

MATERIAŁY XVIII KONFERENCJI SZKOLENIOWEJ
Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ
ZESPOŁONEJ

1997

Łódź

str. 9

WYKŁADNIK ŁOJASIEWICZA
ODWZOROWANIA WIELOMIANOWEGO
I DIAGRAMY NEWTONA

Andrzej Lenarcik (Kielce)

Abstrakt

W pracy podane jest górne oszacowanie wykładnika Łojasiewicza w nieskończoności gradientu funkcji wielomianowej $h : \mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{C}$ na podstawie informacji zawartej w jej diagramie Newtona. W przypadku niezdegenerowanym uzyskuje się dokładną wartość wykładnika. W pracy przedstawiony jest także rezultat tego typu dla odwzorowania wielomianowego $H = (f, g) : \mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{C}^2$.

1 Wstęp

Wykładnikiem Łojasiewicza $l_\infty(H)$ odwzorowania wielomianowego $H = (f, g) : \mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{C}^2$ w nieskończoności nazywamy kres górny zbioru rzeczywistych wykładników λ takich, że

$$|H(z)| \geq c|z|^\lambda$$

w otoczeniu nieskończoności w \mathbf{C}^2 , dla pewnej stałej $c > 0$. Jeśli zbiór wykładników jest pusty to kładziemy $l_\infty(H) = -\infty$. Przyjmujemy $|z| = \max\{|x|, |y|\}$ dla $z = (x, y) \in \mathbf{C}^2$. Oczywiście powyższa definicja nie zależy od wyboru normy. Zdefi-

niowany wykładnik nazywany jest także globalnym wykładnikiem Łojasiewicza lub współczynnikiem wzrostu wielomianowego.

Chądryński i Krasieński [ChK1] wykazali, że liczba rozwiązań układu $f = g = 0$ w \mathbf{C}^2 jest skończona wtedy i tylko wtedy gdy $l_\infty(f, g) > -\infty$ i wówczas wykładnik jest osiągnięty na jednej z krzywych $\{f = 0\}$ lub $\{g = 0\}$. Autorzy dowodzą, że $l_\infty(H)$ jest liczbą wymierną lub $-\infty$. Ostatnio autorzy ci wyrazili $l_\infty(H)$ za pomocą rugownika [ChK2]. Płoski [Pł1] podał oszacowanie globalnego wykładnika Łojasiewicza odwzorowania wielomianowego $\mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}^n$ wyrażone przez stopień geometryczny odwzorowania oraz stopnie składowych. Badanie wykładnika Łojasiewicza w nieskończoności jest interesujące ze względu na związek z właściwością odwzorowania (H właściwe $\Leftrightarrow l_\infty(H) > 0$) oraz ze względu na zastosowania w teorii automorfizmów wielomianowych. Szczególnie istotne jest wyznaczanie $l_\infty(\text{grad } h)$ dla wielomianu $h : \mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{C}$. Chądryński i Krasieński wykazali, że h jest składową automorfizmu wielomianowego wtedy i tylko wtedy gdy układ $\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y} = 0$ nie ma rozwiązań i $l_\infty(\text{grad } h) > -1$ [ChK2]. Związek $l_\infty(\text{grad } h)$ z diagramem Newtona wielomianu h dostrzegli Cassou-Noguès i Ha Vui [CN-H]. Autorzy ci stosowali zaawansowane techniki topologiczne. Opis elementarnego wyprowadzenia związku pomiędzy $l_\infty(\text{grad } h)$ i diagramem Newtona wielomianu h jest głównym celem niniejszej pracy.

Wyniki prezentowane w artykule są uogólnieniem rezultatów dotyczących oszacowania lokalnego wykładnika Łojasiewicza, zawartych w pracy doktorskiej autora [L1].

2 Twierdzenie podstawowe

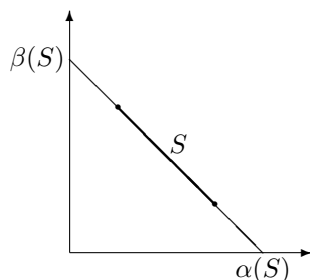
Prezentacja głównego rezultatu wymaga zdefiniowania prostych pojęć związanych z diagramem i łamaną Newtona wielomianu. Niech

$$h(X, Y) = \sum h_{\alpha\beta} X^\alpha Y^\beta$$

będzie wielomianem o współczynnikach zespolonych. Zbiór par (α, β) , dla których $h_{\alpha\beta} \neq 0$ nazywamy *nośnikiem wielomianu* i oznaczamy $\text{supp } h$. Definiujemy odpowiednio *stopnie* $\deg h$, $\deg_X h$ oraz $\deg_Y h$ jako maksima wyrażen $\alpha + \beta$, α oraz β , gdy (α, β) przebiega nośnik wielomianu. Dla $h = 0$ kładziemy $\deg h = \deg_X h = \deg_Y h = -\infty$. Analogicznie definiujemy *rzędy* $\text{ord } h$, $\text{ord}_X h$ oraz $\text{ord}_Y h$ jako minima odpowiednich wyrażen. Dla $h = 0$ kładziemy $\text{ord } h = \text{ord}_X h = \text{ord}_Y h = +\infty$.

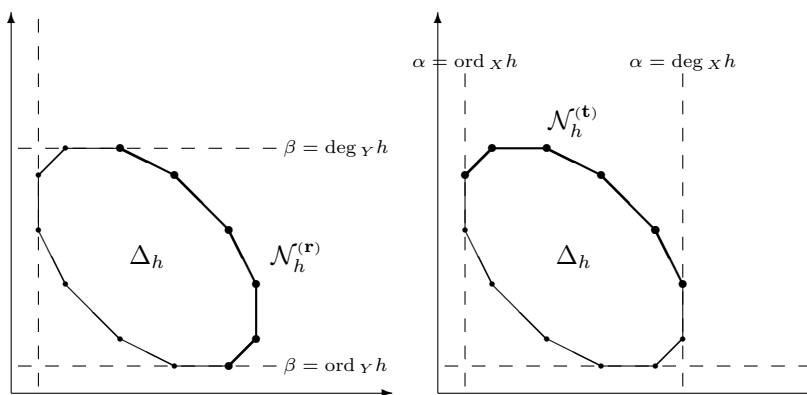
Diagram Newtona Δ_h wielomianu $h(X, Y)$ jest otoczką wypukłą jego nośnika na płaszczyźnie rzeczywistej. Definiujemy *zbiór odcinków brzegowych* diagramu Δ_h jako jedyny zbiór odcinków zwartych i parami nierównoległych których suma tworzy brzeg diagramu. Jest to zbiór skończony. Dla dowolnego odcinka brzegowego S definiujemy formę początkową $\text{in}(h, S)$ jako sumę jednomianów $h_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta$ po $(\alpha, \beta) \in S$. Mówimy, że wielomian h jest niezdegenerowany na odcinku S jeśli układ $\frac{\partial}{\partial X} \text{in}(h, S) = \frac{\partial}{\partial Y} \text{in}(h, S) = 0$ nie ma rozwiązań w $(\mathbf{C} \setminus \{0\}) \times (\mathbf{C} \setminus \{0\})$. Jeżeli odcinek S nie jest równoległy do osi poziomej to przez $\alpha(S)$ będziemy oznaczać odcięty punktu przecięcia prostej przedłużającej odcinek z osią poziomą,

zaś jeśli S nie jest równoległy do osi pionowej to przez $\beta(S)$ będziemy oznaczać rzędną punktu przecięcia prostej przedłużającej odcinek z osią pionową.

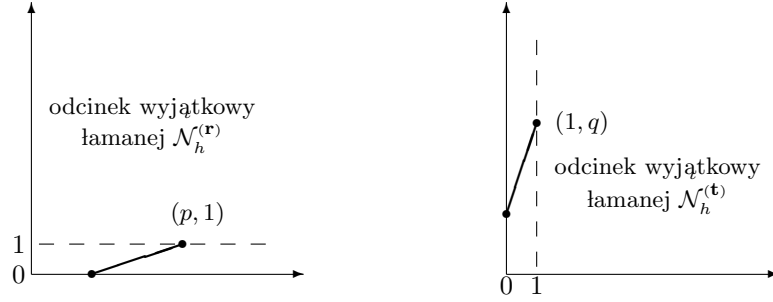


Zdefiniowane poniżej łamane Newtona są pewnymi podzbiorem zbioru odcinków brzegowych.

Łamana $\mathcal{N}_h^{(r)}$ składa się z odcinków brzegowych leżących po prawej stronie diagramu Δ_h łączących proste $\beta = \text{ord}_Y h$ i $\beta = \text{deg}_Y h$, zaś łamana $\mathcal{N}_h^{(t)}$ składa się z górnych odcinków brzegowych diagramu Δ_h łączących proste $\alpha = \text{ord}_X h$ i $\alpha = \text{deg}_X h$. Zbiór odcinków obu łamanych będziemy nazywać łamaną globalną lub łamaną w nieskończoności.



Standardowym odcinkiem łamanej $\mathcal{N}_h^{(r)}$ nazywamy odcinek, którego chociaż jeden z końców oddala się od osi poziomej o więcej niż 1. Analogicznie, standardowym odcinkiem łamanej $\mathcal{N}_h^{(t)}$ nazywamy odcinek, którego chociaż jeden z końców oddala się od osi pionowej o więcej niż 1. Odcinki, które nie są standardowe będziemy nazywać wyjątkowymi. Każda z łamanych ma co najwyżej jeden taki odcinek. Odcinek wyjątkowy łamanej $\mathcal{N}_h^{(r)}$ (jeśli występuje) łączy oś poziomą z wierzchołkiem postaci $(p, 1)$ zaś odcinek wyjątkowy łamanej $\mathcal{N}_h^{(t)}$ (jeśli występuje) łączy oś pionową z wierzchołkiem postaci $(1, q)$.



Poniższe twierdzenie jest głównym wynikiem prezentowanym w niniejszej pracy.

TWIERDZENIE 2.1. *Niech $h \in \mathbf{C}[X, Y]$ będzie wielomianem bez stałego wyrazu, zależnym istotnie od obu zmiennych, niepodzielnym ani przez X^2 ani przez Y^2 . Wówczas jeśli choć jedna z łamanych $\mathcal{N}_h^{(r)}$ lub $\mathcal{N}_h^{(t)}$ posiada odcinek standardowy to*

$$l_\infty(\text{grad } h) \leq \min \left\{ \inf_S \alpha(S), \inf_S \beta(S) \right\} - 1,$$

gdzie, w pierwszym infimum, S przebiega wszystkie standardowe odcinki łamanej $\mathcal{N}_h^{(r)}$, zaś w drugim — wszystkie standardowe odcinki łamanej $\mathcal{N}_h^{(t)}$. Ponadto, jeśli wielomian h jest niezdegenerowany na wszystkich odcinkach łamanej w nieskończoności to zachodzi równość.

Szkic dowodu twierdzenia podajemy w rozdziale 5. W wypowiedzi twierdzenia używamy kresów dolnych po zbiorach skończonych aby nadać sens wyrażeniom w przypadku gdy odpowiednie zbiory odcinków są puste. Założenie, że wielomian h jest bez stałego wyrazu nie jest ograniczające gdyż zawsze możemy rozważać wielomian bez stałego wyrazu $h(X, Y) - h(0, 0)$ o tym samym gradiencie. Gdyby wielomian nie zależał istotnie od obu zmiennych to co najmniej jedna składowa gradientu zerowałaby się, co czyni sytuację trywialną. Gdyby wielomian h był podzielny przez X^2 lub Y^2 to bez trudu sprawdzamy, że $l_\infty(\text{grad } h) = -\infty$. Przypadek gdy obie łamane $\mathcal{N}_h^{(r)}$ oraz $\mathcal{N}_h^{(t)}$ nie mają odcinków standardowych opisuje poniższa elementarna

UWAGA. *Niech $h \in \mathbf{C}[X, Y]$ będzie wielomianem bez stałego wyrazu, zależnym istotnie od obu zmiennych, niepodzielnym ani przez X^2 ani przez Y^2 . Wówczas jeżeli obie łamane $\mathcal{N}_h^{(r)}$ i $\mathcal{N}_h^{(t)}$ nie posiadają odcinków standardowych to*

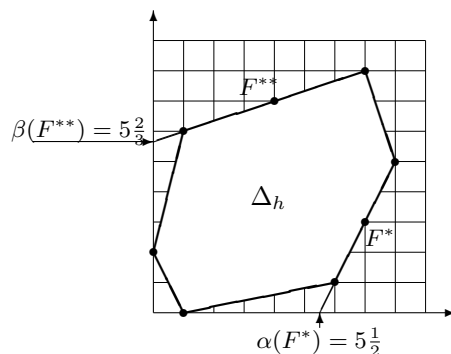
$$h(X, Y) = aX + bY + cXY,$$

przy czym $ab \neq 0$ lub $c \neq 0$.

Oczywiście, przy założeniach uwagi mamy $l_\infty(\text{grad } h) = 1$ gdy $c \neq 0$ oraz $l_\infty(\text{grad } h) = 0$ gdy $c = 0$ i $ab \neq 0$.

Łatwo zauważyć, że jeżeli łamana $\mathcal{N}_h^{(r)}$ posiada odcinki standardowe to pierwsze infimum występujące w tezie twierdzenia 2.1 realizowane jest na standardowym odcinku tej łamanej położonym najbliżej osi poziomej. Podobnie, jeśli łamana $\mathcal{N}_h^{(t)}$

posiada odcinki standardowe to drugie infimum w tezie twierdzenia 2.1 realizowane jest na standardowym odcinku tej łamanej położonym najbliżej osi pionowej. Nie-degenerację wielomianu na odcinku możemy sprawdzać stosując kryterium analogiczne do kryterium podanego w [L1]. Warto podkreślić, że wielomian bez stałego wyrazu zawsze degeneruje się na odcinku, którego przedłużenie przechodzi przez początek układu.



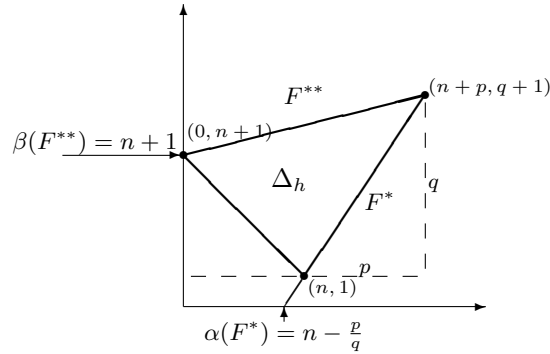
PRZYKŁAD. Rozważmy wielomian $h = X + X^6Y + X^7Y^3 + X^8Y^5 + X^7Y^8 + X^4Y^7 + XY^6 + Y^2$. Łatwo sprawdzamy, że spełnione są wszystkie założenia twierdzenia 2.1 i dodatkowo wielomian jest niezdegenerowany. Łamana $\mathcal{N}_h^{(r)}$ łączy wierzchołek $(1, 0)$ z $(7, 8)$ i składa się z jednego odcinka wyjątkowego i dwóch odcinków standardowych. Standardowy odcinek F^* łamanej $\mathcal{N}_h^{(r)}$, położony najbliżej osi poziomej, przecina oś w punkcie o odciętej $\alpha(F^*) = 5\frac{1}{2}$. Łamana $\mathcal{N}_h^{(t)}$ łączy wierzchołek $(0, 2)$ z $(8, 5)$, i składa się z jednego odcinka wyjątkowego i dwóch odcinków standardowych. Standardowy odcinek F^{**} łamanej $\mathcal{N}_h^{(t)}$, położony najbliżej osi pionowej, przecina oś w punkcie o rzędnej $\beta(F^{**}) = 5\frac{2}{3}$. Uwzględniając rozważania poprzedzające przykład i korzystając z twierdzenia 2.1 otrzymujemy

$$l_\infty(\text{grad } h) = \min \left\{ 5\frac{1}{2}, 5\frac{2}{3} \right\} - 1 = 4\frac{1}{2}.$$

PRZYKŁAD. Rozważmy wielomian $h = Y^{n+1} + X^nY(1 + X^pY^q)$ ($n \geq 1, p \geq 1, q \geq 1$). Każda z łamanych $\mathcal{N}_h^{(r)}$ i $\mathcal{N}_h^{(t)}$ zawiera po jednym odcinku standardowym odpowiednio F^* i F^{**} . Mamy $\alpha(F^*) = n - \frac{p}{q}$ oraz $\beta(F^{**}) = n + 1$. Z twierdzenia 2.1 mamy

$$l_\infty(\text{grad } h) = \min \left\{ n - \frac{p}{q}, n + 1 \right\} - 1 = n - \frac{p}{q} - 1$$

w przypadku niezdegenerowanym. Zauważmy, że wielomian degeneruje się jedynie wtedy gdy $p = nq$ (wówczas przedłużenie odcinka F^* przechodzi przez początek układu). Wielkość $n - \frac{p}{q} - 1$ jest wtedy równa -1 . Widzimy, że poprzez odpowiedni dobór stałych n, p, q możemy uzyskać dla $l_\infty(\text{grad } h)$ dowolną wartość wymierną z wyjątkiem -1 . Jak udowodnili autorzy pracy [ChK2] są to wszystkie wartości, które może przyjmować $l_\infty(\text{grad } h)$.

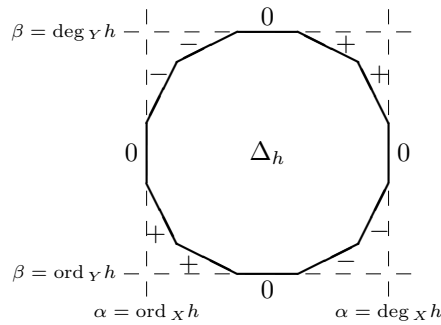


Podobnie jak w przypadku lokalnym [L1], dowód twierdzenia 2.1 opiera się na wyprowadzonej elementarnie formule określającej wykładnik Łojasiewicza pary wielomianów w zależności od diagramów Newtona składowych. Twierdzenia dotyczące tego przypadku prezentujemy w kolejnym rozdziale.

3 Rezultaty pomocnicze

Twierdzenie 2.1, podane w poprzednim rozdziale, może być wyprowadzone z twierdzeń określających związek globalnego wykładnika Łojasiewicza odwzorowania wielomianowego $H = (f, g) : \mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{C}^2$ z diagramami Newtona jego składowych (twierdzenia 3.1 i 3.2). Wypowiedzi twierdzeń poprzedzimy kilkoma definicjami.

Niech S będzie dowolnym odcinkiem płaszczyzny \mathbf{R}^2 . Przez S_1 i S_2 oznaczamy odpowiednio rzuty odcinka S na oś poziomą i pionową, zaś przez $|S_1|$ i $|S_2|$ długości tych rzutów. Dogodnie jest zdefiniować *znak odcinka S* jako liczbę ze zbioru $\{-1, 0, +1\}$. Znak 0 mają odcinki równoległe do którejkolwiek z osi. Przyjmujemy, że znak $+1$ ma odcinek, dla którego prosta przechodząca przez początek układu, równoległa do odcinka, leży w drugiej i czwartej ćwiartce. Analogicznie dla odcinka o znaku -1 , odpowiednia prosta leży w pierwszej i trzeciej ćwiartce. Znak odcinka będziemy oznaczać $\text{sgn } S$. Wśród odcinków łamanej globalnej znak dodatni mają odcinki łączące proste $\alpha = \deg_X h$ i $\beta = \deg_Y h$. Znak ujemny mają odcinki łamanej $\mathcal{N}_h^{(r)}$ łączące proste $\beta = \text{ord}_Y h$ z proste $\alpha = \deg_X h$ oraz łamanej $\mathcal{N}_h^{(t)}$ łączące proste $\alpha = \text{ord}_X h$ z proste $\beta = \deg_Y h$.



Nachyleniem odcinka S łamanej $\mathcal{N}_h^{(\mathbf{r})}$ będziemy nazywać liczbę $\frac{|S_1|}{|S_2|} \operatorname{sgn} S$. Nachylenia odcinków rosną w miarę oddalania się od osi poziomej. Najmniejsze nachylenie ma odcinek położony najbliżej osi. Analogicznie, *nachyleniem odcinka S łamanej $\mathcal{N}_h^{(\mathbf{t})}$* nazywamy liczbę $\frac{|S_2|}{|S_1|} \operatorname{sgn} S$. Tak jak poprzednio, nachylenie to rośnie w miarę oddalania się od osi pionowej i minimalną wartość osiąga na odcinku najbliższym osi.

Mówimy, że prosta podpira diagram jeśli ma z nim co najmniej jeden punkt wspólny oraz diagram zawarty jest w jednej z półpłaszczyzn domkniętych wyznaczonych przez tą prostą. Jeżeli odcinek S nie jest równoległy do osi poziomej to dwie proste podpirające diagram Δ_h , równoległe do odcinka S , przecinają oś poziomą w punktach o odciętych $\underline{\alpha}(S, \Delta_h)$ oraz $\bar{\alpha}(S, \Delta_h)$, przy czym przyjmujemy z definicji

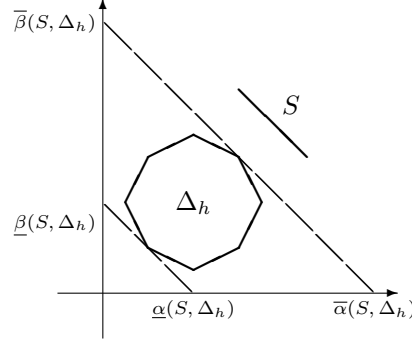
$$\underline{\alpha}(S, \Delta_h) \leq \bar{\alpha}(S, \Delta_h).$$

Analogicznie definiujemy $\underline{\beta}(S, \Delta_h)$ oraz $\bar{\beta}(S, \Delta_h)$ dla odcinka S nie równoległego do osi pionowej. Zdefiniowane wielkości są dobrze określone dla $h \neq 0$. Łatwo sprawdzić, że

$$(1) \quad \bar{\alpha}(S, \Delta_h) = \max \left\{ \alpha + \beta \frac{|S_1|}{|S_2|} \operatorname{sgn} S : (\alpha, \beta) \in \operatorname{supp} h \right\}$$

oraz

$$(2) \quad \bar{\beta}(S, \Delta_h) = \max \left\{ \alpha \frac{|S_2|}{|S_1|} \operatorname{sgn} S + \beta : (\alpha, \beta) \in \operatorname{supp} h \right\}.$$



Wprowadzone wyżej wielkości pozwalają oszacować wykładnik $l_\infty(H)$ z góry.

TWIERDZENIE 3.1. *Jeżeli $H = (f, g)$ jest parą wielomianów niezerowych to wykładnik $l_\infty(H)$ jest ograniczony z góry przez minimum sześciu wielkości:*

$$\deg H(X, 0), \quad \inf_{S \in \mathcal{N}_f^{(\mathbf{r})}} \bar{\alpha}(S, \Delta_g), \quad \inf_{T \in \mathcal{N}_g^{(\mathbf{r})}} \bar{\alpha}(T, \Delta_f),$$

$$\deg H(0, Y), \quad \inf_{S \in \mathcal{N}_f^{(\mathbf{t})}} \bar{\beta}(S, \Delta_g), \quad \inf_{T \in \mathcal{N}_g^{(\mathbf{t})}} \bar{\beta}(T, \Delta_f),$$

gdzie przez stopień pary rozumiemy maksimum stopni składowych.

Jak wcześniej, używamy kresów dolnych po zbiorze skończonym aby nadać sens wyrażeniom w przypadku gdy odpowiednie łamane są puste. Podobnie jak w twierdzeniu 2.1, oszacowanie staje się równością w przypadku niezdegenerowanym. Musimy jednak najpierw określić sens niedegeneracji pary w nieskończoności.

Będziemy mówili, że odcinek S łamanej globalnej wielomianu f oraz odcinek T łamanej globalnej wielomianu g *leżą po tych samych stronach* swoich diagramów Newtona jeśli jednocześnie $S \in \mathcal{N}_f^{(r)}$ i $T \in \mathcal{N}_g^{(r)}$ lub jednocześnie $S \in \mathcal{N}_f^{(t)}$ i $T \in \mathcal{N}_g^{(t)}$. Definicja niedegeneracji w nieskończoności jest bardziej złożona od definicji niedegeneracji pary szeregów w przypadku lokalnym.

DEFINICJA (niedegeneracji pary w nieskończoności). *Powiemy, że para wielomianów $H = (f, g)$ jest niezdegenerowana w nieskończoności jeśli dla dowolnego odcinka S łamanej globalnej wielomianu f i dowolnego odcinka T łamanej globalnej wielomianu g zachodzi jeden z warunków*

- (a) *odcinki S i T nie są równoległe,*
- (b) *odcinki S i T są równoległe, ale leżą po przeciwnych stronach swoich diagramów Newtona,*
- (c) *odcinki S i T są równoległe, leżą po tych samych stronach swoich diagramów Newtona i układ $\text{in}(f, S) = \text{in}(g, T) = 0$ nie ma rozwiązań w $(\mathbf{C} \setminus \{0\}) \times (\mathbf{C} \setminus \{0\})$.*

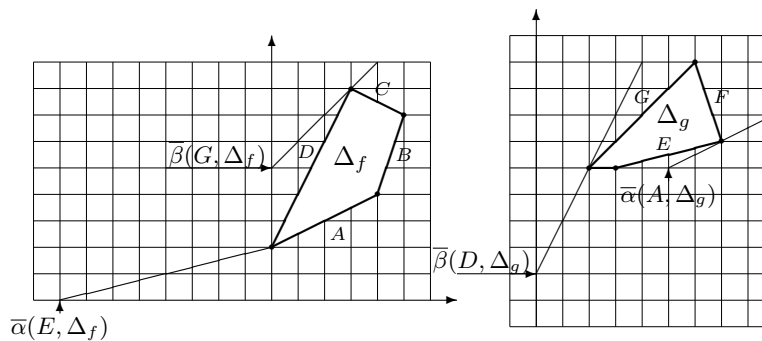
Mamy zatem

TWIERDZENIE 3.2. *Jeżeli $H = (f, g)$ jest parą wielomianów niezerowych, niezdegenerowaną w nieskończoności, to wykładnik $l_\infty(H)$ jest równy minimum sześciu wielkości występujących w tezie twierdzenia 3.1.*

Szkic dowodów obu twierdzeń 3.1 i 3.2 podajemy w rozdziale 4. Oba twierdzenia są odpowiednikami twierdzenia 2.1 w [L1], gdzie w podobnym języku opisywany jest wykładnik Łojasiewicza pary szeregów w zerze.

Łatwo sprawdzić, że jeśli odpowiednie łamane Newtona są niepuste to kresy dolne występujące w tezach twierdzeń 3.1 i 3.2 osiągnane są na odcinkach łamanych położonych najbliższej odpowiednich osi. Spostrzeżenie to ułatwia obliczanie wykładnika Łojasiewicza w konkretnych przykładach.

PRZYKŁAD. Rozważmy parę $H = (f, g)$ taką, że $f = Y^2(1 + X^4Y^2 + X^5Y^5 + X^3Y^6)$ oraz $g = X^2(1 + X + X^5Y + X^4Y^4)$. Łamana globalna wielomianu f składa się z czterech odcinków A, B, C, D , przy czym A łączy $(0, 2)$ z $(4, 4)$, B łączy $(4, 4)$ z $(5, 7)$, C łączy $(5, 7)$ z $(3, 8)$ oraz D łączy $(3, 8)$ z $(0, 2)$. Mamy $\mathcal{N}_f^{(r)} = \{A, B, C\}$ oraz $\mathcal{N}_f^{(t)} = \{C, D\}$. Łamana globalna wielomianu g składa się z trzech odcinków E, F, G , przy czym E łączy $(3, 0)$ z $(7, 1)$, F łączy $(7, 1)$ z $(6, 4)$ oraz G łączy $(6, 4)$ z $(2, 0)$. Mamy $\mathcal{N}_g^{(r)} = \{E, F\}$ oraz $\mathcal{N}_g^{(t)} = \{F, G\}$.



Łatwo sprawdzamy, że $\deg H(X, 0) = \max\{-\infty, 3\} = 3$. Odcinkami łamanymi $\mathcal{N}_f^{(r)}$ i $\mathcal{N}_g^{(r)}$ położonymi najbliżej osi poziomej są odpowiednio A i E , czyli

$$\inf_{S \in \mathcal{N}_f^{(r)}} \bar{\alpha}(S, \Delta_f) = \bar{\alpha}(A, \Delta_f) = 5$$

oraz

$$\inf_{T \in \mathcal{N}_g^{(r)}} \bar{\alpha}(T, \Delta_f) = \bar{\alpha}(E, \Delta_f) = -8.$$

Ponadto $\deg H(0, Y) = \max\{2, -\infty\} = 2$. Odcinkami łamanymi $\mathcal{N}_f^{(t)}$ i $\mathcal{N}_g^{(t)}$ położonymi najbliżej osi pionowej są odpowiednio D i G , czyli

$$\inf_{S \in \mathcal{N}_f^{(t)}} \bar{\beta}(S, \Delta_f) = \bar{\beta}(D, \Delta_f) = -4,$$

$$\inf_{T \in \mathcal{N}_g^{(t)}} \bar{\alpha}(T, \Delta_f) = \bar{\alpha}(G, \Delta_f) = 5.$$

Para jest niezdegenerowana, gdyż nie występują pary odcinków równoległych. Z twierdzenia 3.2 otrzymujemy

$$l_\infty(H) = \min\{3, 5, -8, 2, -4, 5\} = -8.$$

4 O dowodach twierdzeń dla pary

W rozdziale tym prezentujemy idee dowodów różnych wariantów twierdzeń dla pary, w tym twierdzeń 3.1 i 3.2.

Niech $H = (f, g) : \mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{C}^2$ będzie odwzorowaniem wielomianowym. Analogicznie jak w [L1] można rozważać związek wykładnika $l_\infty(H)$ z wykładnikami relatywnym zdefiniowanymi względem poszczególnych zmiennych. Wykładnik relatywny $l_\infty(H, X)$ definiujemy jako kres górny rzeczywistych wykładników λ , dla których

$$|H(x, y)| \geq c|x|^\lambda$$

dla $|x|$ dostatecznie dużych, dla pewnej stałej $c > 0$. Analogicznie definiujemy $l_\infty(H, Y)$. W przypadku lokalnym wykładnik Łojasiewicza pary szeregów w zerze

jest równy maksimum wykładników relatywnych. Niestety w przypadku globalnym otrzymujemy jedynie oszacowanie

$$(3) \quad l_\infty(H) \geq \min \{l_\infty(H, X), l_\infty(H, Y)\}.$$

Powodem, dla którego prosty dowód równości z przypadku lokalnego nie przenosi się na przypadek globalny, jest możliwość przyjmowania wartości ujemnych przez $l_\infty(H)$. Równość w przypadku globalnym możemy jedynie uzyskać przy dodatkowych założeniach o H . Dwa warianty takich założeń uwzględnia poniższe

TWIERDZENIE 4.1. *Jeżeli spełnione jest choć jedno z założeń*

- (a) $l_\infty(H) \geq 0$,
- (b) H jest niezdegenerowane w nieskończoności,

to zachodzi równość

$$l_\infty(H) = \min \{l_\infty(H, X), l_\infty(H, Y)\}.$$

Dowód twierdzenia przy założeniu (a) jest łatwy jeżeli skorzystamy z faktu, że kres górny występujący w definicji wykładnika $l_\infty(H)$ jest osiągalny [ChK1]. Szkic dowodu twierdzenia przy założeniu (b) podany jest dalej w tym rozdziale. Warto podać przykład, dla którego nierówność w (3) jest ostra. Niech $H = (1 + X^4 - Y^2, X^2 - Y)$. Korzystając z podanych dalej twierdzeń 4.3, 4.4 i 4.7 sprawdzamy, że $l_\infty(H, X) = -2$, $l_\infty(H, Y) = -1$ oraz $l_\infty(H) = -1$. Zwróćmy także uwagę na fakt, że kierunek nierówności (3) nie pozwala uzyskać górnego oszacowania $l_\infty(H)$ gdy znane są górne oszacowania $l_\infty(H, X)$ oraz $l_\infty(H, Y)$. Wymienione przesłanki zdają się wskazywać na małą efektywność wykładników relatywnych rozważanego typu w zastosowaniu do wyznaczania globalnego wykładnika Łojasiewicza. Skuteczniejszym narzędziem okazuje się wykładnik zdefiniowany względem podzbioru.

Dla dowolnego $A \subset \mathbf{C}^2$ definiujemy wykładnik $l_\infty(H, A)$ jako kres górny zbioru rzeczywistych wykładników λ , dla których

$$|H(z)| \geq c|z|^\lambda$$

dla $z \in A$ w otoczeniu nieskończoności w \mathbf{C}^2 ($c > 0$). Oczywiście $l_\infty(H, \emptyset) = +\infty$ oraz $l_\infty(H, \mathbf{C}^2) = l_\infty(H)$. Ponadto $l_\infty(H, A) = l_\infty(H)$, gdy A jest dowolnym otoczeniem nieskończoności w \mathbf{C}^2 . Łatwo sprawdzamy równość

$$(4) \quad l_\infty(H, A \cup B) = \min \{l_\infty(H, A), l_\infty(H, B)\}.$$

Korzystnie jest także zdefiniować wykładnik zrelatywizowany jednocześnie do podzbioru i do ustalonej zmiennej. Dla dowolnego $A \subset \mathbf{C}^2$ definiujemy wykładnik $l_\infty(H, A, X)$ jako kres górny zbioru rzeczywistych wykładników λ , dla których

$$|H(x, y)| \geq c|x|^\lambda$$

dla $(x, y) \in A$ i $|x|$ dostatecznie dużych ($c > 0$). Analogicznie definiujemy $l_\infty(H, A, Y)$.

Punktem wyjścia do wyznaczania $l_\infty(H)$ będzie dla nas następujący.

LEMAT 4.2. *Niech c', c'' będą dodatnimi stałymi takimi, że $c'c'' \geq 1$. Ustalmy podzbiory $A = \{|y| \geq c'|x|\}$ i $B = \{|x| \geq c''|y|\}$ na płaszczyźnie \mathbf{C}^2 . Wówczas*

$$l_\infty(H) = \min \{l_\infty(H, A, X), l_\infty(H, B, Y)\}.$$

Dowód przeprowadzamy elementarnie, sprawdzając, że $l_\infty(H, A, X) = l_\infty(H, A)$ oraz $l_\infty(H, B, Y) = l_\infty(H, B)$. Następnie korzystamy z (4) oraz z faktu $A \cup B = \mathbf{C}^2$.

Rozwinięcia Laurenta-Puiseux

Wygodnym narzędziem do badania wykładnika Łojasiewicza w nieskończoności jest klasyczna technika rozwinięć Laurenta-Puiseux. Rozwinięcia te są odpowiednikiem lokalnych rozwinięć Puiseux.

Oznaczmy przez $\mathbf{C}((\frac{1}{X}))$ ciało formalnych szeregów Laurenta posiadających stopień. Ciało formalnych szeregów Laurenta-Puiseux o wykładnikach ułamkowych definiujemy jako $\mathbf{C}((\frac{1}{X}))^* = \bigcup_{k \geq 1} \mathbf{C}((X^{-\frac{1}{k}}))$. Dla niezerowego szeregu Laurenta-Puiseux $a(X) = a'X^{\theta'} + a''X^{\theta''} + \dots$ ($\theta' > \theta'' > \dots$ liczby wymierne, $a', a'', \dots \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$) kładziemy $\deg a(X) = \theta'$ oraz $\text{in} a(X) = a'X^{\theta'}$. Ponadto przyjmujemy $\deg 0 = -\infty$ oraz $\text{in} 0 = 0$. Bezpośrednio z definicji wynika, że dla dowolnego $a(X) \in \mathbf{C}((\frac{1}{X}))^*$ istnieje dodatnia stała całkowita d taka, że $a(T^d)$ jest szeregiem Laurenta zmiennej T . O szeregu $a(X)$ mówimy, że jest zbieżny jeśli odpowiadający mu szereg Laurenta jest zbieżny.

Niech $h(X, Y) \in \mathbf{C}[X, Y]$ będzie wielomianem. Szereg $a(X) \in \mathbf{C}((\frac{1}{X}))^*$ nazywamy rozwiązaniem równania $h(X, Y) = 0$ (względem zmiennej Y) jeśli $h(X, a(X)) = 0$ w $\mathbf{C}((\frac{1}{X}))^*$. Najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią m o tej własności, że $\frac{\partial^m h}{\partial Y^m}(X, a(X)) \neq 0$ w $\mathbf{C}((\frac{1}{X}))^*$ nazywamy krotnością rozwiązania $a(X)$ i oznaczamy $\kappa(a)$. Wielomian $h(X, Y)$ możemy traktować jako wielomian w pierścieniu $\mathbf{C}((\frac{1}{X}))^*[X]$. Równanie $h(X, Y) = 0$ może być zapisane w postaci

$$w_0(X)Y^q + w_1(X)Y^{q-1} + \dots + w_q(X) = 0, \quad w_0(X) \neq 0.$$

Liczba rozwiązań tego równania w ciele $\mathbf{C}((\frac{1}{X}))^*$ jest oczywiście ograniczona przez $q = \deg_Y h$. Ponieważ ciało to jest algebraicznie domknięte (patrz np. [W]) więc

$$h(X, Y) = w_0(X) \prod_{a \in \mathcal{A}} (Y - a(X))^{\kappa(a)},$$

gdzie \mathcal{A} oznacza zbiór wszystkich rozwiązań równania (przyjmujemy konwencję $\prod_{\emptyset} = 1$). Oczywiście liczba rozwiązań z uwzględnieniem krotności jest równa $q = \deg_Y h$. Można pokazać, stosując np. metodę majorant Cauchy'ego, że wszystkie rozwiązania są zbieżne.

Analogicznie jak wyżej możemy rozwiązywać równanie $h(X, Y) = 0$ (względem zmiennej X) w ciele $\mathbf{C}((\frac{1}{Y}))^*$.

Znajomość wszystkich rozwiązań równań $f(X, Y) = 0$ i $g(X, Y) = 0$ w $\mathbf{C}((\frac{1}{X}))^*$ pozwala wyznaczyć $l_\infty(H, X)$. Mamy tu

TWIERDZENIE 4.3. *Niech $H = (f, g)$ będzie parą niezerowych wielomianów $f(X, Y), g(X, Y) \in \mathbf{C}[X, Y]$. Wówczas*

$$l_{\infty}(H, X) = \min \{ \deg H(X, 0), \inf_{a \in \mathcal{A}} \deg g(X, a(X)), \inf_{b \in \mathcal{B}} \deg f(X, b(X)) \},$$

gdzie \mathcal{A} i \mathcal{B} są odpowiednio zbiorami wszystkich rozwiązań równań $f(X, Y) = 0$ oraz $g(X, Y) = 0$ w $\mathbf{C}((\frac{1}{X}))^*$.

Dowód twierdzenia może być przeprowadzony analogicznie jak w [L1]. Głównym narzędziem dowodowym jest lemat o normie odwzorowania wielomianowego [Pł3].

Przez zamianę ról zmiennych otrzymujemy

TWIERDZENIE 4.4. *Niech $H = (f, g)$ będzie parą niezerowych wielomianów $f(X, Y), g(X, Y) \in \mathbf{C}[X, Y]$. Wówczas*

$$l_{\infty}(H, Y) = \min \{ \deg H(0, Y), \inf_{a \in \mathcal{A}} \deg g(a(Y), Y), \inf_{b \in \mathcal{B}} \deg f(b(Y), Y) \},$$

gdzie \mathcal{A} i \mathcal{B} są odpowiednio zbiorami wszystkich rozwiązań równań $f(X, Y) = 0$ oraz $g(X, Y) = 0$ w $\mathbf{C}((\frac{1}{Y}))^*$.

Okazuje się, że technika rozwinięć Laurenta-Puiseux może być także zastosowana do wyznaczenia wykładników względnych występujących w lemacie 4.2. Prezentują to dwa poniższe twierdzenia

TWIERDZENIE 4.5. *Niech $H = (f, g)$ będzie parą niezerowych wielomianów $f(X, Y), g(X, Y) \in \mathbf{C}[X, Y]$. Niech \mathcal{A}_1 i \mathcal{B}_1 będą odpowiednio zbiorami wszystkich rozwiązań równań $f(X, Y) = 0$ oraz $g(X, Y) = 0$ w $\mathbf{C}((\frac{1}{X}))^*$ stopnia nie przekraczającego 1. Wówczas istnieje stała $c_1 > 0$, że dla dowolnego $c' > c_1$*

$$l_{\infty}(H, \{|y| \leq c'|x|\}, X) = \min \{ \deg H(X, 0), \inf_{a \in \mathcal{A}_1} \deg g(X, a(X)), \inf_{b \in \mathcal{B}_1} \deg f(X, b(X)) \}.$$

UWAGA. Jako c_1 można przyjąć maksimum modułów współczynników przy najwyższych potęgach we wszystkich rozwiązaniach stopnia 1 w zbiorze $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{B}_1$. Jeżeli wszystkie rozważane rozwiązania mają stopień silnie mniejszy od 1 to można przyjąć $c_1 = 0$.

Pełny dowód twierdzenia można znaleźć w pracy [L2]. Przez zamianę ról zmiennych otrzymujemy

TWIERDZENIE 4.6. *Niech $H = (f, g)$ będzie parą niezerowych wielomianów $f(X, Y), g(X, Y) \in \mathbf{C}[X, Y]$. Niech \mathcal{A}_1 i \mathcal{B}_1 będą odpowiednio zbiorami wszystkich rozwiązań równań $f(X, Y) = 0$ oraz $g(X, Y) = 0$ w $\mathbf{C}((\frac{1}{Y}))^*$ stopnia nie przekraczającego 1. Wówczas istnieje stała $c_2 > 0$, że dla dowolnego $c'' > c_2$*

$$l_{\infty}(H, \{|x| \leq c''|y|\}, Y) = \min \{ \deg H(0, Y), \inf_{a \in \mathcal{A}_1} \deg g(a(Y), Y), \inf_{b \in \mathcal{B}_1} \deg f(b(Y), Y) \}.$$

Łącząc tezy twierdzeń 4.5 i 4.6 z lematem 4.2 otrzymujemy formułę na obliczanie $l_\infty(H)$ w dowolnej sytuacji.

TWIERDZENIE 4.7. *Niech $H = (f, g)$ będzie parą niezerowych wielomianów $f(X, Y), g(X, Y) \in \mathbf{C}[X, Y]$. Niech \mathcal{A}'_1 i \mathcal{B}'_1 będą odpowiednio zbiorami rozwiązań równań $f(X, Y) = 0$ oraz $g(X, Y) = 0$ w $\mathbf{C}((\frac{1}{X}))^*$ stopnia nie przekraczającego 1, zaś \mathcal{A}''_1 i \mathcal{B}''_1 zbiorami rozwiązań tych samych równań w $\mathbf{C}((\frac{1}{Y}))^*$ także stopnia nie przekraczającego 1. Wówczas $l_\infty(H)$ jest równe minimum sześciu liczb*

$$\deg H(X, 0), \quad \inf_{a \in \mathcal{A}'_1} \deg g(X, a(X)), \quad \inf_{b \in \mathcal{B}'_1} \deg f(X, b(X)),$$

$$\deg H(0, Y), \quad \inf_{a \in \mathcal{A}''_1} \deg g(a(Y), Y), \quad \inf_{b \in \mathcal{B}''_1} \deg f(b(Y), Y).$$

Rezultat tego typu zawarty jest w pracy [ChK1].

PRZYKŁAD. Niech $H = (f, g) = (1 + X^4 - Y^2, X^2 - Y)$ będzie rozważanym wcześniej odwzorowaniem wielomianowym. Wyznamy teraz wykładniki $l_\infty(H, X)$, $l_\infty(H, Y)$ oraz $l_\infty(H)$. Równanie $f(X, Y) = 0$ ma dwa rozwiązania

$$a_1(X) = X^2 + \frac{1}{2}X^{-2} - \frac{1}{8}X^{-6} + \dots$$

$$a_2(X) = -X^2 - \frac{1}{2}X^{-2} + \frac{1}{8}X^{-6} + \dots$$

w $\mathbf{C}((\frac{1}{X}))^*$ oraz cztery rozwiązania

$$a_3(Y) = Y^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}Y^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{32}Y^{-\frac{7}{2}} + \dots$$

$$a_4(Y) = -Y^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}Y^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{32}Y^{-\frac{7}{2}} + \dots$$

$$a_5(Y) = iY^{\frac{1}{2}} - \frac{i}{4}Y^{-\frac{3}{2}} - \frac{3i}{32}Y^{-\frac{7}{2}} + \dots$$

$$a_6(Y) = -iY^{\frac{1}{2}} + \frac{i}{4}Y^{-\frac{3}{2}} + \frac{3i}{32}Y^{-\frac{7}{2}} + \dots$$

w $\mathbf{C}((\frac{1}{Y}))^*$.

Równanie $g(X, Y) = 0$ ma jedno rozwiązanie

$$b_1(X) = X^2$$

w $\mathbf{C}((\frac{1}{X}))^*$ oraz dwa rozwiązania

$$b_2(Y) = Y^{\frac{1}{2}}$$

$$b_3(Y) = -Y^{\frac{1}{2}}$$

w $\mathbf{C}((\frac{1}{Y}))^*$. Mamy $\deg H(X, 0) = \max\{4, 2\} = 4$ i łatwo sprawdzamy, że $\deg g(X, a_1(X)) = -2$, $\deg g(X, a_2(X)) = 2$ oraz $\deg f(X, b_1(X)) = 0$. Twierdzenie 4.3 daje nam $l_\infty(H, X) = -2$. Podobnie sprawdzamy, że $\deg H(0, Y) = \max\{2, 1\} = 2$, $\deg g(a_3(Y), Y) = \deg g(a_4(Y), Y) = -1$, $\deg g(a_5(Y), Y) = \deg g(a_6(Y), Y) = 1$. Twierdzenie 4.4 daje nam $l_\infty(H, Y) = -1$. Przy obliczaniu $l_\infty(H)$ z twierdzenia 4.7 nie uwzględniamy rozwiązań $a_1(X)$, $a_2(X)$ i $b_1(X)$ gdyż ich stopień przekracza 1. Mamy zatem $l_\infty(H) = -1$.

Związek z diagramem Newtona

Podane wyżej twierdzenia pozwalają precyzyjnie określić związek zdefiniowanych wykładników Łojasiewicza z diagramami Newtona składowych odwzorowania. Zaczniemy od podania związku rozwiązań równania $h(X, Y) = 0$ w $\mathbf{C}((\frac{1}{X}))^*$ z łamaną prawostronną $\mathcal{N}_h^{(r)}$. Stosując metody zastosowane przez Płoskiego w [Pł2] można wykazać, że każdemu niezerowemu rozwiązaniu równania $h(X, Y) = 0$ w $\mathbf{C}((\frac{1}{X}))^*$ odpowiada odcinek $S \in \mathcal{N}_h^{(r)}$ taki, że $\deg a(X) = \frac{|S_1|}{|S_2|} \operatorname{sgn} S$. Co więcej, liczba rozwiązań stopnia $\frac{|S_1|}{|S_2|} \operatorname{sgn} S$, z uwzględnieniem krotności, jest dokładnie równa $|S_2|$.

Związek diagramu Δ_h z rozwiązaniami równania $h(X, Y) = 0$ w $\mathbf{C}((\frac{1}{Y}))^*$ określamy z pomocą górnej łamanej $\mathcal{N}_h^{(t)}$. Każdemu niezerowemu rozwiązaniu $a(Y) \in \mathbf{C}((\frac{1}{Y}))^*$ równania $h(X, Y) = 0$ odpowiada odcinek $S \in \mathcal{N}_h^{(t)}$ taki, że $\deg a(Y) = \frac{|S_2|}{|S_1|} \operatorname{sgn} S$ i liczba wszystkich rozwiązań stopnia $\frac{|S_2|}{|S_1|} \operatorname{sgn} S$ jest równa $|S_1|$.

Poniższy lemat umożliwia oszacowanie stopni podstawień, występujących w tezach wcześniejszych twierdzeń, na podstawie diagramów Newtona składowych pary.

LEMAT 4.8. *Niech $f(X, Y), g(X, Y) \in \mathbf{C}[X, Y]$ będą niezerowymi wielomianami. Wówczas:*

- (a) *Dla dowolnego niezerowego rozwiązania $a(X) \in \mathbf{C}((\frac{1}{X}))^*$ równania $f(X, Y) = 0$*

$$\deg g(X, a(X)) \leq \bar{\alpha}(S, \Delta_g),$$

gdzie $S \in \mathcal{N}_f^{(r)}$ jest odcinkiem odpowiadającym rozwiązaniu $a(X)$.

- (b) *Dla dowolnego niezerowego rozwiązania $b(X) \in \mathbf{C}((\frac{1}{X}))^*$ równania $g(X, Y) = 0$*

$$\deg f(X, b(X)) \leq \bar{\alpha}(T, \Delta_f),$$

gdzie $T \in \mathcal{N}_g^{(r)}$ jest odcinkiem odpowiadającym rozwiązaniu $b(X)$.

- (c) *Dla dowolnego niezerowego rozwiązania $a(Y) \in \mathbf{C}((\frac{1}{Y}))^*$ równania $f(X, Y) = 0$*

$$\deg g(a(Y), Y) \leq \bar{\beta}(S, \Delta_g),$$

gdzie $S \in \mathcal{N}_f^{(t)}$ jest odcinkiem odpowiadającym rozwiązaniu $a(Y)$.

(d) Dla dowolnego niezerowego rozwiązania $b(Y) \in \mathbf{C}((\frac{1}{Y}))^*$ równania $g(X, Y) = 0$

$$\deg f(b(Y), Y) \leq \bar{\beta}(T, \Delta_f),$$

gdzie $T \in \mathcal{N}_g^{(\mathbf{t})}$ jest odcinkiem odpowiadającym rozwiązaniu $b(Y)$.

Ponadto jeśli $H = (f, g)$ jest parą niezdegenerowaną to we wszystkich powyższych oszacowaniach mamy równość.

Dowód lematu można przeprowadzić metodą przedstawioną w [L1]. Oczywiście wszystkie tezy wynikają z (a) przez symetrię. Dla ilustracji przeprowadzimy dowód oszacowania (a) bez dowodzenia równości w przypadku niezdegenerowanym.

Niech $g(X, Y) = \sum g_{\alpha\beta} X^\alpha Y^\beta$, gdzie $(\alpha, \beta) \in \text{supp } g$. Wówczas

$$\begin{aligned} \deg g(X, a(X)) &= \deg \left\{ \sum_{(\alpha, \beta) \in \text{supp } g} g_{\alpha\beta} X^\alpha a(X)^\beta \right\} \leq \\ &\leq \max \{ \deg X^\alpha a(X)^\beta : (\alpha, \beta) \in \text{supp } h \}. \end{aligned}$$

Ale

$$\begin{aligned} \deg X^\alpha a(X)^\beta &= \deg X^\alpha \left(cX^{\frac{|S_1|}{|S_2|} \text{sgn } S} + \dots \right)^\beta = \\ &= \alpha + \beta \frac{|S_1|}{|S_2|} \text{sgn } S, \end{aligned}$$

co w połączeniu z (1) kończy dowód oszacowania.

Z lematu 4.8 oraz z twierdzeń 4.3 i 4.4 wynikają bezpośrednio związki wykładników $l_\infty(H, X)$ i $l_\infty(H, Y)$ z diagramami Newtona składowych pary. Związki te wyrażone są w dwu poniższych twierdzeniach.

TWIERDZENIE 4.8. *Jeżeli $H = (f, g)$ jest parą wielomianów niezerowych to*

$$l_\infty(H, X) \leq \min \left\{ \deg H(X, 0), \inf_{S \in \mathcal{N}_f^{(\mathbf{r})}} \bar{\alpha}(S, \Delta_g), \inf_{T \in \mathcal{N}_g^{(\mathbf{r})}} \bar{\alpha}(T, \Delta_f) \right\},$$

przy czym jeśli para jest niezdegenerowana to zachodzi równość.

TWIERDZENIE 4.9. *Jeżeli $H = (f, g)$ jest parą wielomianów niezerowych to*

$$l_\infty(H, Y) \leq \min \left\{ \deg H(0, Y), \inf_{S \in \mathcal{N}_f^{(\mathbf{t})}} \bar{\beta}(S, \Delta_g), \inf_{T \in \mathcal{N}_g^{(\mathbf{t})}} \bar{\beta}(T, \Delta_f) \right\},$$

przy czym jeśli para jest niezdegenerowana to zachodzi równość.

Oznaczmy teraz odpowiednio przez \mathcal{N}'_f i \mathcal{N}'_g podzbiory łamanych $\mathcal{N}_f^{(\mathbf{r})}$ i $\mathcal{N}_g^{(\mathbf{r})}$ złożone z odcinków o nachyleniach mniejszych lub równych 1 oraz odpowiednio przez \mathcal{N}''_f i \mathcal{N}''_g podzbiory łamanych $\mathcal{N}_f^{(\mathbf{t})}$ i $\mathcal{N}_g^{(\mathbf{t})}$ złożone z odcinków także o nachyleniach mniejszych lub równych 1. Bezpośrednio z twierdzenia 4.7 oraz z lematu 4.8 otrzymujemy

TWIERDZENIE 4.10. *Niech $H = (f, g)$ będzie parą niezerowych wielomianów. Wówczas wykładnik $l_\infty(H)$ jest ograniczony z góry przez minimum sześciu wielkości*

$$\begin{aligned} \deg H(X, 0), & \quad \inf_{S \in \mathcal{N}'_f} \bar{\alpha}(S, \Delta_g), & \quad \inf_{T \in \mathcal{N}'_g} \bar{\alpha}(T, \Delta_f), \\ \deg H(0, Y), & \quad \inf_{S \in \mathcal{N}''_f} \bar{\beta}(S, \Delta_g), & \quad \inf_{T \in \mathcal{N}''_g} \bar{\beta}(T, \Delta_f), \end{aligned}$$

przy czym w przypadku niezdegenerowanym zachodzi równość.

Dowody twierdzeń 3.1, 3.2 i 4.1

Tezy twierdzeń 3.1 i 3.2 są teraz bezpośrednią konsekwencją twierdzenia 4.10 oraz następującego lematu.

LEMAT 4.11. *Niech $H = (f, g)$ będzie parą niezerowych wielomianów. Twierdzimy, że minimum sześć wielkości*

$$\begin{aligned} \deg H(X, 0), & \quad \inf_{S \in \mathcal{N}'_f^{(\mathbf{r})}} \bar{\alpha}(S, \Delta_g), & \quad \inf_{T \in \mathcal{N}'_g^{(\mathbf{r})}} \bar{\alpha}(T, \Delta_f), \\ \deg H(0, Y), & \quad \inf_{S \in \mathcal{N}'_f^{(\mathbf{t})}} \bar{\beta}(S, \Delta_g), & \quad \inf_{T \in \mathcal{N}'_g^{(\mathbf{t})}} \bar{\beta}(T, \Delta_f), \end{aligned}$$

nie ulegnie zmianie jeśli łamane typu $\mathcal{N}^{(\mathbf{r})}$ zastąpimy łamanymi typu \mathcal{N}' oraz łamane typu $\mathcal{N}^{(\mathbf{t})}$ zastąpimy łamanymi typu \mathcal{N}'' .

Dowód. Oznaczmy przez m_1 minimum sześciu wielkości przed zamianą i przez m_2 minimum sześciu wielkości po zamianie. Ponieważ w wyniku zamiany odpowiednie łamane pomniejszają się, więc oczywiście $m_1 \leq m_2$.

Pozostaje sprawdzić nierówność przeciwną. Oczywiście

$$\inf_{S \in \mathcal{N}'_f^{(\mathbf{r})}} \bar{\alpha}(S, \Delta_g) = \min \left\{ \inf_{S \in \mathcal{N}'_f} \bar{\alpha}(S, \Delta_g), \quad \inf_{S \in \mathcal{N}'_f^{(\mathbf{r})} \setminus \mathcal{N}'_f} \bar{\alpha}(S, \Delta_g) \right\}.$$

Jeżeli $S \in \mathcal{N}'_f^{(\mathbf{r})} \setminus \mathcal{N}'_f$ to $\frac{|S_1|}{|S_2|} \operatorname{sgn} S > 1$, czyli w szczególności $\operatorname{sgn} S \neq 0$, skąd $(\operatorname{sgn} S)^2 = 1$. Mamy zatem

$$\alpha + \beta \frac{|S_1|}{|S_2|} \operatorname{sgn} S = \frac{|S_1|}{|S_2|} \operatorname{sgn} S \left(\alpha \frac{|S_2|}{|S_1|} \operatorname{sgn} S + \beta \right) \geq \alpha \frac{|S_2|}{|S_1|} \operatorname{sgn} S + \beta,$$

czyli wobec (1) i (2)

$$\bar{\alpha}(S, \Delta_g) \geq \bar{\beta}(S, \Delta_g).$$

Ponieważ $\mathcal{N}'_f^{(\mathbf{r})} \setminus \mathcal{N}'_f \subset \mathcal{N}''_f$, więc

$$\inf_{S \in \mathcal{N}'_f^{(\mathbf{r})} \setminus \mathcal{N}'_f} \bar{\alpha}(S, \Delta_g) \geq \inf_{S \in \mathcal{N}'_f^{(\mathbf{r})} \setminus \mathcal{N}'_f} \bar{\beta}(S, \Delta_g) \geq \inf_{S \in \mathcal{N}''_f} \bar{\beta}(S, \Delta_g).$$

Czyli ostatecznie

$$\inf_{S \in \mathcal{N}_f^{(\mathbf{r})}} \bar{\alpha}(S, \Delta_g) \geq \min \left\{ \inf_{S \in \mathcal{N}'_f} \bar{\alpha}(S, \Delta_g), \inf_{S \in \mathcal{N}''_f} \bar{\beta}(S, \Delta_g) \right\}.$$

Przeprowadzając analogiczne rozumowanie dla pozostałych trzech infimów określających m_1 otrzymujemy $m_1 \geq m_2$, co kończy dowód lematu.

Zauważmy, że twierdzenie 4.1 (dowodzone przy założeniu niedegeneracji) jest teraz oczywistym wnioskiem z dowiedzionego lematu oraz twierdzeń 4.8, 4.9 i 4.10.

5 O dowodach twierdzeń dla gradientu

Twierdzenia prezentowane w poprzednim rozdziale umożliwiają oszacowanie wykładnika $l_\infty(\text{grad } h)$ na podstawie informacji zawartej w diagramach Newtona obu składowych $\frac{\partial h}{\partial X}$, $\frac{\partial h}{\partial Y}$ gradientu. Ponadto uzyskujemy dokładną wartość wykładnika w przypadku gdy para $(\frac{\partial h}{\partial X}, \frac{\partial h}{\partial Y})$ jest niezdegenerowana. Istotą rozważań w niniejszym rozdziale jest wykazanie, że możliwe jest oszacowanie wykładnika $l_\infty(\text{grad } h)$ na podstawie informacji zawartej jedynie w diagramie Newtona wyjściowego wielomianu $h(X, Y)$, bez uciekania się do rozważania diagramów pochodnych cząstkowych. Główny wynik prezentowany w pracy (twierdzenie 2.1) jest, w świetle powyższych rozważań, bezpośrednim wnioskiem z dwu podanych niżej faktów.

TWIERDZENIE 5.1 (o dziedziczeniu niedegeneracji). *Niech $h(X, Y) \in \mathbf{C}[X, Y]$ będzie wielomianem bez stałego wyrazu, istotnie zależnym od obu zmiennych, niepodzielnym ani przez X^2 ani przez Y^2 . Wówczas jeśli $h(X, Y)$ jest niezdegenerowany na każdym odcinku łamanej w nieskończoności to para $(\frac{\partial h}{\partial X}, \frac{\partial h}{\partial Y})$ jest niezdegenerowana.*

LEMAT 5.2 *Niech $h(X, Y) \in \mathbf{C}[X, Y]$ będzie wielomianem bez stałego wyrazu, istotnie zależnym od obu zmiennych, niepodzielnym ani przez X^2 ani przez Y^2 . Wówczas, jeśli choć jedna z łamanych $\mathcal{N}_h^{(\mathbf{r})}$ lub $\mathcal{N}_h^{(\mathbf{t})}$ posiada odcinkek standardowy, to minimum sześciu wielkości*

$$\begin{aligned} \deg \text{grad } h(X, 0), \quad \inf_{R \in \mathcal{N}_{\frac{\partial h}{\partial Y}}^{(\mathbf{r})}} \bar{\alpha}(R, \Delta_{\frac{\partial h}{\partial Y}}), \quad \inf_{T \in \mathcal{N}_{\frac{\partial h}{\partial X}}^{(\mathbf{r})}} \bar{\alpha}(T, \Delta_{\frac{\partial h}{\partial X}}), \\ \deg \text{grad } h(0, Y), \quad \inf_{R \in \mathcal{N}_{\frac{\partial h}{\partial X}}^{(\mathbf{t})}} \bar{\beta}(R, \Delta_{\frac{\partial h}{\partial X}}), \quad \inf_{T \in \mathcal{N}_{\frac{\partial h}{\partial Y}}^{(\mathbf{t})}} \bar{\beta}(T, \Delta_{\frac{\partial h}{\partial Y}}), \end{aligned}$$

jest równe

$$(5) \quad \min \left\{ \inf_S \alpha(S), \inf_S \beta(S) \right\} - 1,$$

gdzie, w pierwszym infimum, S przebiega wszystkie standardowe odcinki łamanej $\mathcal{N}_h^{(\mathbf{r})}$, zaś w drugim — wszystkie standardowe odcinki łamanej $\mathcal{N}_h^{(\mathbf{t})}$.

Szkice dowodów twierdzenia 5.1 i powyższego lematu podajemy w dalszej części niniejszego rozdziału. W rozważaniach wykorzystujemy szczegółowe związki pomiędzy łamaną globalną wielomianu i łamanymi globalnymi jego pochodnych cząstkowych. Związki te wyrażone są w podanych niżej: lematacie 5.3, wniosku 5.4 i lemacie 5.5. Wypowiedzi poprzedzimy kilkoma definicjami.

Rozważmy wielomian $h(X, Y) \in \mathbf{C}[X, Y]$. Mówimy, że odcinek T łamanej globalnej wielomianu pochodnego $\frac{\partial h}{\partial Y}$ jest regularny jeśli

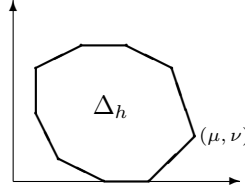
$$T = S - (0, 1)$$

dla pewnego odcinka S łamanej globalnej wielomianu h . Łatwo zauważyć, że wówczas

$$(6) \quad \text{in} \left(\frac{\partial h}{\partial Y}, T \right) = \frac{\partial}{\partial Y} \text{in}(h, S).$$

Analogicznie definiujemy odcinek regularny łamanej globalnej wielomianu pochodnego $\frac{\partial h}{\partial X}$.

LEMAT 5.3 (o opisie łamanej $\mathcal{N}_{\frac{\partial h}{\partial Y}}^{(\mathbf{r})}$). *Niech $h(X, Y)$ będzie wielomianem jawnie zależnym od zmiennej Y , niepodzielnym przez Y^2 . Niech (μ, ν) będzie prawostronnym wierzchołkiem diagramu Δ_h o dodatniej minimalnej rzędnej (wierzchołek taki istnieje przy wymienionych założeniach). Wówczas:*



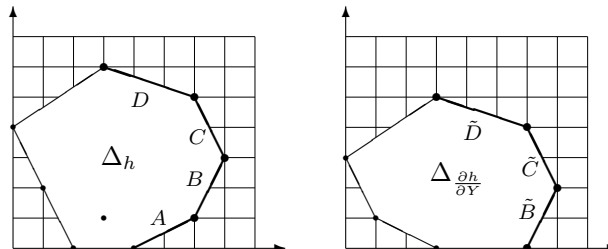
- (a) *Jeżeli $\nu = 1$ to wszystkie odcinki łamanej $\mathcal{N}_{\frac{\partial h}{\partial Y}}^{(\mathbf{r})}$ są regularne.*
- (b) *Jeżeli $\nu > 1$ to istnieje odcinek F łamanej $\mathcal{N}_h^{(\mathbf{r})}$ łączący pewien wierzchołek diagramu Δ_h , leżący na osi poziomej, z wierzchołkiem (μ, ν) . Wówczas dla każdego odcinka $T \in \mathcal{N}_{\frac{\partial h}{\partial Y}}^{(\mathbf{r})}$ zachodzi dokładnie jedna z trzech możliwości:*
- (i) *T jest odcinkiem regularnym,*
 - (ii) *T nie jest równoległy do żadnego odcinka łamanej $\mathcal{N}_h^{(\mathbf{r})}$ i wówczas*

$$\frac{|T_1|}{|T_2|} \text{sgn } T < \frac{|F_1|}{|F_2|} \text{sgn } F,$$

- (iii) *T jest równoległy do F i wówczas*

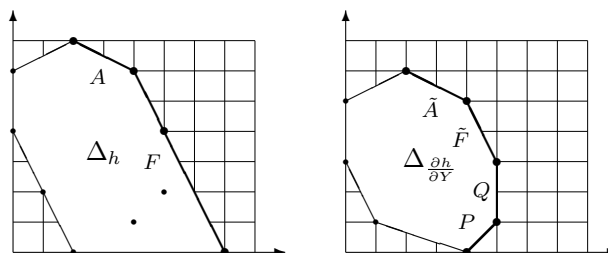
$$\text{in} \left(\frac{\partial h}{\partial Y}, T \right) = \frac{\partial}{\partial Y} \text{in}(h, F).$$

Dowód lematu przebiega analogicznie jak w [L1].



PRZYKŁAD. Niech $h = X^2 + XY^2 + Y^4 + X^3Y + X^4 + X^6Y + X^3Y^6 + X^7Y^3 + X^6Y^5$. Łamana $\mathcal{N}_h^{(r)}$ składa się z czterech odcinków: A (łączy $(4, 0)$ z $(6, 1)$), B (łączy $(6, 1)$ z $(7, 3)$), C (łączy $(7, 3)$ z $(6, 5)$), D (łączy $(6, 5)$ z $(3, 6)$). Łamana $\mathcal{N}_{\frac{\partial h}{\partial Y}}^{(r)}$ pochodnej $\frac{\partial h}{\partial Y} = 2XY + 4Y^3 + X^3 + X^6 + 6X^3Y^5 + 3X^7Y^2 + 5X^6Y^4$ składa się z trzech odcinków: \tilde{B} (łączy $(6, 0)$ z $(7, 2)$), \tilde{C} (łączy $(7, 2)$ z $(6, 4)$), \tilde{D} (łączy $(6, 4)$ z $(3, 5)$). Najniższym położonym prawym wierzchołkiem diagramu Δ_h o dodatniej rzędnej jest $(\mu, \nu) = (6, 1)$. Ponieważ $\nu = 1$ więc zachodzi sytuacja opisywana w tezie (a) lematu 5.3, to znaczą wszystkie trzy odcinki \tilde{B} , \tilde{C} , \tilde{D} łamanej $\mathcal{N}_{\frac{\partial h}{\partial Y}}^{(r)}$ są regularne (powstają one odpowiednio z odcinków B , C , D łamanej $\mathcal{N}_h^{(r)}$). Wyjątkowemu odcinkowi A łamanej $\mathcal{N}_h^{(r)}$ nie odpowiada żaden odcinek łamanej $\mathcal{N}_{\frac{\partial h}{\partial Y}}^{(r)}$.

PRZYKŁAD. Niech $h = X^2 + XY^2 + Y^4 + X^4Y + Y^6 + X^5Y^2 + X^7 + X^2Y^7 + X^5Y^4 + X^4Y^6$. Łamana $\mathcal{N}_h^{(r)}$ składa się z dwóch odcinków: F (łączy $(7, 0)$ z $(4, 6)$) i A (łączy $(4, 6)$ z $(2, 7)$). Łamana $\mathcal{N}_{\frac{\partial h}{\partial Y}}^{(r)}$ pochodnej $\frac{\partial h}{\partial Y} = 2XY + 4Y^3 + X^4 + 6Y^5 + 2X^5Y + 7X^2Y^6 + 4X^5Y^3 + 6X^4Y^5$ składa się z czterech odcinków: P (łączy $(4, 0)$ z $(5, 1)$), Q (łączy $(5, 1)$ z $(5, 3)$), \tilde{F} (łączy $(5, 3)$ z $(4, 5)$), \tilde{A} (łączy $(4, 5)$ z $(2, 6)$). Najniższym położonym prawym wierzchołkiem diagramu Δ_h o dodatniej rzędnej jest $(\mu, \nu) = (4, 6)$. Ponieważ $\nu > 1$ więc zachodzą sytuacje opisane w tezie (b) lematu 5.3. Odcinek $\tilde{A} = A - (0, 1)$ jest regularny (przypadek (i)). Odcinki P i Q nie są równoległe do żadnego odcinka łamanej $\mathcal{N}_h^{(r)}$ (przypadek (ii)). Odcinek \tilde{F} jest równoległy do odcinka F (przypadek (iii)).



Bezpośrednim wnioskiem z lematu 5.3 jest

WNIOSEK 5.4. Niech $h(X, Y)$ będzie wielomianem o niepustej łamanej $\mathcal{N}_h^{(r)}$, niepodzielnym przez Y^2 . Wówczas dla dowolnego odcinka $T \in \mathcal{N}_{\frac{\partial h}{\partial Y}}^{(r)}$ zachodzi dokładnie jedna z możliwości:

(a) T jest równoległy do pewnego odcinka $S \in \mathcal{N}_h^{(r)}$ i wówczas

$$\operatorname{in}\left(\frac{\partial h}{\partial Y}, T\right) = \frac{\partial}{\partial Y} \operatorname{in}(h, S),$$

(b) T nie jest równoległy do żadnego odcinka łamanej $\mathcal{N}_h^{(r)}$ i wówczas

$$\frac{|T_1|}{|T_2|} \operatorname{sgn} T < \frac{|S_1|}{|S_2|} \operatorname{sgn} S$$

dla wszystkich odcinków $S \in \mathcal{N}_h^{(r)}$.

Opis relacji pomiędzy prawostronnymi łamanymi wielomianu h i wielomianu pochodnego $\frac{\partial h}{\partial X}$ przedstawia poniższy

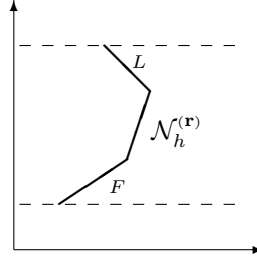
LEMAT 5.5. (opis łamanej $\mathcal{N}_{\frac{\partial h}{\partial X}}^{(r)}$) Niech $h(X, Y) \in \mathbf{C}[X, Y]$ będzie wielomianem o niepustej łamanej $\mathcal{N}_h^{(r)}$. Niech F i L oznaczają odpowiednio odcinki łamanej $\mathcal{N}_h^{(r)}$ położone najbliżej i najdalej osi poziomej. Niech R będzie dowolnym odcinkiem łamanej $\mathcal{N}_{\frac{\partial h}{\partial X}}^{(r)}$. Wówczas:

(a) Jeżeli R jest równoległy do pewnego odcinka S łamanej $\mathcal{N}_h^{(r)}$ to

$$\operatorname{in}\left(\frac{\partial h}{\partial X}, R\right) = \frac{\partial}{\partial X} \operatorname{in}(h, S).$$

(b) Jeżeli R nie jest równoległy do żadnego odcinka łamanej $\mathcal{N}_h^{(r)}$ to zachodzi dokładnie jedna z możliwości:

- (i) R ma nachylenie mniejsze od nachyleń wszystkich odcinków łamanej $\mathcal{N}_h^{(r)}$ i wtedy odcinek F dotyka osi pionowej,
- (ii) R ma nachylenie większe od nachyleń wszystkich odcinków łamanej $\mathcal{N}_h^{(r)}$ i wtedy odcinek L dotyka osi pionowej.



Dowód lematu przeprowadzamy metodami analogicznymi jak w [L1]. Szczegółowy dowód padany jest w [L2]. Przez symetrię możemy sformułować analogiczne związki dla łamanych górnych.

Możemy teraz łatwo udowodnić twierdzenie 5.1 o dziedziczeniu niedegeneracji. Niech $h(X, Y)$ będzie wielomianem spełniającym założenia twierdzenia. Wybierzmy dowolny odcinek R łamanej globalnej wielomianu $\frac{\partial h}{\partial X}$ oraz dowolny odcinek T

łamanej globalnej wielomianu $\frac{\partial h}{\partial Y}$. Wobec definicji niedegeneracji możemy założyć, że odcinki R i T są równoległe oraz leżą po tych samych stronach swoich diagramów Newtona. Bez straty ogólności możemy także założyć, że $R \in \mathcal{N}_{\frac{\partial h}{\partial X}}^{(r)}$ oraz $T \in \mathcal{N}_{\frac{\partial h}{\partial Y}}^{(r)}$. Będziemy dowodzić, że istnieje odcinek $S \in \mathcal{N}_h^{(r)}$ równoległy do odcinków R i T . Gdyby odcinek taki nie istniał to z lematu 5.3 o opisie łamanej $\mathcal{N}_{\frac{\partial h}{\partial Y}}^{(r)}$ wynika, że odcinek F łamanej $\mathcal{N}_h^{(r)}$ dotyka osi poziomej oraz

$$\frac{|T_1|}{|T_2|} \operatorname{sgn} T < \frac{|F_1|}{|F_2|} \operatorname{sgn} F .$$

Niech $(p, 0)$ będzie końcem odcinka F leżącym na osi poziomej. Oczywiście $p \geq 1$, gdyż wielomian h jest bez stałego wyrazu. Oznacza to, że odcinek F nie może dotykać osi pionowej, zatem z lematu 5.5 wynika, że rozważany odcinek R ma nachylenie większe od nachyleń wszystkich odcinków łamanej $\mathcal{N}_h^{(r)}$. Otrzymujemy zatem nierówność

$$\frac{|T_1|}{|T_2|} \operatorname{sgn} T < \frac{|F_1|}{|F_2|} \operatorname{sgn} F < \frac{|R_1|}{|R_2|} \operatorname{sgn} R ,$$

która przeczy równoległości odcinków R i T . Uzyskana sprzeczność dowodzi, że odcinek S łamanej $\mathcal{N}_h^{(r)}$, równoległy do odcinków R i T , istnieje. Z lematów 5.5 i 5.3 wynika, że

$$\operatorname{in} \left(\frac{\partial h}{\partial X}, R \right) = \frac{\partial}{\partial X} \operatorname{in}(h, S)$$

oraz

$$\operatorname{in} \left(\frac{\partial h}{\partial Y}, T \right) = \frac{\partial}{\partial Y} \operatorname{in}(h, F) .$$

Ponieważ wielomian h jest niezdegenerowany na odcinkach łamanej globalnej, więc układ $\frac{\partial}{\partial X} \operatorname{in}(h, S) = \frac{\partial}{\partial Y} \operatorname{in}(h, F) = 0$ nie ma rozwiązań w $(\mathbf{C} \setminus \{0\}) \times (\mathbf{C} \setminus \{0\})$, tym samym nie ma ich także układ $\operatorname{in}(\frac{\partial h}{\partial X}, R) = \operatorname{in}(\frac{\partial h}{\partial Y}, T) = 0$, co kończy dowód niedegeneracji pary $(\frac{\partial h}{\partial X}, \frac{\partial h}{\partial Y})$.

Podamy teraz szkic dowodu lematu 5.2. Może on być wyprowadzony z podanych niżej lematów 5.6 i 5.7.

LEMAT 5.6. *Niech $h(X, Y) \in \mathbf{C}[X, Y]$ będzie wielomianem bez stałego wyrazu, niepodzielnym przez Y^2 i takim, że łamana $\mathcal{N}_h^{(r)}$ posiada chociaż jeden odcinek standardowy. Oznaczmy przez m_r minimum trzech wielkości*

$$\deg \operatorname{grad} h(X, 0), \quad \inf_{R \in \mathcal{N}_{\frac{\partial h}{\partial X}}^{(r)}} \bar{\alpha}(R, \Delta_{\frac{\partial h}{\partial Y}}), \quad \inf_{T \in \mathcal{N}_{\frac{\partial h}{\partial Y}}^{(r)}} \bar{\alpha}(T, \Delta_{\frac{\partial h}{\partial X}}),$$

Wówczas

$$\alpha(F^*) - 1 \geq m_r \geq \min \left\{ \alpha(F^*) - 1, \alpha(F^*) - \frac{|F_1^*|}{|F_2^*|} \operatorname{sgn} F^* \right\} ,$$

gdzie F^* oznacza standardowy odcinek łamanej $\mathcal{N}_h^{(r)}$ położony najbliżej osi poziomej.

Dowód lematu przeprowadzamy analogicznie jak w [L1] (lemat 3.10).

Z lematu 5.6 przez symetrię uzyskujemy

LEMAT 5.7. *Niech $h(X, Y) \in \mathbf{C}[X, Y]$ będzie wielomianem bez stałego wyrazu, niepodzielnym przez X^2 i takim, że łamana $\mathcal{N}_h^{(\mathbf{t})}$ posiada chociaż jeden odcinek standardowy. Oznaczmy przez m_t minimum trzech wielkości*

$$\deg \text{grad } h(0, Y), \quad \inf_{R \in \mathcal{N}_{\frac{\partial h}{\partial Y}}^{(\mathbf{t})}} \bar{\beta}(R, \Delta_{\frac{\partial h}{\partial Y}}), \quad \inf_{T \in \mathcal{N}_{\frac{\partial h}{\partial X}}^{(\mathbf{t})}} \bar{\beta}(T, \Delta_{\frac{\partial h}{\partial X}}).$$

Wówczas

$$\beta(F^{**}) - 1 \geq m_t \geq \min \left\{ \beta(F^{**}) - 1, \beta(F^{**}) - \frac{|F_2^{**}|}{|F_1^{**}|} \text{sgn } F^{**} \right\},$$

gdzie F^{**} oznacza standardowy odcinek łamanej $\mathcal{N}_h^{(\mathbf{t})}$ położony najbliżej osi pionowej.

Dla ilustracji, wyprowadzimy lemat 5.2 z dwóch podanych wyżej lematów przy założeniu, że obie łamane $\mathcal{N}_h^{(\mathbf{r})}$ oraz $\mathcal{N}_h^{(\mathbf{t})}$ posiadają odcinki standardowe. Pełną wersję dowodu można znaleźć w [L2]. Niech F^* oraz F^{**} będą zdefiniowane tak jak w wypowiedziach lematów. Z lematów tych wynika, że minimum sześciu liczb występujących w lemacie 5.2 jest ograniczone z góry przez liczbę m_2 równą mniejszej z dwu liczb

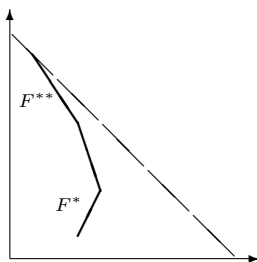
$$\alpha(F^*) - 1, \quad \beta(F^{**}) - 1$$

oraz z dołu przez liczbę m_4 równą najmniejszej z czterech liczb

$$\alpha(F^*) - 1, \quad \alpha(F^*) - \frac{|F_1^*|}{|F_2^*|} \text{sgn } F^*,$$

$$\beta(F^{**}) - 1, \quad \beta(F^{**}) - \frac{|F_2^{**}|}{|F_1^{**}|} \text{sgn } F^{**}.$$

Łatwo zauważyć, że wielkość (5) występująca w tezie lematu 5.2 jest w rozważanym przypadku równa m_2 , zatem do zakończenia dowodu wystarczy pokazać, że $m_2 = m_4$. Nierówność $m_2 \geq m_4$ jest oczywista. Dla dowodu nierówności przeciwnej rozważymy cztery warianty nachyleń odcinków F^* i F^{**} . Jeżeli jednocześnie $\frac{|F_1^*|}{|F_2^*|} \text{sgn } F^* \leq 1$ oraz $\frac{|F_2^{**}|}{|F_1^{**}|} \text{sgn } F^{**} \leq 1$ to sprawdzana nierówność jest oczywista. Załóżmy zatem, że $\frac{|F_1^*|}{|F_2^*|} \text{sgn } F^* \leq 1$, zaś $\frac{|F_2^{**}|}{|F_1^{**}|} \text{sgn } F^{**} > 1$. W tym przypadku znak odcinka F^{**} jest równy $+1$, czyli należy on do prawostronnej łamanej $\mathcal{N}_h^{(\mathbf{r})}$. Odcinek F^{**} nie może być odcinkiem wyjątkowym łamanej $\mathcal{N}_h^{(\mathbf{r})}$, gdyż wówczas łamana ta nie posiadałaby odcinków standardowych. Wynika stąd, że odcinek F^{**} jest bardziej oddalony od osi poziomej niż odcinek F^* . Otrzymujemy stąd $\alpha(F^*) \leq \alpha(F^{**})$. Ponieważ znak odcinka F^{**} jest w rozważanej sytuacji równy $+1$, więc $\alpha(F^{**}) \geq |F_1^{**}| \geq 1$. Otrzymujemy stąd



$$\begin{aligned}
 \alpha(F^*) - 1 &\leq \alpha(F^{**}) - 1 \leq [\alpha(F^{**}) - 1] \frac{|F_2^{**}|}{|F_1^{**}|} \operatorname{sgn} F^{**} = \\
 &= \alpha(F^{**}) \frac{|F_2^{**}|}{|F_1^{**}|} \operatorname{sgn} F^{**} - \frac{|F_2^{**}|}{|F_1^{**}|} \operatorname{sgn} F^{**} = \\
 &= \beta(F^{**}) - \frac{|F_2^{**}|}{|F_1^{**}|} \operatorname{sgn} F^{**} .
 \end{aligned}$$

Powyżej skorzystaliśmy z łatwej do sprawdzenia równości

$$\beta(S) = \alpha(S) \frac{|S_2|}{|S_1|} \operatorname{sgn} S ,$$

prawdziwej dla dowolnego odcinka S o niezerowym znaku. Dowiedziona nierówność wystarcza do stwierdzenia, że $m_2 \leq m_4$ w rozważanej sytuacji. Przypadek gdy $\frac{|F_1^*|}{|F_2^*|} \operatorname{sgn} F^* > 1$, zaś $\frac{|F_2^{**}|}{|F_1^{**}|} \operatorname{sgn} F^{**} \leq 1$ sprawdzamy analogicznie. Przypadek, w którym $\frac{|F_1^*|}{|F_2^*|} \operatorname{sgn} F^* > 1$ oraz $\frac{|F_2^{**}|}{|F_1^{**}|} \operatorname{sgn} F^{**} > 1$ jest niemożliwy, co wynika z analizy nachyleń obu odcinków. Tym samym zakończyliśmy dowód lematu 5.2 w założonej sytuacji.

Spis literatury

- [ChK1] J. Chądryński, T. Krasieński, *Exponent of growth of polynomial mappings of \mathbf{C}^2 into \mathbf{C}^2* , Singularities, Banach Center Publ. 20 (1988), PWN, Warszawa, 147–160.
- [ChK2] J. Chądryński, T. Krasieński, *On the Lojasiewicz exponent at infinity for polynomial mappings \mathbf{C}^2 into \mathbf{C}^2 and components of polynomial automorphism of \mathbf{C}^2* , Ann. Polon. Math. 57 (1992), 291–302.
- [CN-H] P. Cassou-Noguès, Ha Huy Vui, *Sur le nombre de Lojasiewicz à l'infini d'un polynôme*, Ann. Polon. Math. (to appear)
- [L1] A. Lenarcik, *O wykładniku Lojasiewicza gradientu funkcji holomorficznej*, praca doktorska, Uniwersytet Łódzki, Łódź 1996.
- [L2] A. Lenarcik, *On the Lojasiewicz exponent of the gradient of polynomial function*, (1996) (w przygotowaniu).

- [Pł1] A. Płoski, *On the growth of proper polynomial mappings*, Ann. Pol. Math. 45 (1985), 297–309.
- [Pł2] A. Płoski, *Szeregi Puiseux, diagramy Newtona i odwzorowania holomorficzne płaszczyzny \mathbf{C}^2* , Materiały X Konferencji Szkoleniowej z Teorii Zagadnień Ekstremalnych, Łódź (1989), 74–99.
- [Pł3] A. Płoski, *Newton polygons and the Lojasiewicz exponent of a holomorphic mapping of \mathbf{C}^2* , Ann. Pol. Math. 51 (1990), 275–281.
- [W] R. Walker, *Algebraic curves*, Princeton University Press (1950).

THE LOJASIEWICZ EXPONENT OF A POLYNOMIAL MAPPING AND NEWTON
DIAGRAMS.

Summary. We give an upper estimate of the global Lojasiewicz exponent of the gradient of any polynomial mapping $h : \mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{C}$. The estimate is determined by the Newton diagram of h . In the nondegenerated case we get the exact value of the exponent.

Bronisławów, 13 – 17 stycznia, 1997 r.