

KRZYWE A WĘZŁY II.
WĘZŁY TORYCZNE WYŻSZYCH RZĘDÓW

Tadeusz Krasiński (Łódź)

Abstract. W pracy omówione są węzły toryczne wyższych rzędów. Są to węzły odpowiadające osobliwościom krzywych analitycznych.

1 Wstęp

W części I [Kr] omówiliśmy węzły toryczne pierwszego rzędu. Na mocy definicji węzłem torycznym pierwszego rzędu typu (n, m) , gdzie $n, m \in \mathbb{N}$ i $\text{NWD}(n, m) = 1$ nazywamy obraz odwzorowania $\Phi : \mathbb{S}^1 \rightarrow \partial P$, gdzie

$$\mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{2\pi i\theta} : \theta \in [0, 1]\} \text{ - okrąg jednostkowy,}$$

$$P := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\} \text{ - policylinder o promieniach (1, 1),}$$

$$\partial P = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : |x| = 1, |y| \leq 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : |x| \leq 1, |y| = 1\} = \partial P_1 \cup \partial P_2,$$

$$\Phi(e^{2\pi it}) := \{(e^{2\pi int}, e^{2\pi imt}), \quad t \in [0, 1]\}$$

i oznaczamy $T_{n,m}$. Poprzez homeomorfizm $F : \partial P \rightarrow \mathbb{S}^3 := \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$, opisany w części I, możemy traktować go również jako węzeł w \mathbb{S}^3 . Wtedy jego przedstawienie parametryczne jest następujące

$$F \circ \Phi(e^{2\pi it}) = ((2 + \cos 2\pi mt) \cos 2\pi nt, (2 + \cos 2\pi mt) \sin 2\pi nt, \sin 2\pi mt), \quad t \in [0, 1]$$

i leży on w standardowym torusie T^{st} w \mathbb{R}^3 zadany parametrycznie

$$T^{st} : \begin{aligned} x_1 &= (2 + \cos 2\pi\theta) \cos 2\pi\eta, \\ x_2 &= (2 + \cos 2\pi\theta) \sin 2\pi\eta, \quad 0 \leq \eta, \theta \leq 1, \\ x_3 &= \sin 2\pi\theta. \end{aligned}$$

Wykazaliśmy, że jego grupa podstawowa $\pi(T_{n,m}) := \pi_1(\partial P \setminus T_{n,m}; *)$, gdzie punkt $*$ $\notin T_{n,m}$, jest równa $\mathcal{F}(x, y) / (x^n y^{-m})$ i korzystając z tego udowodniliśmy, że dwa węzły toryczne pierwszego rzędu $T_{n,m}$ i $T_{k,l}$, $n, m, k, l \geq 1$ są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi jeden z warunków:

1. ($n = 1$ lub $m = 1$) i ($k = 1$ lub $l = 1$) – wtedy $T_{n,m}$ i $T_{k,l}$ są węzłami trywialnymi,
2. $(n, m) = (k, l)$ lub $(n, m) = (l, k)$.

W tej części omówimy podobne zagadnienia dla węzłów torycznych wyższych rzędów otrzymanych poprzez iterację operacji opisywania węzłów torycznych pierwszego rzędu na brzegach otoczeń tubularnych węzłów torycznych niższego rzędu.

2 Węzły toryczne wyższych rzędów

Przypomnijmy, że z definicji torus $T := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : |x| = 1, |y| = 1\} \subset \partial P$.

Niech $n_1, m_1 \in \mathbb{N}$ i $\text{NWD}(n_1, m_1) = 1$. Weźmy pod uwagę węzeł toryczny $T_{n_1, m_1} \subset \partial P$. Zatem

$$T_{n_1, m_1} = \{(e^{2\pi i n_1 t}, e^{2\pi i m_1 t}), t \in [0, 1]\} \subset T \subset \partial P.$$

Weźmy dowolne $r_1, 0 < r_1 < 1$. Zamiast T_{n_1, m_1} rozważmy równoważny mu w ∂P węzeł

$$\{(e^{2\pi i n_1 t}, r_1 e^{2\pi i m_1 t}), t \in [0, 1]\} \subset \partial P.$$

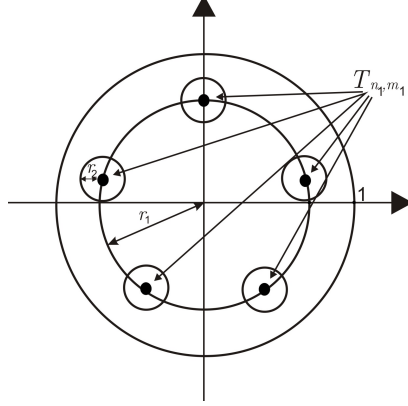
Będziemy go również oznaczać przez T_{n_1, m_1} . Rozważmy domknięte *tubularne otoczenie węzła* T_{n_1, m_1} zawarte w ∂P określone następująco

$$\text{Tube}(T_{n_1, m_1}) = \bigcup_{(x, y) \in T_{n_1, m_1}} (\{x\} \times \overline{K(y, r_2)}),$$

gdzie r_2 jest na tyle małe, że koła domknięte o środkach w punktach y_1, \dots, y_{m_1} i promieniu r_2 , gdzie

$$\pi_1^{-1}(x) \cap T_{n_1, m_1} = x \times \{y_1, \dots, y_{m_1}\},$$

zawierają się w kole $K(0, 1)$ i są parami rozłączne.



Zatem $\text{Tube}(T_{n_1, m_1})$ dane jest parametrycznie

$$\text{Tube}(T_{n_1, m_1}) = \{(e^{2\pi i n_1 t}, r_1 e^{2\pi i m_1 t} + r e^{2\pi i s}), \quad t, s \in [0, 1], \quad r \in [0, r_2]\}.$$

Oczywiście $\text{Tube}(T_{n_1, m_1}) \subset \partial P$ i brzeg $\text{Tube}(T_{n_1, m_1})$ jest homeomorficzny z torusem. Ustalamy następujący homeomorfizm:

$$\Phi_1 : T \rightarrow \partial(\text{Tube}(T_{n_1, m_1})),$$

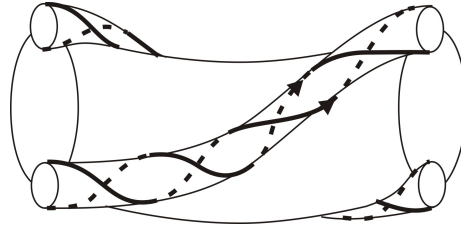
$$\Phi_1(e^{2\pi i t}, e^{2\pi i s}) = (e^{2\pi i n_1 t}, r_1 e^{2\pi i m_1 t} + r_2 e^{2\pi i s}), \quad t, s \in [0, 1].$$

Niech T_{n_2, m_2} będzie dowolnym węzłem torycznym pierwszego rzędu leżącym w $T \subset \partial P$. Zatem $n_2, m_2 \in \mathbb{N}$ i $\text{NWD}(n_2, m_2) = 1$. Wówczas $\Phi_1(T_{n_2, m_2})$ jest węzłem w ∂P , a tym samym (poprzez homeomorfizm F) węzłem w \mathbb{S}^3 . Tego typu węzły nazywamy *węzłami torycznymi drugiego rzędu* i oznaczamy $T_{(n_1, m_1)(n_2, m_2)}$ (zarówno w ∂P jak i w \mathbb{S}^3). Typ tego węzła w ∂P nie zależy od wyboru promieni r_1, r_2 o ile spełniają one powyższe założenia (bo istnieje homeomorfizm przekształcający koło jednostkowe na siebie, będące tożsamością na brzegu, przeprowadzające punkty $T_{(n_1, m_1)(n_2, m_2)}$ na punkty takiego samego węzła o innych promieniach r'_1, r'_2). Ponieważ węzeł T_{n_2, m_2} w T jest zadany wzorem

$$T_{n_2, m_2} = \{(e^{2\pi i n_2 t}, e^{2\pi i m_2 t}), \quad t \in [0, 1]\} \subset T,$$

więc $T_{(n_1, m_1)(n_2, m_2)}$ zadany jest wzorem

$$T_{(n_1, m_1)(n_2, m_2)} = \{(e^{2\pi i n_1 n_2 t}, r_1 e^{2\pi i m_1 n_2 t} + r_2 e^{2\pi i m_2 t}), \quad t \in [0, 1]\}.$$



Węzły toryczne wyższych rzędów definiujemy indukcyjnie. Dla danego węzła k -tego rzędu $T_{(n_1, m_1) \dots (n_k, m_k)} \subset \partial P$, $k \geq 1$, danego wzorem

$$[0, 1] \ni t \mapsto (e^{2\pi i n_1 \dots n_k t}, r_1 e^{2\pi i m_1 n_2 \dots n_k t} + r_2 e^{2\pi i m_2 n_3 \dots n_k t} + \dots + r_k e^{2\pi i m_k t}) \in \partial P$$

rozważamy jego domknięte tubularne otoczenie $\text{Tube}(T_{(n_1, m_1) \dots (n_k, m_k)})$ o dostatecznie małym promieniu r_{k+1} (by zawierało się w ∂P_1 i by domknięte koła tego otoczenia w każdej płaszczyźnie $\{x\} \times \mathbb{C}$ były parami rozłączne). Brzeg $\partial(\text{Tube}(T_{(n_1, m_1) \dots (n_k, m_k)}))$ jest homeomorficzny z torusem T . Ustalamy następujący homeomorfizm

$$\begin{aligned} \Phi_k : T &\rightarrow \partial(\text{Tube}(T_{(n_1, m_1) \dots (n_k, m_k)})), \\ \Phi_k(e^{2\pi i t}, e^{2\pi i s}) &= (e^{2\pi i n_1 \dots n_k t}, r_1 e^{2\pi i m_1 n_2 \dots n_k t} + r_2 e^{2\pi i m_2 n_3 \dots n_k t} + \\ &\quad \dots + r_k e^{2\pi i m_k t} + r_{k+1} e^{2\pi i s}), \quad t, s \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Niech $T_{n_{k+1}, m_{k+1}}$ będzie dowolnym węzłem torycznym pierwszego rzędu leżącym w $T \subset \partial P$. Wówczas $\Phi_k(T_{n_{k+1}, m_{k+1}})$ jest węzłem w ∂P , a tym samym węzłem w \mathbb{S}^3 . Tego typu węzły nazywamy *węzłami torycznymi $(k+1)$ -szego rzędu*. Jest on zadany wzorem

$$\begin{aligned} t \mapsto (e^{2\pi i n_1 \dots n_{k+1} t}, r_1 e^{2\pi i m_1 n_2 \dots n_{k+1} t} + r_2 e^{2\pi i m_2 n_3 \dots n_{k+1} t} + \\ \dots + r_k e^{2\pi i m_k n_{k+1} t} + r_{k+1} e^{2\pi i m_{k+1} t}) \end{aligned}$$

dla $t \in [0, 1]$.

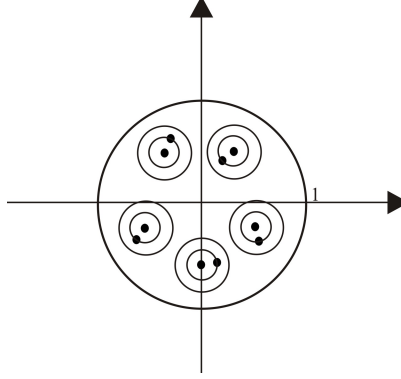
W części I udowodniliśmy, że węzeł toryczny pierwszego rzędu $T_{n, m}$ jest trywialny wtedy i tylko wtedy, gdy $n = 1$ lub $m = 1$. Ze względu na brak symetrii między zmiennymi x i y w definicji węzłów torycznych wyższych rzędów twierdzenie tego typu zachodzi tylko dla pierwszej współrzędnej. Mianowicie,

Stwierdzenie 2.1 *Niech $T_{(n_1, m_1) \dots (n_k, m_k)}$ będzie węzłem torycznym k -tego rzędu i $n_i = 1$ dla pewnego $i \in \{1, \dots, k\}$. Wówczas*

$$T_{(n_1, m_1) \dots (n_k, m_k)} \sim T_{(n_1, m_1) \dots (n_{i-1}, m_{i-1}) (n_{i+1}, m_{i+1}) \dots (n_k, m_k)}.$$

Dowód. Najpierw wykażemy, że $T_{(n_1, m_1) \dots (n_{i-1}, m_{i-1}) (1, m_i)}$ jest równoważny $T_{(n_1, m_1) \dots (n_{i-1}, m_{i-1})}$ w ∂P . Dla dowolnego $x = e^{2\pi i t}$ w płaszczyźnie $\{x\} \times \mathbb{C}$ mamy $n_1 \dots n_{i-1}$ punktów węzła $T_{(n_1, m_1) \dots (n_{i-1}, m_{i-1})}$ leżących w kole jednostkowym. Wokół każdego z tych punktów dany jest okrąg o dostatecznie małym promieniu r_i (takim by domknięte koła o tych promieniach były rozłączne i zawierały się we wnętrzu koła jednostkowego). Na każdym z tych okręgów dany jest jeden punkt węzła $T_{(n_1, m_1) \dots (n_{i-1}, m_{i-1}) (1, m_i)}$ i punkty te zależą w sposób ciągły od x . Zakładając, że r_i są dostatecznie małe możemy te koła zawrzeć w kołach o większych promieniach $\tilde{r}_i > r_i$ i tych samych środkach takich, że koła te po domknięciu są

nadal rozłączne i zawierają się we wnętrzu koła jednostkowego.



Łatwo wykazać, że istnieje homeomorfizm h_x koła jednostkowego na siebie przeprowadzający punkty węzła $T_{(n_1, m_1) \dots (n_{i-1}, m_{i-1})(1, m_i)}$ na odpowiadające im punkty węzła $T_{(n_1, m_1) \dots (n_{i-1}, m_{i-1})}$ i będący identycznością na brzegu koła jednostkowego i kół o promieniach \tilde{r}_i . Ponadto homeomorfizmy h_x możemy tak wybrać, by zależały w sposób ciągły od x . Wówczas odwzorowanie

$$\begin{aligned} F : \partial P &\rightarrow \partial P, \\ F|_{\partial P_1}(x, y) &:= (x, h_x(y)), \\ F|_{\partial P_2}(x, y) &:= (x, y) \end{aligned}$$

jest homeomorfizmem ∂P na siebie przekształcającym $T_{(n_1, m_1) \dots (n_{i-1}, m_{i-1})(1, m_i)}$ na węzeł $T_{(n_1, m_1) \dots (n_{i-1}, m_{i-1})}$. Dalsze operacje konstrukcji węzłów torczyńnych kolejnych rzędów zastosowane do węzłów równoważnych $T_{(n_1, m_1) \dots (n_{i-1}, m_{i-1})(1, m_i)}$ i $T_{(n_1, m_1) \dots (n_{i-1}, m_{i-1})}$, prowadzą do węzłów równoważnych.

To kończy dowód stwierdzenia. \blacksquare

Uwaga 2.2 Analogiczne twierdzenie nie zachodzi gdy $m_i = 1$ dla pewnego $i \in \{1, \dots, k\}$. Zobacz uwagę 2.8.

Wyznamy teraz grupy podstawowe węzłów $T_{(n_1, m_1) \dots (n_k, m_k)}$. Grupę węzłów torczyńnych pierwszego rzędu wyznaczyliśmy w I części artykułu. Dla dowolnych $n_1, m_1 \in \mathbb{N}$, $\text{NWD}(n_1, m_1) = 1$, mamy

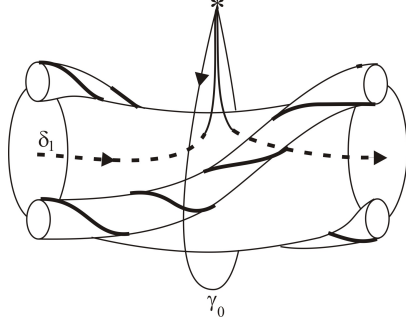
$$\pi(T_{n_1, m_1}) = \mathcal{F}(x, y) / (x^{n_1} y^{-m_1}).$$

Obliczymy teraz grupę podstawową węzłów drugiego rzędu $T_{(n_1, m_1)(n_2, m_2)}$. Z definicji

$$\pi(T_{(n_1, m_1)(n_2, m_2)}) = \pi_1(\partial P \setminus T_{(n_1, m_1)(n_2, m_2)}; *) = \pi_1(\overline{\mathbb{R}^3} \setminus \Phi_1(T_{(n_1, m_1)(n_2, m_2)}); *),$$

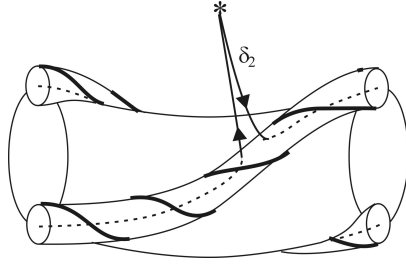
gdzie punkt $*$ $\notin T_{(n_1, m_1)(n_2, m_2)}$. Obierzmy punkt $*$ na brzegu $\text{Tube}(T_{n_1, m_1})$. Jako generatory rozważmy trzy następujące pętle o początku i końcu w $*$:

1. pętlę γ jak w przypadku węzła torycznego pierwszego rzędu $T_{n,m}$, nazwijmy ją tutaj γ_0
2. pętlę δ jak w przypadku węzła torycznego pierwszego rzędu $T_{n,m}$; nazwijmy ją tutaj δ_1 ,



(dla lepszego geometrycznego przedstawienia tych pętli narysowaliśmy punkt $*$ poza torusem),

3. pętlę będącą "osią" tubularnego otoczenia $\text{Tube}(T_{n_1, m_1})$; nazwijmy ją δ_2 . Jest ona równoważna T_{n_1, m_1} w ∂P .



Wykażemy teraz

Lemat 2.3 *Pętle γ_0 , δ_1 i δ_2 są generatorami grupy $\pi(T_{(n_1, m_1)(n_2, m_2)})$.*

Dowód. Dowód przebiega podobnie jak w przypadku węzła pierwszego rzędu $T_{n,m}$. Poprzez homeomorfizm $F : \partial P \rightarrow \mathbb{S}^3$ przenosimy rozważania do $\mathbb{S}^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$. Weźmy dowolną pętlę κ w $\overline{\mathbb{R}^3} \setminus T_{(n_1, m_1)(n_2, m_2)}$ o początku i końcu w $*$ (przypomnijmy, że punkt $*$ wybraliśmy na $\partial(\text{Tube}(T_{n_1, m_1})) \setminus T_{(n_1, m_1)(n_2, m_2)}$). Zmieniając homotopijnie κ możemy założyć, że κ jest łamaną. Zatem κ ma skończoną liczbę punktów wspólnych z $\partial(\text{Tube}(T_{n_1, m_1}))$. Pozwala to przedstawić κ jako sumę skończonej liczby krzywych

$$\kappa = \kappa_1 \dots \kappa_k,$$

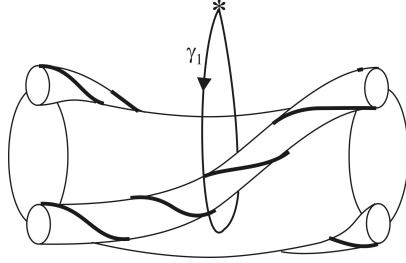
gdzie każda z krzywych κ_i przebiega albo w $\overline{\mathbb{R}^3} \setminus \text{Tube}(T_{n_1, m_1})$ (z wyjątkiem krańców) albo we wnętrzu $\text{Tube}(T_{n_1, m_1})$ (z wyjątkiem krańców). Na mocy lematu 3.4 z I części każdy z punktów wspólnych κ z $\partial(\text{Tube}(T_{n_1, m_1}))$ można połączyć

krzywą z wybranym punktem $*$ w $\partial(\text{Tube}(T_{n_1, m_1})) \setminus T_{(n_1, m_1)(n_2, m_2)}$. Zatem zmieniając homotopijnie κ (przesuwając każdy z punktów wspólnych wraz z całą krzywą do punktu $*$ wzdłuż takiej krzywej) otrzymamy, że κ jest homotopijne sumie $\tilde{\kappa}_1 \dots \tilde{\kappa}_k$, gdzie każda z krzywych $\tilde{\kappa}_i$ jest pętlą w $\mathbb{R}^3 \setminus T_{(n_1, m_1)(n_2, m_2)}$ o początku i końcu w $*$ i przebiega albo w $\mathbb{R}^3 \setminus \text{Tube}(T_{n_1, m_1})$ albo w $\text{Int}(\text{Tube}(T_{n_1, m_1}))$ (z wyjątkiem krańców). Te przebiegające w $\mathbb{R}^3 \setminus \text{Tube}(T_{n_1, m_1})$ są oczywiście generowane przez γ_0 i δ_1 , a te przebiegające w $\text{Tube}(T_{n_1, m_1})$ są wielokrotnościami δ_2 . Zatem γ_0 , δ_1 i δ_2 są generatorami grupy $\pi(T_{(n_1, m_1)(n_2, m_2)})$. ■

Określmy teraz relację między γ_0 , δ_1 i δ_2 w $\pi(T_{(n_1, m_1)(n_2, m_2)})$. Oczywiście relacja między γ_0 i δ_1 będzie taka sama jak w przypadku węzła torycznego pierwszego rzędu $T_{(n_1, m_1)}$

$$(R1) \quad \gamma_0^{m_1} = \delta_1^{n_1}.$$

Do wyznaczenia relacji między δ_2 a parą γ_0, δ_1 musimy rozważyć pomocniczą pętlę γ_1 (odpowiada ona pętli t z przypadku węzła $T_{n, m}$ - zob. lemat 3.11 w I części).

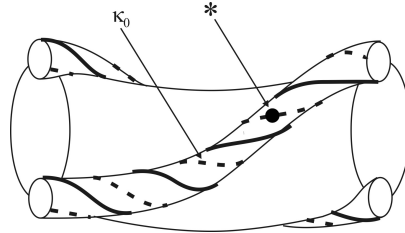


Na mocy tego lematu mamy

$$(1) \quad \gamma_1 = \delta_1^a \gamma_0^{-b},$$

gdzie $a, b \in \mathbb{N}$ oraz $am_1 - bn_1 = 1$.

1. Rozważmy pętlę κ_0 o początku i końcu w punkcie $*$, leżącą w $\partial(\text{Tube}(T_{n_1, m_1}))$ "równoległą" do $T_{(n_1, m_1)(n_2, m_2)}$, a więc obiegającą $\partial(\text{Tube}(T_{n_1, m_1}))$ n_2 -razy wzdłuż i m_2 -razy wokół. Oznacza to że za pomocą homeomorfizmu Φ_1^{-1} krzywa κ_0 przechodzi w krzywą obiegającą torus T n_2 -razy wzdłuż i m_2 -razy wokół. Stąd rzut κ_0 na okrąg jednostkowy (za pomocą rzutowania $\pi_1 : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ na pierwszą oś) obiega ten okrąg w kierunku dodatnim $n_1 n_2$ razy.



Jeśli zmienimy homotopijnie κ_0 tak, by leżała we wnętrzu $\text{Tube}(T_{n_1, m_1})$ (z wyjątkiem początku i końca w $*$), to oczywiście

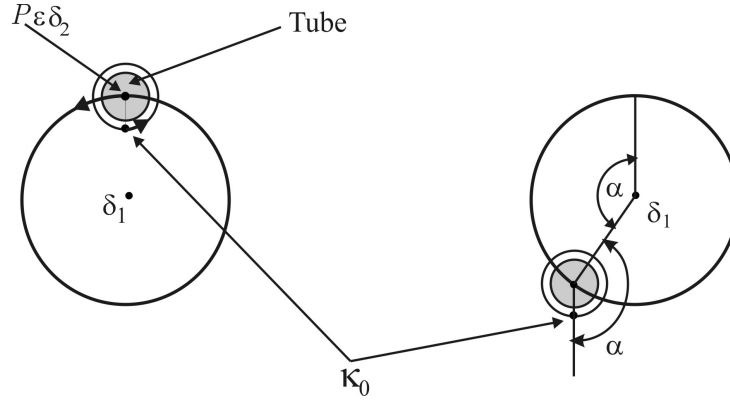
$$(2) \quad \kappa_0 \sim \delta_2^{n_2}$$

(bo δ_2 jest "osią" $\text{Tube}(T_{n_1, m_1})$, a κ_0 obiega n_2 -razy wzdłuż to tubularne otoczenie).

Jeśli teraz zmienimy homotopijnie κ_0 tak, by leżała na zewnątrz $\text{Tube}(T_{n_1, m_1})$ (z wyjątkiem początku i końca w $*$), to

$$(3) \quad \kappa_0 \sim \gamma_1^{m_2 - m_1 n_2} \delta_1^{n_1 n_2}.$$

Aby to uzasadnić wyznaczmy najpierw liczbę całkowitą s taką, że krzywa $\gamma_1^s \kappa_0$ jest homotopijna wielokrotności δ_1 , a dokładniej homotopijna $\delta_1^{n_1 n_2}$ (ponieważ rzut κ_0 na pierwszą oś obiega okrąg jednostkowy $n_1 n_2$ razy). Na jeden obrót κ_0 wokół $\text{Tube}(T_{n_1, m_1})$ (jest ich m_2) przypada zatem $\frac{n_1 n_2}{m_2}$ obrotu rzutu na pierwszą oś. Zatem punkt P wykona $\alpha := \frac{n_1 n_2}{m_2} \cdot \frac{m_1}{n_1} = \frac{m_1 n_2}{m_2}$ obrotu



Zatem aby otrzymać krzywą będącą wielokrotnością δ_1 , (jest ona osią T_{n_1, m_1} , a więc na rysunku jest reprezentowana przez środek okręgu) należy dokonać $-1 + \alpha$ obrotu. Ponieważ κ_0 obraca się m_2 razy wokół $\text{Tube}(T_{n_1, m_1})$, więc $s = m_2(-1 + \alpha) = -m_2 + m_1 n_2$. Zatem $\gamma_1^{-m_2 + m_1 n_2} \kappa_0 \sim \delta_1^{n_1 n_2}$. Stąd otrzymujemy (3).

Z (2) i (3) otrzymujemy relację

$$(4) \quad \delta_2^{n_2} \sim \gamma_1^{m_2 - m_1 n_2} \delta_1^{n_1 n_2}.$$

Na mocy (1) dostajemy relację między $\gamma_0, \delta_1, \delta_2$

$$(R2) \quad \delta_2^{n_2} \sim (\delta_1^a \gamma_0^{-b})^{m_2 - m_1 n_2} \delta_1^{n_1 n_2}.$$

(R1) i (R2) są jedynymi relacjami między $\gamma, \delta_1, \delta_2$. Aby to wykazać wystarczy zastosować twierdzenie Seiferta-van Kampena (zob. dowód twierdzenia 3.10 w I części). Zatem otrzymaliśmy

Twierdzenie 2.4 Dla dowolnego węzła torycznego drugiego rzędu $T_{(n_1, m_1)(n_2, m_2)}$ mamy

$$\pi(T_{(n_1, m_1)(n_2, m_2)}) \cong \mathcal{F}(\gamma_0, \delta_1, \delta_2) / \left(\delta_1^{n_1} \gamma_0^{-m_1}, (\delta_1^a \gamma_0^{-b})^{m_2 - m_1 n_2} \delta_1^{n_1 n_2} \delta_2^{-n_2} \right)$$

Możemy teraz obliczyć wielomian Aleksandra węzła torycznego drugiego rzędu. Dla dowolnych liczb naturalnych względnie pierwszych m, n określamy wielomiany

$$W_{n, m}(t) := \frac{(t^{nm} - 1)(t - 1)}{(t^n - 1)(t^m - 1)}.$$

Są to istotnie wielomiany na mocy własności pierwiastków z jedynki i założenia, że $\text{NWD}(m, n) = 1$. Wówczas na mocy I części wielomian Aleksandra węzła pierwszego rzędu $T_{n, m}$ jest równy $W_{n, m}(t)$.

Twierdzenie 2.5 Wielomian Aleksandra węzła torycznego drugiego rzędu $T^2 := T_{(n_1, m_1)(n_2, m_2)}$ jest równy

$$A_{T^2}(t) = W_{n_1, m_1}(t^{n_2}) W_{n_2, m_2 - m_1 n_2 + m_1 n_1 n_2}(t).$$

Dowód. Z twierdzenia 2.4 mamy

$$\pi(T^2) \cong \mathcal{F}(\gamma_0, \delta_1, \delta_2) / \left(\delta_1^{n_1} \gamma_0^{-m_1}, (\delta_1^a \gamma_0^{-b})^{m_2 - m_1 n_2} \delta_1^{n_1 n_2} \delta_2^{-n_2} \right).$$

Oznaczając pierwszą relację przez R1 a drugą przez R2 otrzymamy poprzez formalne różniczkowanie

$$\frac{\partial R_1}{\partial \gamma_0} = -\delta_1^{n_1} \gamma_0^{-m_1} \frac{\gamma_0^{m_1} - 1}{\gamma_0 - 1}, \quad \frac{\partial R_1}{\partial \delta_1} = \frac{\delta_1^{n_1} - 1}{\delta_1 - 1}, \quad \frac{\partial R_1}{\partial \delta_2} = 0.$$

oraz

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_2}{\partial \gamma_0} &= -\delta_1^a \gamma_0^{-b} \frac{\left((\delta_1^a \gamma_0^{-b})^{m_2 - m_1 n_2} - 1 \right) \gamma_0^b - 1}{\delta_1^a \gamma_0^{-b} - 1} \frac{\gamma_0^b - 1}{\gamma_0 - 1}, \\ \frac{\partial R_2}{\partial \delta_1} &= \frac{(\delta_1^a \gamma_0^{-b})^{m_2 - m_1 n_2} - 1}{\delta_1^a \gamma_0^{-b} - 1} \frac{\delta_1^a - 1}{\delta_1 - 1} + (\delta_1^a \gamma_0^{-b})^{m_2 - m_1 n_2} \frac{\delta_1^{n_1 n_2} - 1}{\delta_1 - 1}, \\ \frac{\partial R_2}{\partial \delta_2} &= -(\delta_1^a \gamma_0^{-b})^{m_2 - m_1 n_2} \delta_1^{n_1 n_2} \delta_2^{-n_2} \frac{\delta_2^{n_2} - 1}{\delta_2 - 1}. \end{aligned}$$

Uwzględniając równość $\gamma_1 = \delta_1^a \gamma_0^{-b}$, gdzie $am_1 - bn_1 = 1$, oraz że w grupie $\pi(T_{(n_1, m_1)(n_2, m_2)})'$ mamy $\gamma_0 = \gamma_1^{n_1}$, $\delta_1 = \gamma_1^{m_1}$, otrzymujemy w $\pi(T_{(n_1, m_1)(n_2, m_2)})'$

$$\frac{\partial R_1}{\partial \gamma_0} = -\frac{\gamma_1^{n_1 m_1} - 1}{\gamma_1^{n_1} - 1}, \quad \frac{\partial R_1}{\partial \delta_1} = \frac{\gamma_1^{n_1 m_1} - 1}{\gamma_1^{m_1} - 1}, \quad \frac{\partial R_1}{\partial \delta_2} = 0$$

oraz

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_2}{\partial \gamma_0} &= -\gamma_1 \frac{(\gamma_1^{m_2-m_1n_2} - 1) \gamma_1^{bn_1} - 1}{\gamma_1 - 1} = -\frac{(\gamma_1^{m_2-m_1n_2} - 1) \gamma_1^{a_{m_1}} - \gamma_1}{\gamma_1 - 1}, \\ \frac{\partial R_2}{\partial \delta_1} &= \frac{\gamma_1^{m_2-m_1n_2} - 1}{\gamma_1 - 1} \frac{\gamma_1^{a_{m_1}} - 1}{\gamma_1^{m_1} - 1} + \gamma_1^{m_2-m_1n_2} \frac{\gamma_1^{m_1n_1n_2} - 1}{\gamma_1^{m_1} - 1}, \\ \frac{\partial R_2}{\partial \delta_2} &= -\frac{\gamma_1^{m_2-m_1n_2+m_1n_1n_2} - 1}{\delta_2 - 1}.\end{aligned}$$

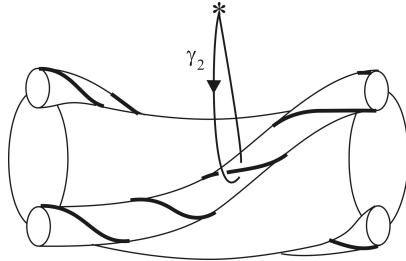
Zatem minorami stopnia drugiego macierzy Aleksandra grupy $\pi(T^2)'$ są

$$\begin{aligned}M_1 &= \begin{vmatrix} \frac{\partial R_1}{\partial \gamma_0} & \frac{\partial R_1}{\partial \delta_1} \\ \frac{\partial R_2}{\partial \gamma_0} & \frac{\partial R_2}{\partial \delta_1} \end{vmatrix} = \frac{\partial R_1}{\partial \gamma_0} \frac{\partial R_2}{\partial \delta_1} - \frac{\partial R_1}{\partial \delta_1} \frac{\partial R_2}{\partial \gamma_0} \\ &= -\frac{\gamma_1^{n_1m_1} - 1}{\gamma_1^{n_1} - 1} \left(\frac{(\gamma_1^{m_2-m_1n_2} - 1) (\gamma_1^{a_{m_1}} - 1)}{\gamma_1 - 1} + \gamma_1^{m_2-m_1n_2} \frac{\gamma_1^{m_1n_1n_2} - 1}{\gamma_1^{m_1} - 1} \right) \\ &\quad - \frac{\gamma_1^{n_1m_1} - 1}{\gamma_1^{m_1} - 1} \left(-\frac{(\gamma_1^{m_2-m_1n_2} - 1) (\gamma_1^{a_{m_1}} - \gamma_1)}{\gamma_1 - 1} \right) \\ &= -\frac{\gamma_1^{m_2-m_1n_2} (\gamma_1^{n_1m_1} - 1) (\gamma_1^{m_1n_1n_2} - 1)}{(\gamma_1^{n_1} - 1) (\gamma_1^{m_1} - 1)} - \frac{(\gamma_1^{m_2-m_1n_2} - 1) (\gamma_1^{n_1m_1} - 1)}{(\gamma_1^{n_1} - 1) (\gamma_1^{m_1} - 1)} \\ &= -\frac{(\gamma_1^{n_1m_1} - 1) (\gamma_1^{m_2-m_1n_2+m_1n_1n_2} - 1)}{(\gamma_1^{n_1} - 1) (\gamma_1^{m_1} - 1)} = -W_{n_1, m_1}(\gamma_1) \frac{\gamma_1^{m_2-m_1n_2+m_1n_1n_2} - 1}{\gamma_1 - 1},\end{aligned}$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial R_1}{\partial \gamma_0} & \frac{\partial R_1}{\partial \delta_2} \\ \frac{\partial R_2}{\partial \gamma_0} & \frac{\partial R_2}{\partial \delta_2} \end{vmatrix} = \frac{\partial R_1}{\partial \gamma_0} \frac{\partial R_2}{\partial \delta_2} = \frac{\gamma_1^{n_1m_1} - 1}{\gamma_1^{n_1} - 1} \frac{\gamma_1^{m_2-m_1n_2+m_1n_1n_2} - 1}{\delta_2 - 1},$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial R_1}{\partial \delta_1} & \frac{\partial R_1}{\partial \delta_2} \\ \frac{\partial R_2}{\partial \delta_1} & \frac{\partial R_2}{\partial \delta_2} \end{vmatrix} = \frac{\partial R_1}{\partial \delta_1} \frac{\partial R_2}{\partial \delta_2} = \frac{\gamma_1^{n_1m_1} - 1}{\gamma_1^{m_1} - 1} \frac{\gamma_1^{m_2-m_1n_2+m_1n_1n_2} - 1}{\delta_2 - 1}.$$

Ponieważ generatorem grupy $\pi(T^2)'$ jest pętla γ_2



więc oczywiście $\gamma_1 = \gamma_2^{n_2}$ oraz z równości (4) mamy $\delta_2 = \gamma_2^{m_2 - m_1 n_2 + m_1 n_1 n_2}$. Stąd

$$\begin{aligned} M_1 &= -W_{n_1, m_1}(\gamma_2^{n_2}) \frac{\gamma_2^{(m_2 - m_1 n_2 + m_1 n_1 n_2) n_2} - 1}{\gamma_2^{n_2} - 1}, \\ M_2 &= \frac{\gamma_2^{n_1 m_1 n_2} - 1}{\gamma_2^{n_1 n_2} - 1} \frac{\gamma_2^{(m_2 - m_1 n_2 + m_1 n_1 n_2) n_2} - 1}{\gamma_2^{m_2 - m_1 n_2 + m_1 n_1 n_2} - 1}, \\ M_3 &= \frac{\gamma_2^{n_1 m_1 n_2} - 1}{\gamma_2^{m_1 n_2} - 1} \frac{\gamma_2^{(m_2 - m_1 n_2 + m_1 n_1 n_2) n_2} - 1}{\gamma_2^{m_2 - m_1 n_2 + m_1 n_1 n_2} - 1}. \end{aligned}$$

Ponieważ $\text{NWD}(n_2, m_2 - m_1 n_2 + m_1 n_1 n_2) = 1$, więc łatwo wykazujemy

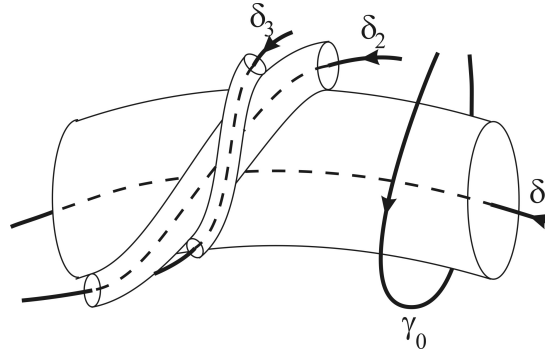
$$\begin{aligned} &\text{NWD}(M_1, M_2, M_3) = \text{NWD}(M_1, \text{NWD}(M_2, M_3)) \\ &= \text{NWD}\left(M_1, \frac{\gamma_2^{(m_2 - m_1 n_2 + m_1 n_1 n_2) n_2} - 1}{\gamma_2^{m_2 - m_1 n_2 + m_1 n_1 n_2} - 1} \text{NWD}\left(\frac{\gamma_1^{n_1 m_1 n_2} - 1}{\gamma_1^{n_1 n_2} - 1}, \frac{\gamma_1^{n_1 m_1 n_2} - 1}{\gamma_1^{m_1 n_2} - 1}\right)\right) \\ &= \text{NWD}\left(M_1, \frac{\gamma_2^{(m_2 - m_1 n_2 + m_1 n_1 n_2) n_2} - 1}{\gamma_2^{m_2 - m_1 n_2 + m_1 n_1 n_2} - 1} W_{n_1, m_1}(\gamma_2^{n_2})\right) \\ &= W_{n_1, m_1}(\gamma_2^{n_2}) \text{NWD}\left(\frac{\gamma_2^{(m_2 - m_1 n_2 + m_1 n_1 n_2) n_2} - 1}{\gamma_2^{n_2} - 1}, \frac{\gamma_2^{(m_2 - m_1 n_2 + m_1 n_1 n_2) n_2} - 1}{\gamma_2^{m_2 - m_1 n_2 + m_1 n_1 n_2} - 1}\right) \\ &= W_{n_1, m_1}(\gamma_2^{n_2}) W_{n_2, m_2 - m_1 n_2 + m_1 n_1 n_2}(\gamma_2). \end{aligned}$$

Przyjmując $t = \gamma_2$ otrzymujemy tezę. ■

Omówimy teraz ogólny przypadek węzła torycznego g -tego rzędu

$$T^g := T_{(n_1, m_1) \dots (n_g, m_g)} \subset \partial P.$$

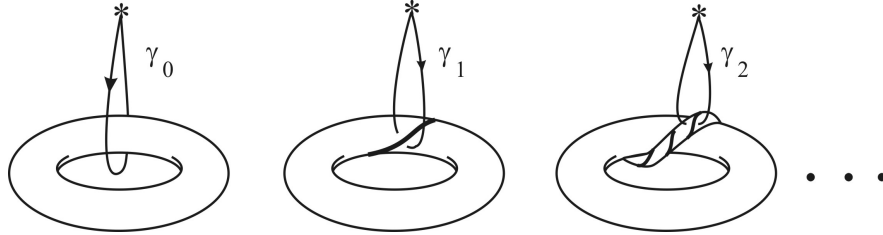
Obliczymy jego grupę podstawową $\pi(T^g) = \pi_1(\partial P \setminus T^g, *)$, gdzie $*$ $\notin T^g$. Punkt $*$ wybieramy na $\partial(\text{Tube}(T^{g-1})) \setminus T^g$. Podobnie jak w przypadku węzłów torycznych drugiego rzędu można wykazać, że generatorami $\pi(T^g)$ są γ_0 oraz "osie" $\delta_1, \dots, \delta_g$ kolejnych otoczeń tubularnych.



Oczywiście $\delta_1 \sim T^0 := T_{1,1}$, $\delta_2 \sim T^1, \dots, \delta_g \sim T^{g-1}$ w ∂P . Rozumując jak w przypadku węzłów torycznych drugiego rzędu (stosując twierdzenie Seiferta-van Kampena) otrzymamy, że między tymi generatorami zachodzą relacje

$$(5) \quad \begin{aligned} R_1 : \delta_1^{n_1} &= \gamma_0^{m_1}, \\ R_2 : \delta_2^{n_2} &= \gamma_1^{m_2 - m_1 n_2} \delta_1^{n_1 n_2}, \\ &\dots\dots\dots \\ R_g : \delta_g^{n_g} &= \gamma_{g-1}^{m_g - m_{g-1} n_g} \delta_{g-1}^{n_{g-1} n_g}, \end{aligned}$$

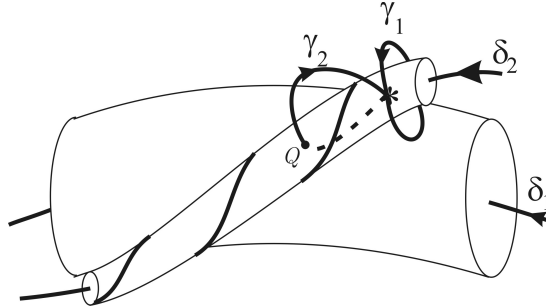
gdzie $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{g-1}$ są pętlami obejmującymi jedną nić węzła torycznego T^0, T^1, \dots, T^{g-1} .



Pętle te spełniają zależności

$$(6) \quad \begin{aligned} \gamma_1 &= \delta_1^{a_1} \gamma_0^{-b_1}, \text{ gdzie } a_1, b_1 \in \mathbb{N}, a_1 m_1 - b_1 n_1 = 1, \\ \gamma_2 &= \delta_2^{a_2} \gamma_1^{-b_2 + a_2 m_1} \delta_1^{-a_2 n_1}, \text{ gdzie } a_2, b_2 \in \mathbb{N}, a_2 m_2 - b_2 n_2 = 1, \\ &\dots\dots\dots \\ \gamma_{g-1} &= \delta_{g-1}^{a_{g-1}} \gamma_{g-2}^{-b_{g-1} + a_{g-1} m_{g-2}} \delta_{g-2}^{-a_{g-1} n_{g-2}}, \text{ gdzie } a_{g-1}, b_{g-1} \in \mathbb{N}, \\ &\qquad\qquad\qquad a_{g-1} m_{g-1} - b_{g-1} n_{g-1} = 1. \end{aligned}$$

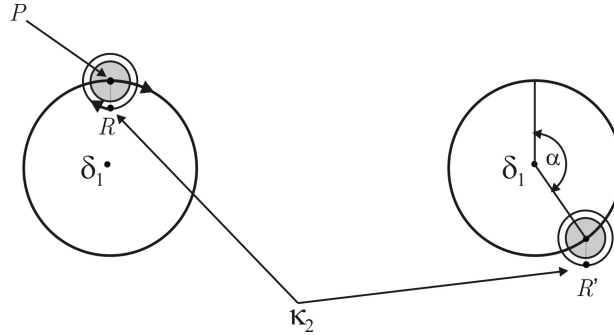
Istotnie, wykażemy to dla γ_2 , gdyż rozumowanie w ogólnym przypadku jest analogiczne. Musimy wyrazić γ_2 za pomocą $\gamma_1, \delta_1, \delta_2$. Umieścimy punkt $*$ na $\partial(\text{Tube}(T^1)) \setminus T^2$. Oznaczmy przez Q punkt na $\partial(\text{Tube}(T^1)) \setminus T^2$ różniący się od punktu $*$ o $1/m$ obrotu rzutu na pierwszą oś (we współrzędnych zadanych kanonicznym homeomorfizmem $\Phi_1 : T \rightarrow \partial(\text{Tube}(T^1))$).



Na mocy lematu 3.4 w I części punkt Q można połączyć z punktem $*$ krzywą leżącą w $\partial(\text{Tube}(T^1))$ "równoległą" do T^2 . We współrzędnych zadanych kanonicznym homeomorfizmem $\Phi_1 : T \rightarrow \partial(\text{Tube}(T^1))$ obiega ona $a_2 - 1/m_2$ razy wzdłuż i b_2 wokół torus $\partial(\text{Tube}(T^1))$. Zatem przesuując punkt Q wzdłuż tej krzywej wraz z całą krzywą γ_2 otrzymamy krzywą homotopijną γ_2 w $\partial P \setminus T^2$ o początku i końcu w $*$, której pierwsza część leży wewnątrz $\text{Tube}(T^1)$ (z wyjątkiem początku i końca w $*$) a druga na zewnątrz $\text{Tube}(T^1)$. Oznaczmy te krzywe przez κ_1 i κ_2 , czyli $\gamma_2 = \kappa_1 \kappa_2$. Wyznamy teraz κ_1 i κ_2 w zależności od $\gamma_1, \delta_1, \delta_2$. Ponieważ krzywa łącząca Q z $*$ dokonuje $a_2 - 1/m_2$ a część początkowa γ_2 od punktu $*$ do Q dokonuje $1/m_2$ obrotu wzdłuż $\partial(\text{Tube}(T^1))$ (we współrzędnych zadanych kanonicznym homeomorfizmem $\Phi_1 : T \rightarrow \partial(\text{Tube}(T^1))$), a δ_2 jest osią $\text{Tube}(T^1)$, więc oczywiście

$$\kappa_1 = \delta_2^{a_2}.$$

Wyznaczenie κ_2 jest znacznie trudniejsze. Krzywa κ_2 dokonuje $-b_2$ obrotów wokół $\partial(\text{Tube}(T^1))$ (we współrzędnych zadanych homeomorfizmem Φ_1). Wyznamy $s \in \mathbb{Z}$ takie, by $\gamma_1^s \kappa_2$ była wielokrotnością δ_1 , a dokładniej równa $\delta_1^{-a_2 n_1}$ (bo rzut κ_2 na pierwszą oś dokonuje $-a_2 n_1$ obrotów - a_2 obrotów we współrzędnych Φ_1 a każdy taki obrót odpowiada n_1 obrotom rzutu na pierwszą oś w \mathbb{C}^2). Zaanalizujmy jeden obrót wokół $\partial(\text{Tube}(T^1))$ w kierunku orientacji ujemnej.



Po jednym obrocie w kierunku ujemnym wokół $\partial(\text{Tube}(T^1))$ punkt R przechodzi w punkt R' oraz rzut drogi wykonanej przez punkt R na pierwszą oś wykona oczywiście $n_1 \frac{a_2}{b_2}$ obrotu (bo prędkość obrotowa R to $\frac{a_2}{b_2}$) w kierunku orientacji ujemnej. Zatem punkt P (jego prędkość obrotowa to $\frac{m_1}{n_1}$) dokona wtedy obrót $\alpha = \frac{m_1}{n_1} n_1 \frac{a_2}{b_2} = \frac{m_1 a_2}{b_2}$ w kierunku orientacji ujemnej. Zatem aby otrzymać krzywą będącą wielokrotnością δ_1 nie wystarczy dokonać 1 obrotu (na każdy pojedynczy obrót κ_2), ale należy dodać jeszcze obrót α w kierunku ujemnym. Ponieważ κ_2 dokonuje b_2 obrotów więc $s = b_2(1 - \alpha) = b_2 - m_1 a_2$. Stąd $\gamma_1^{b_2 - m_1 a_2} \kappa_2 = \delta_1^{-a_2 n_1}$, czyli $\kappa_2 = \gamma_1^{-b_2 + m_1 a_2} \delta_1^{-a_2 n_1}$. W konsekwencji

$$\gamma_2 = \kappa_1 \kappa_2 = \delta_2^{a_2} \gamma_1^{-b_2 + m_1 a_2} \delta_1^{-a_2 n_1}.$$

Zatem otrzymaliśmy

Twierdzenie 2.6 Dla dowolnego ciągu par liczb naturalnych $((n_1, m_1) \cdots (n_g, m_g))$ takiego, że $\text{NWD}(n_i, m_i) = 1$, $i = 1, \dots, g$, mamy

$$\pi(T_{(n_1, m_1) \cdots (n_g, m_g)}) = \mathcal{F}(\gamma_0, \delta_1, \dots, \delta_g) / (R_1, \dots, R_g),$$

gdzie R_1, \dots, R_g są relacjami podanymi w (5) i (6).

Możemy teraz podać wielomian Aleksandra węzła $T^g := T_{(n_1, m_1) \cdots (n_g, m_g)}$.

Twierdzenie 2.7

$$(7) \quad A_{T^g}(t) = W_{n_1, \lambda_1}(t^{n_2 \cdots n_g}) W_{n_2, \lambda_2}(t^{n_3 \cdots n_g}) \cdots W_{n_{g-1}, \lambda_{g-1}}(t^{n_g}) W_{n_g, \lambda_g}(t),$$

gdzie ciąg liczb $\lambda_1, \dots, \lambda_g$ jest określony rekurencyjnie

$$(8) \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= m_1, \\ \lambda_k &= m_k - m_{k-1}n_k + \lambda_{k-1}n_{k-1}n_k, \quad k \geq 2. \end{aligned}$$

Dowód. Wykazaliśmy to dla $g = 1$ i $g = 2$. Dowód ogólnego przypadku można znaleźć w [Le]. ■

Uwaga 2.8 W szczególności dla węzła $T := T_{(2,1)(2,1)}$ mamy $A_T(t) = W_{2,3}(t)$, a więc nie jest to węzeł trywialny.

Wykażemy teraz, że przy dodatkowych warunkach wielomian Aleksandra węzła torycznego jednoznacznie go charakteryzuje. Udowodnimy to przy założeniach

$$(9) \quad n_k > 1, \quad k = 1, \dots, g$$

$$(10) \quad m_k - m_{k-1}n_k > 0, \quad k = 2, \dots, g,$$

Warunek ten w przypadku węzłów torycznych związanych z lokalnymi krzywymi jest zawsze spełniony. Najpierw udowodnimy lemat

Lemat 2.9 Jeśli zachodzą nierówności (9) i (10), to

$$(11) \quad \lambda_g > \lambda_i n_i \cdots n_g, \quad i = 1, \dots, g-1,$$

$$(12) \quad \lambda_g n_g > \lambda_i n_i \cdots n_g, \quad i = 1, \dots, g-1.$$

Dowód. Ponieważ druga nierówność wynika z pierwszej, więc wystarczy udowodnić pierwszą z nich. Z nierówności (9) i (10) mamy

$$\begin{aligned} \lambda_g &= m_g - m_{g-1}n_g + \lambda_{g-1}n_{g-1}n_g > \lambda_{g-1}n_{g-1}n_g \\ &= (m_{g-1} - m_{g-2}n_{g-1} + \lambda_{g-2}n_{g-2}n_{g-1})n_{g-1}n_g \\ &> \lambda_{g-2}n_{g-2}n_{g-1}^2n_g \geq \lambda_{g-2}n_{g-2}n_{g-1}n_g \\ &\geq \dots \geq \lambda_i n_i \cdots n_g. \end{aligned}$$

■

Twierdzenie 2.10 Niech $T := T_{(n_1, m_1) \dots (n_g, m_g)}$ i $T' := T_{(n'_1, m'_1) \dots (n'_h, m'_h)}$ będą dwoma węzłami torycznymi takimi że

$$(13) \quad \begin{aligned} n_i &> 1, \quad i = 1, \dots, g, & n'_i &> 1, \quad i = 1, \dots, h, \\ m_i - m_{i-1}n_i &> 0, \quad i = 2, \dots, g, \\ m'_i - m'_{i-1}n'_i &> 0, \quad i = 2, \dots, h. \end{aligned}$$

Załóżmy, że ich wielomiany Aleksandra $A_T(t)$ i $A_{T'}(t)$ są równe. Wówczas

$$\begin{aligned} g &= h, \\ n_i &= n'_i, \quad i = 1, \dots, g, \\ m_i &= m'_i, \quad i = 1, \dots, g. \end{aligned}$$

Dowód. Na mocy założenia $A_T(t) = A_{T'}(t)$. Wielomian $A_T(t)$ zadany jest wzorami (7) i (8). Analogicznie

$$\begin{aligned} A_{T'}(t) &= W_{n'_1, \lambda'_1}(t^{n'_2 \dots n'_h}) W_{n'_2, \lambda'_2}(t^{n'_3 \dots n'_h}) \dots W_{n'_{h-1}, \lambda'_{h-1}}(t^{n'_h}) W_{n'_h, \lambda'_h}(t), \\ \lambda'_1 &= m'_1, \\ \lambda'_k &= m'_k - m'_{k-1}n'_k + \lambda'_{k-1}n'_{k-1}n'_k, \quad k \geq 2. \end{aligned}$$

Wykażemy najpierw, że

$$(14) \quad (n_g, \lambda_g) = (n'_h, \lambda'_h).$$

Z postaci wielomianów rozkładu $A_T(t)$ i $A_{T'}(t)$ na czynniki

$$\begin{aligned} W_{n_i, \lambda_i}(t^{n_{i+1} \dots n_g}) &= \frac{(t^{\lambda_i n_i \dots n_g} - 1)(t^{n_{i+1} \dots n_g} - 1)}{(t^{\lambda_i n_{i+1} \dots n_g} - 1)(t^{n_i \dots n_g} - 1)}, \\ W_{n_g, \lambda_g}(t) &= \frac{(t^{\lambda_g n_g} - 1)(t - 1)}{(t^{\lambda_g} - 1)(t^{n_g} - 1)} \end{aligned}$$

i nierówności (12) oraz analogicznej dla T' wynika, że

$$(15) \quad \lambda_g n_g = \lambda'_h n'_h.$$

Istotnie, w przeciwnym przypadku bowiem, np. gdyby $\lambda_g n_g > \lambda'_h n'_h$, to na mocy założenia, że $n_g > 1$, $n'_h > 1$ pewien pierwotny pierwiastek z jednościi stopnia $\lambda_g n_g$ byłby pierwiastkiem wielomianu $A_T(t)$ a nie byłby pierwiastkiem $A_{T'}(t)$, co niemożliwe.

Z równości (15) wynika w sposób podobny do powyższego, że

$$(16) \quad \lambda_g = \lambda'_h.$$

Istotnie, w przeciwnym przypadku, np. gdyby $\lambda_g > \lambda'_h$, to z nierówności (11) oraz analogicznej dla T' wynikałoby, że pewien pierwotny pierwiastek z jednościi stopnia

- [K] Kähler E., *Über die Verzweigung einer algebraischen Funktion zweier Veränderlichen in der Umgebung einer singulären Stelle*. Math. Zeit. 30(1929), 188–204.
- [Kr] Krasinski T., *Krzywe a węzły I. Węzły toryczne pierwszego rzędu*. Materiały na XXXII Konf. Szkol. z Geometrii Analitycznej i Algebraicznej Zespólonej. Wydawnictwo UŁ 2011, 23–46 (<http://konfogi.math.uni.lodz.pl/>).
- [Le] Lê Dũng Tráng, *Sur les næds algébriques*. Compos. Math. 25(1972), 281–321.
- [L] Łojasiewicz S., *Wstęp do Geometrii Analitycznej Zespólonej*, PWN, Warszawa 1988.
- [M] Milnor J., *Singular Points of Complex Hypersurfaces*, Princeton University Press, Princeton 1968.
- [P] Pham P., *Singularities des Courbes Planes*, Cours de 3e cycle, Faculte des Sciences de Paris, Anne Universitaire 1969-1970.
- [Re] Reeve J.E., *A summary of results in the topological classification of plane algebroid singularities*, Università e Politecnico di Torino, Rendiconti del Seminario Matematico 1954/55, 159-187.
- [R] Rolfsen D., *Knots and Links*. AMS Chelsea Publishing 2003.
- [W] Wall C. T. C., *Singular Points of Plane Curves*. Cambridge University Press 2004.
- [Z] Zariski O., *On the topology of algebroid singularities*. Amer. J. Math. 54(1932), 453–465.

3 Curves and knots II. Torus knots of higher order

Summary. In the article torus knots of higher order are described. They are related to singularities of local analytic curves.

Łódź, 9 – 13 stycznia 2012 r.

Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Łódzki,
90-238 Łódź, ul. Banacha 22
e-mail: krasinsk@uni.lodz.pl

