Jakobianowy wielokąt Newtona odwzorowania o składowych transwersalnych i niezdegenerowanych

Paweł Łabędzki
(współpraca A. Lenarcik)

Politechnika Świętokrzyska

11/01/2018 r.

Definicja $\mathcal{N}_J(f,g)$

Niech $f, g \in \mathbb{C}\{X, Y\}$ – zredukowane oraz

$$J(f,g) = \frac{\partial f}{\partial X}\frac{\partial g}{\partial Y} - \frac{\partial f}{\partial Y}\frac{\partial g}{\partial X} = h_1 h_2 \ldots h_m,$$

$h_1, \ldots, h_m \in \mathbb{C}\{X, Y\}$ – nierozkładalne.
Jakobianowym diagramem Newtona odwzorowania $(f,g) : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ nazywamy diagram Newtona $\mathcal{N}_J(f,g)$ określony następująco:

$$\mathcal{N}_J(f,g) = \sum_{i=1}^{m} \left\{ \frac{i_0(g, h_i)}{i_0(f, h_i)} \right\}$$

Pod koniec lat 90 Maugendre udowodniła, że ilorazy jakobianowe $\frac{i_0(g,h_i)}{i_0(f,h_i)}$ są niezmiennikami klasy ekwisingularności pary (f,g).
W roku 2002 Carine Reydy badała ilorazy jakobinowe dla par niezdegenerowanych diagramów Newtona.
W roku 2004 Kuo i Parusiński opisywali ilorazy jakobianowe za pomocą drzew Kuo-Lu.
W roku 2008 Michel pokazała, że cały $\mathcal{N}_J(f,g)$ jest niezmiennikiem ekwisingularności pary (f,g).
Krótki dowód twierdzenia Michel podał w roku 2012 Janusz Gwoździewicz

Rozważane przypadki

Rozważmy $f, g \in \mathbb{C}\{X, Y\}$ zredukowane, transwersalne i niezdegenerowane.
Szereg nazwiemy zwykłym, jeśli wszystkie jego składowe jednostyczne są nieosobliwe.
W naszym przypadku możliwe są trzy sytuacje:

Rozważane przypadki

Rozważmy $f, g \in \mathbb{C}\{X, Y\}$ zredukowane, transwersalne i niezdegenerowane.
Szereg nazwiemy zwykłym, jeśli wszystkie jego składowe jednostyczne są nieosobliwe.
W naszym przypadku możliwe są trzy sytuacje:

1. oba szeregi są zwykłe

Rozważane przypadki

Rozważmy $f, g \in \mathbb{C}\{X, Y\}$ zredukowane, transwersalne i niezdegenerowane.
Szereg nazwiemy zwykłym, jeśli wszystkie jego składowe jednostyczne są nieosobliwe.
W naszym przypadku możliwe są trzy sytuacje:

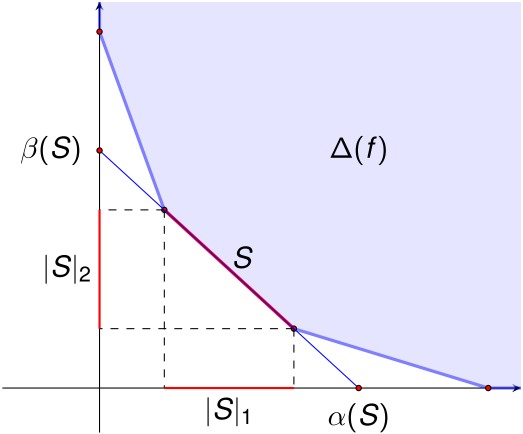
1. oba szeregi są zwykłe
2. każdy z szeregów ma dokładnie jedną osobliwą komponentę jednostyczną

Rozważane przypadki

Rozważmy $f, g \in \mathbb{C}\{X, Y\}$ zredukowane, transwersalne i niezdegenerowane.
Szereg nazwiemy zwykłym, jeśli wszystkie jego składowe jednostyczne są nieosobliwe.
W naszym przypadku możliwe są trzy sytuacje:

1. oba szeregi są zwykłe
2. każdy z szeregów ma dokładnie jedną osobliwą komponentę jednostyczną
3. jeden z szeregów jest zwykły, drugi ma co najwyżej dwie osobliwe komponenty jednostyczne

Oznaczenia



Definicje

- Odcinek $S \in \mathcal{N}_f$ nazywamy głównym, gdy $|S|_1 = |S|_2$,

Definicje

- Odcinek $S \in \mathcal{N}_f$ nazywamy głównym, gdy $|S|_1 = |S|_2$,
- $\mathcal{N}'_f =$ łamana Newtona $\mathcal{N}_f$ bez odcinka głównego.

Definicje

- Odcinek $S \in \mathcal{N}_f$ nazywamy głównym, gdy $|S|_1 = |S|_2$,
- $\mathcal{N}'_f =$ łamana Newtona $\mathcal{N}_f$ bez odcinka głównego.
- Odcinek $S \in \mathcal{N}'_f$ kojarzymy z osią, z którą tworzy mniejszy kąt

Definicje

- Odcinek $S \in \mathcal{N}_f$ nazywamy głównym, gdy $|S|_1 = |S|_2$,
- $\mathcal{N}'_f =$ łamana Newtona $\mathcal{N}_f$ bez odcinka głównego.
- Odcinek $S \in \mathcal{N}'_f$ kojarzymy z osią, z którą tworzy mniejszy kąt
- Krotnością $S \in \mathcal{N}'_f$ nazywamy liczbę $m(S) = \min\{|S|_1, |S|_2\}$, gdy S nie dotyka osi z nim skojarzonej oraz $m(S) = \min\{|S|_1, |S|_2\} - 1$, gdy S jej dotyka,

Definicje

- Odcinek $S \in \mathcal{N}_f$ nazywamy głównym, gdy $|S|_1 = |S|_2$,
- $\mathcal{N}'_f$ = łamana Newtona $\mathcal{N}_f$ bez odcinka głównego.
- Odcinek $S \in \mathcal{N}'_f$ kojarzymy z osią, z którą tworzy mniejszy kąt
- Krotnością $S \in \mathcal{N}'_f$ nazywamy liczbę $m(S) = \min\{|S|_1, |S|_2\}$, gdy S nie dotyka osi z nim skojarzonej oraz $m(S) = \min\{|S|_1, |S|_2\} - 1$, gdy S jej dotyka,
- $t(f)$ = liczba stycznych do f

Postać $\mathcal{N}_J(f,g)$

Twierdzenie

Jeżeli $f, g \in \mathbb{C}\{X, Y\}$ zredukowane, transwersalne, niezdegenerowane, to:

Postać $\mathcal{N}_J(f, g)$

Twierdzenie

Jeżeli $f, g \in \mathbb{C}\{X, Y\}$ zredukowane, transwersalne, niezdegenerowane, to:

- Jeśli f, g są zwykłe, to

$$\mathcal{N}_J(f, g) = \left\{ \frac{(\mathrm{ord}\, g)(\mathrm{ord}\, f + \mathrm{ord}\, g - 2)}{(\mathrm{ord}\, f)(\mathrm{ord}\, f + \mathrm{ord}\, g - 2)} \right\}$$

Postać $\mathcal{N}_J(f, g)$ c.d.

Twierdzenie c.d.

- Jeżeli każdy z szeregów f, g ma dokładnie jedną osobliwą komponentę jednostyczną, to

$$\mathcal{N}_J(f,g) = \left\{\frac{(\mathrm{ord}\ g)(t(f)+t(g)-2)}{(\mathrm{ord}\ f)(t(f)+t(g)-2)}\right\} + \\ + \sum_{S\in\mathcal{N}'_f}\left\{\frac{(\mathrm{ord}\ g)m(S)}{\max\{\alpha(S),\beta(S)\}m(S)}\right\} + \\ + \sum_{S\in\mathcal{N}'_g}\left\{\frac{\{\max\{\alpha(S),\beta(S)\}m(S)}{(\mathrm{ord}\ f)m(S)}\right\}$$

Postać $\mathcal{N}_J(f, g)$ c.d.

Twierdzenie c.d.

- Jeżeli f jest zwykły, g ma co najwyżej dwie osobliwe komponenty jednostyczne, to

$$\mathcal{N}_J(f, g) = \left\{ \frac{(\operatorname{ord} g)(t(f) + t(g) - 2)}{(\operatorname{ord} f)(t(f) + t(g) - 2)} \right\} + \\ + \sum_{S \in \mathcal{N}'_g} \left\{ \frac{\max\{\alpha(S), \beta(S)\} m(S)}{(\operatorname{ord} f) m(S)} \right\}$$

Twierdzenie powyższe jest uogólnieniem rezultatu z pracy Lenarcik A., Masternak M., Płoski A. (2003). Factorization of the polar curve and the Newton polygon. *Kodai Mathematical Journal*

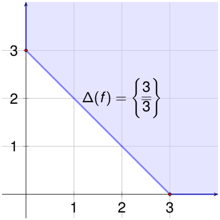
Wniosek 1.2

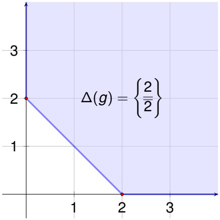
Jeżeli $f \in \mathbb{C}\{X, Y\}$, ord $f = 1$, $g \in \mathbb{C}\{X, Y\}$ niezdegenerowany, transwersalny z f, to:

$$\mathcal{N}_J(f, g) = \left\{ \frac{(\operatorname{ord} g)(t(g) - 1)}{t(g) - 1} \right\} + \\ + \sum_{S \in \mathcal{N}'_g} \left\{ \frac{\max\{\alpha(S), \beta(S)\} m(S)}{m(S)} \right\}$$

Przykłady ilustrujące twierdzenie (1)

$f = 2X^3 + X^2Y - 2XY^2 - Y^3 + Y^4$, $g = X^3 + X^2 - 4Y^2$,
in $f = (X+Y)(X-Y)(2X+Y)$, in $g = (X-2Y)(X+2Y)$,

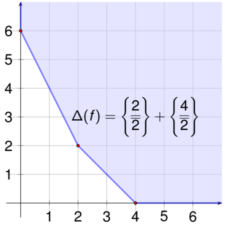


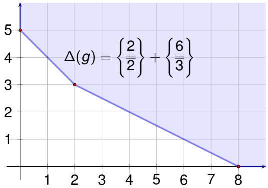


$$\mathcal{N}_J(f,g) = \left\{\frac{2\cdot 3}{3\cdot 3}\right\}$$

Przykłady ilustrujące twierdzenie (2)

$f = X^4 - X^2Y^2 + Y^6$, $g = X^8 + 4X^2Y^3 - Y^5$, wtedy:
in $f = X^2(X+Y)(X-Y)$, in $g = Y^3(2X+Y)(2X-Y)$

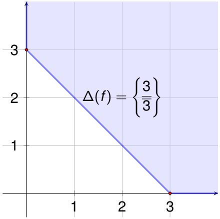


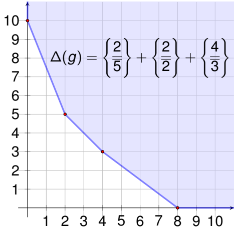


$$\mathcal{N}_J(f,g) = \left\{\frac{5\cdot 7}{4\cdot 7}\right\} + \left\{\frac{5\cdot 1}{6\cdot 1}\right\} + \left\{\frac{8\cdot 2}{4\cdot 2}\right\}$$

Przykłady ilustrujące twierdzenie (3)

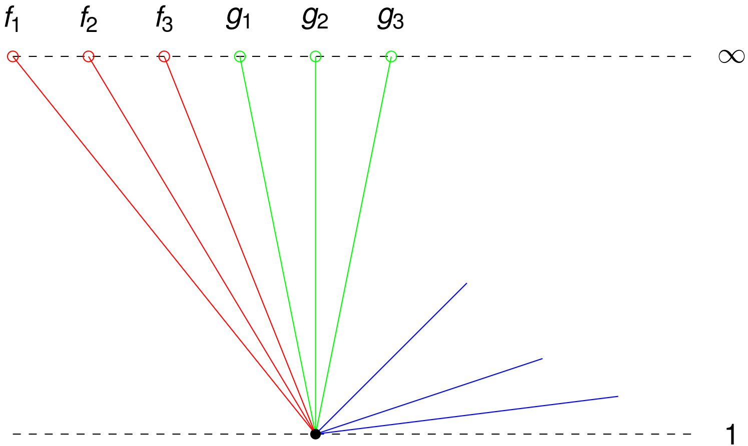
$$f = 2X^3 + X^2Y - 8XY^2 - 4Y^3,\ g = X^8 + X^4Y^3 - X^2Y^5 + Y^{10}$$
in $f = (X+2Y)(X-2Y)(2X+Y)$, in $g = X^2Y^3(X+Y)(X-Y)$,



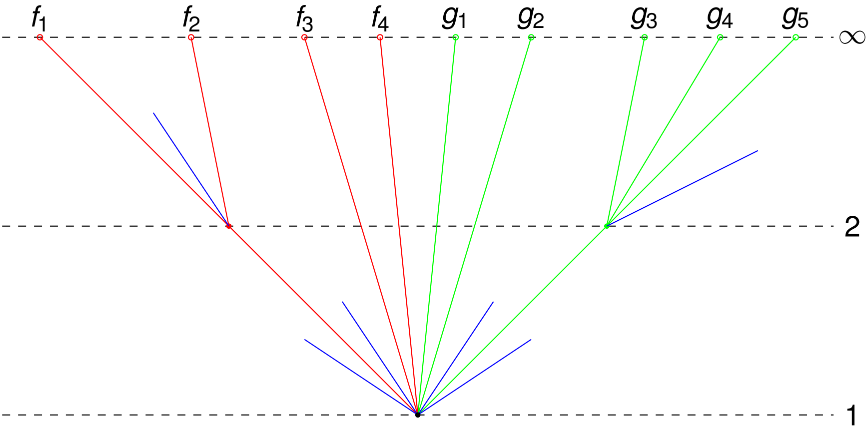


$$\mathcal{N}_J(f,g) = \left\{\frac{7\cdot 5}{3\cdot 5}\right\} + \left\{\frac{10\cdot 1}{3\cdot 1}\right\} + \left\{\frac{8\cdot 2}{3\cdot 2}\right\}$$

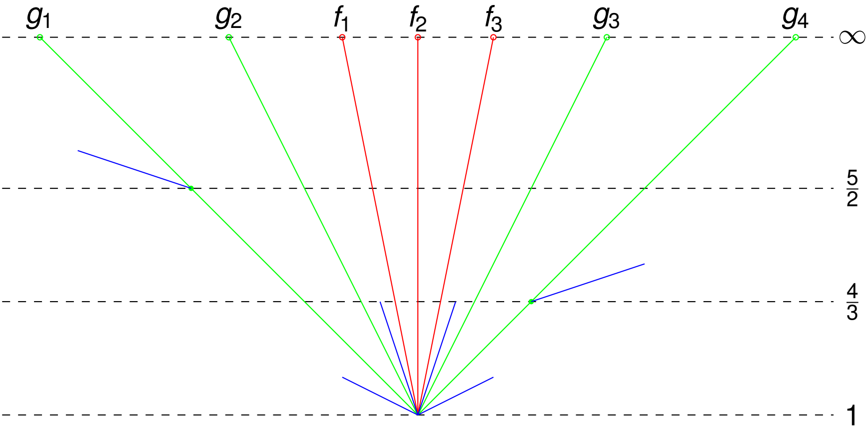
Drzewa Eggersa dla przykładów (1)



Drzewa Eggersa dla przykładów (2)



Drzewa Eggersa dla przykładów (3)



Przypadek dowolnych $f, g \in \mathbb{C}\{X, Y\}$ przechodzących przez $(0,0)$ o osobliwości izolowanej

Niech $f, g \in \mathbb{C}\{X, Y\}$, wtedy:

$$\text{in } f = L_1^{\alpha_1} L_2^{\alpha_2} \dots L_n^{\alpha_n}, \quad \text{in } g = L_1^{\beta_1} L_2^{\beta_2} \dots L_n^{\beta_n}$$

przy czym $(\alpha_i, \beta_i) \neq (0,0)$, $L_i = a_i X + b_i Y$, $i = 1, 2, \dots, n$,

$$\begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{vmatrix} \neq 0 \text{ dla } i \neq j$$

Rozważmy macierz:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \end{bmatrix}$$

Przypadek $f, g \in \mathbb{C}\{X, Y\}$ transwersalnych

Macierz A w rozważanym powyżej przypadku $f, g \in \mathbb{C}\{X, Y\}$ ($L_1, \ldots, L_n$ – styczne do f, $L_{n+1}, \ldots, L_{n+k}$ – styczne do g) są transwersalnych ma postać:

- $$A = \left[\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{matrix}}_{n} \; \underbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{matrix}}_{k} \right]$$

Przypadek $f, g \in \mathbb{C}\{X, Y\}$ transwersalnych

Macierz A w rozważanym powyżej przypadku $f, g \in \mathbb{C}\{X, Y\}$ ($L_1, \ldots, L_n$ – styczne do f, $L_{n+1}, \ldots, L_{n+k}$ – styczne do g) są transwersalnych ma postać:

- $$A = \left[\begin{matrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{matrix}}_{n} & \underbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{matrix}}_{k} \end{matrix} \right]$$

- $$A = \left[\begin{matrix} \begin{matrix} \alpha \\ 0 \end{matrix} & \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{matrix}}_{n} & \begin{matrix} 0 \\ \beta \end{matrix} & \underbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{matrix}}_{k} \end{matrix} \right]$$

  przy czym $\alpha > 1$, $\beta > 1$

Przypadek $f, g \in \mathbb{C}\{X, Y\}$ transwersalnych

- $$A = \left[\begin{array}{cccccccccc} 1 & 1 & \dots & 1 & \alpha & \beta & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad \dots \quad 0}_{n} & & & & 0 & 0 & \underbrace{1 \quad 1 \quad \dots \quad 1}_{k} & & & \end{array} \right]$$

  przy czym $\alpha > 1$ lub $\beta > 1$

$J(\mathbf{in}\ f, \mathbf{in}\ g)$

$$J(\text{in } f, \text{in } g) = \prod_{m=1}^{n} L_m^{\alpha_m+\beta_m-1} W(X, Y)$$

przy czym

$$W(X, Y) = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} A_{ij} J(L_i, L_j) \prod_{\substack{m\neq i\\ m\neq j\\ m=1}}^{n} L_m$$

$$A_{ij} = \begin{vmatrix} \alpha_i & \alpha_j \\ \beta_i & \beta_j \end{vmatrix} \quad \text{dla } i < j,\ \ i, j = 1, 2, \ldots, n$$

Własność

$J(\mathrm{in}\, f, \mathrm{in}\, g) \equiv 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{rz}\, A < 2$

Własność

$J(\text{in } f, \text{in } g) \equiv 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy rz $A < 2$

Pytanie

Niech $J(\text{in } f, \text{in } g) = \prod_{m=1}^{n} L_m^{\gamma_m} V(X, Y)$, przy czym $V(X, Y)$ nie jest podzielny przez żadną z form L_i, $i = 1, 2, \ldots, n$

Pytanie: Czy A (rz $A = 2$) jednoznacznie określa γ_m i deg V?

Własność

$J(\mathrm{in}\, f, \mathrm{in}\, g) \equiv 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy rz $A < 2$

Pytanie

Niech $J(\mathrm{in}\, f, \mathrm{in}\, g) = \prod_{m=1}^{n} L_m^{\gamma_m} V(X, Y)$, przy czym $V(X, Y)$ nie jest podzielny przez żadną z form L_i, $i = 1, 2, \ldots, n$
Pytanie: Czy A (rz $A = 2$) jednoznacznie określa γ_m i deg V?

Własność

dla rz $A = 2$ mamy $\gamma_i \geqslant \alpha_i + \beta_i - 1$, deg $V \leqslant$ deg W

Odpowiedź na pytanie

dla $n = 2$ i $n = 3$ odpowiedź brzmi: TAK

$$n = 2 \quad J(\text{in } f, \text{in } g) = L_1^{\alpha_1+\beta_1-1} L_2^{\alpha_2+\beta_2-1} A_{12} J(L_1, L_2)$$

$$n = 3 \quad J(\text{in } f, \text{in } g) = L_1^{\alpha_1+\beta_1-1} L_2^{\alpha_2+\beta_2-1} L_3^{\alpha_3+\beta_3-1} W(X, Y)$$

przy czym

$$W(X, Y) = A_{23} J(L_2, L_3) L_1 + A_{13} J(L_1, L_3) L_2 + A_{12} J(L_1, L_2) L_3$$

Odpowiedź na pytanie c.d.

dla n=4 NIE, co pokazują poniższe przykłady:
Niech

$$f = XY(X+Y)(Y-X), \quad g = X^2Y^4(X+Y)(Y-X)$$

oraz

$$\tilde{f} = XY(X+Y)(Y-2X), \quad \tilde{g} = X^2Y^4(X+Y)(Y-2X)$$

wtedy:

$$J(f,g) = 8X^4Y^4(X-Y)(X+Y)$$

czyli $\gamma_1 = 4$, $\gamma_2 = 4$, $\gamma_3 = 1$, $\gamma_4 = 1$, $\deg\ V = 0$ oraz

$$J(\tilde{f},\tilde{g}) = 4X^3Y^4(2X-Y)(X+Y)(4X+Y)$$

czyli $\gamma_1 = 3$, $\gamma_2 = 4$, $\gamma_3 = 1$, $\gamma_4 = 1$, $\deg\ V = 1$