m} + a, \theta + b)]$. Na mocy własności 5 nakrycia uniwersalnego p krzywa ta obiega torus T $(a - \frac{1}{m})$ -razy wzdłuż i b -razy wokół. Ponieważ Q i $*$ różnią się o argument $\frac{2\pi}{m}$ pierwszej współrzędnej, więc z dowodu generowania $\pi(T_{n,m})$ przez γ i δ otrzymujemy, że

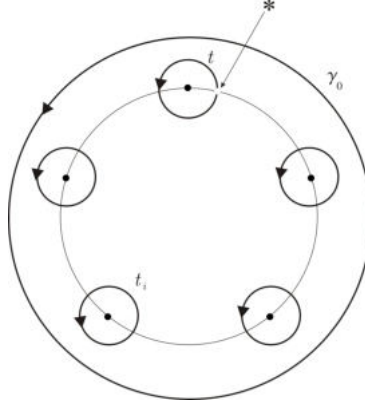
$$t = \delta^a \gamma^{-b}. \quad \blacksquare$$

Z uwagi 2 wynika, że pętla t , a dokładniej jej klasa abstrakcji $[t]$ jest generatorem abelianizacji $\pi(T_{n,m})' := \pi(T_{n,m})/[\pi(T_{n,m}), \pi(T_{n,m})]$. W szczególności klasy $[\gamma]$ i $[\delta]$ są generowane przez $[t]$. Dokładniej

Lemat 3.12. W $\pi(T_{n,m})'$

$$\begin{aligned} [\gamma] &= [t]^n, \\ [\delta] &= [t]^m. \end{aligned}$$

Dowód. Ponieważ $\pi(T_{n,m})'$ jest izomorficzne z $H_1(\mathbb{S}^3 \setminus T_{n,m}, \mathbb{Z})$, więc rozważania prowadzimy w języku homologii. Niech $p(\eta, \theta) = *$. Pętla (cykl) t jest homologiczna każdemu cyklowi t_i leżącemu w płaszczyźnie $\{e^{2\pi i\eta}\} \times \mathbb{C}$ i otaczającym jedną nić $T_{n,m}$ oraz pętla (cykl) γ jest homologiczna cyklowi γ_0 otaczającym wszystkie punkty $T_{n,m}$.



Ponieważ w płaszczyźnie $\{e^{2\pi i\eta}\} \times \mathbb{C}$, zbiór $(\{e^{2\pi i\eta}\} \times \mathbb{C}) \cap T_{n,m}$ jest n -elementowy, więc cykl γ_0 jest homologiczny sumie cykli t_i , otaczających te punkty. Zatem

$[\gamma_0] = n[t]$ w $H_1(\mathbb{S}^3 \setminus T_{n,m}, \mathbb{Z})$. Zatem w zapisie multiplikatywnym w $\pi(T_{n,m})'$ mamy

$$[\gamma] = [t]^n.$$

Dla pętli δ możemy przeprowadzić podobne rozumowanie. Otrzymamy w $\pi(T_{n,m})'$

$$[\delta] = [t]^m.$$

■

Możemy teraz przystąpić do obliczenia wielomianów Aleksandra węzłów $T_{n,m}$.

Twierdzenie 3.13. *Dla dowolnych wzajemnie pierwszych liczb naturalnych n, m mamy*

$$A_{T_{n,m}}(t) = \frac{(t^{nm} - 1)(t - 1)}{(t^n - 1)(t^m - 1)}.$$

Dowód. Ponieważ $\pi(T_{n,m}) = \mathcal{F}(x, y) / (x^n y^{-m})$, więc jedyną relacją jest $x^n y^{-m}$. Ponieważ

$$\begin{aligned} \frac{\partial (x^n y^{-m})}{\partial x} &= 1 + x + \dots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}, \\ \frac{\partial (x^n y^{-m})}{\partial y} &= -x^n y^{-1} - x^n y^{-2} - \dots - x^n y^{-m} = -x^n y^{-m} \frac{y^m - 1}{y - 1}, \end{aligned}$$

więc

$$M_{\pi(T_{n,m})} = \left[\frac{x^n - 1}{x - 1}, -x^n y^{-m} \frac{y^m - 1}{y - 1} \right].$$

Na mocy lematu 3.11 $t = x^a y^{-b}$ jest generatorem $\pi(T_{n,m})'$, a z lematu 3.12 $x = t^m$ oraz $y = t^n$. Wobec tego

$$M'_{\pi(T_{n,m})} = \left[\frac{t^{mn} - 1}{t^m - 1}, -\frac{t^{nm} - 1}{t^n - 1} \right].$$

Stąd

$$A_{T_{n,m}}(t) = \text{NWD} \left(\frac{t^{mn} - 1}{t^m - 1}, -\frac{t^{nm} - 1}{t^n - 1} \right) = \frac{(t^{mn} - 1)(t - 1)}{(t^m - 1)(t^n - 1)}.$$

Ostatnia równość wynika z założenia, że $\text{NWD}(n, m) = 1$ i z prostych faktów o pierwiastkach z jedynki.

To kończy dowód. ■

W szczególności dla węzła trywialnego $T_{1,1}$ otrzymujemy $A_{T_{1,1}}(t) \equiv 1$. Stąd dostajemy

Wniosek 3.14. *Jeśli T jest węzłem trywialnym, to $A_T(t) \equiv 1$.*

Stąd otrzymujemy topologiczną klasyfikację węzłów torycznych pierwszego rzędu.

Twierdzenie 3.15. *Węzeł toryczny pierwszego rzędu $T_{n,m}$, jest trywialny wtedy i tylko wtedy, gdy $n = 1$ lub $m = 1$. Dwa węzły toryczne pierwszego rzędu $T_{n,m}$ i $T_{k,l}$, $n, m, k, l \geq 2$, są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy $(n, m) = (k, l)$ lub $(n, m) = (l, k)$.*

Dowód. Pierwsza część twierdzenia wynika z uwagi 3.2 oraz z faktu, że dla $n, m \geq 2$ wielomian Aleksandra węzła $T_{n,m}$ nie jest stały ($\deg A_{T_{n,m}} > 0$).

Założmy, że węzły $T_{n,m}$ i $T_{k,l}$, $n, m, k, l \geq 2$, są równoważne. Wówczas ich grupy są izomorficzne. Stąd $A_{T_{n,m}} = A_{T_{k,l}}$, czyli

$$(5) \quad \frac{(t^{mn} - 1)(t - 1)}{(t^m - 1)(t^n - 1)} = \frac{(t^{kl} - 1)(t - 1)}{(t^k - 1)(t^l - 1)}.$$

Stąd wynika, że

$$(6) \quad mn = kl$$

Istotnie, w przeciwnym bowiem przypadku, np. gdyby $mn > kl$, to na mocy założenia, że $n, m, k, l \geq 2$, pewien pierwotny pierwiastek z jednościi stopnia mn byłby pierwiastkiem wielomianu po lewej stronie równości (5) a nie byłby pierwiastkiem wielomianu po prawej stronie, co niemożliwe.

Ponownie z (5) wynika w sposób podobny do powyższego (porównując pierwiastki pierwotne odpowiednich stopni), że

$$(7) \quad m = k \text{ lub } m = l.$$

Istotnie, w przeciwnym przypadku, np. gdyby $m > k$ i $m > l$, to z równości (5) wynikałoby, że pewien pierwotny pierwiastek z jednościi stopnia m byłby pierwiastkiem wielomianu po prawej stronie równości, a nie byłby pierwiastkiem wielomianu po lewej stronie, co niemożliwe. Podobnie w pozostałych przypadkach. Z równości (6) i (7) otrzymujemy, że $(n, m) = (k, l)$ lub $(n, m) = (l, k)$.

Jeśli $(n, m) = (k, l)$ lub $(n, m) = (l, k)$, to odwzorowanie tożsamość w pierwszym przypadku, a zamiana zmiennych $(x, y) \mapsto (y, x)$ w drugim są homeomorfizmami zadającymi równoważność węzłów.

To kończy dowód. ■

Uwaga 3.16. Oczywiście można rozważać również węzły toryczne $T_{n,m}$ dla dowolnych całkowitych $n, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ przy założeniu $\text{NWD}(n, m) = 1$ (wykluczenie przypadku $n = 0$ albo $m = 0$ wynika z tego, że otrzymujemy wtedy węzły trywialne leżące w ∂P , ale nie leżące w torusie T). Wszystkie powyższe rozumowania są analogiczne z oczywistymi zmianami. Ograniczenie naszych rozważań do dodatnich n, m wynika z faktu, że takie węzły otrzymujemy z krzywych analitycznych.

REFERENCES

- [BK] Brieskorn E., Knörrer H., *Plane Algebraic Curves*, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Stuttgart, 1986.
- [B] Brauner K., *Zur Geometrie der Funktionen zweier komplexer Veränderlicher II*. Abh. Math. Semin.Hamb. Univ. 6(1928), 1–55.
- [Bu1] Burau W., *Kennzeichnung der Schlauchknoten*. Abh. Math. Semin.Hamb. Univ. 9(1932), 125–133.
- [Bu2] Burau W., *Kennzeichnung der Schlauchverkettungen*. Abh. Math. Semin.Hamb. Univ. 10(1934), 285–297.
- [CF] Crowell R. H., Fox R. H., *Introduction to knot theory*. Dover 2008.
- [D] Duda R., *Wprowadzenie do topologii. Część II*. PWN 1986.

- [EN] Eisenbud D., Neumann W., *Three-dimensional Link Theory and Invariants of Plane Curve Singularities*, Princeton University Press, Princeton 1985.
- [GL] Gordon C. McA, Luecke J., *Knots are determined by their complements*. Bull. AMS 20 (1989), 83–87.
- [K] Kähler E., *Über die Verzweigung einer algebraischen Funktion zweier Veränderlichen in der Umgebung einer singulären Stelle*. Math. Zeit. 30(1929), 188–204.
- [Le] Lê Dũng Tráng, *Sur les nœuds algébriques*. Compos. Math. 25(1972), 281–321.
- [L] Łojasiewicz S., *Wstęp do Geometrii Analitycznej Zespólonej*, PWN, Warszawa 1988.
- [M] Milnor J., *Singular Points of Complex Hypersurfaces*, Princeton University Press, Princeton 1968.
- [P] Pham P., *Singularities des Courbes Planes*, Cours de 3e cycle, Faculte des Sciences de Paris, Anne Universitaire 1969-1970.
- [Re] Reeve J.E., *A summary of results in the topological classification of plane algebroid singularities*, Università e Politecnico di Torino, Rendiconti del Seminario Matematico 1954/55, 159-187.
- [R] Rolfsen D., *Knots and Links*. AMS Chelsea Publishing 2003.
- [W] Wall C. T. C., *Singular Points of Plane Curves*. Cambridge University Press 2004.
- [Z] Zariski O., *On the topology of algebroid singularities*. Amer. J. Math. 54(1932), 453–465.

Wydział Matematyki i Informatyki,
Uniwersytet Łódzki,
90-238 Łódź, ul. Banacha 22
E-mail address: krasinsk@uni.lodz.pl

4. CURVES AND KNOTS I. TORUS KNOTS OF FIRST ORDER

Summary. In the article the simplest torus knots are described - torus knots of first order. They are related to the simplest local analytic curves having only one characteristic pair.

Łódź, 10 – 14 stycznia 2011 r.

