

O DRZEWACH EGGERSA I KIEŁKACH OSOBLIWOŚCI KRZYWYCH ZESPOLONYCH

Andrzej Lenarcik (Kielce)

Drzewa Eggersa w zwięzły sposób reprezentują klasę ekwisingularności kiełka osobliwości krzywej zespolonej. Przeprowadzamy konstrukcję drzew Eggersa za pomocą naturalnie zdefiniowanej ultrametryki w zbiorze kiełków nierozkładalnych. Anonsujemy dwa rezultaty. Podajemy opis osobliwości niezdegenerowanej w sensie Kouchnirenki. Definiujemy klasę osobliwości jednołańcuchowych, dla których możliwe jest odtworzenie typu ekwisingularności na podstawie jacobianowego wielokąta Newtona. Klasa ta obejmuje zarówno kiełki nierozkładalne, jak również niezdegenerowane osobliwości jednostyczne, dla których tego typu rezultaty są znane.

1 Preliminaria

Niech $f \in \mathbf{C}\{X, Y\}$ będzie szeregiem zredukowanym definiującym kiełek $f = 0$ krzywej zespolonej w $0 \in \mathbf{C}^2$. Gdy $\text{ord } f \geq 2$, kiełek nazywamy *osobliwym*, gdy $\text{ord } f = 1$ kiełek nazywamy *nieosobliwym (gładkim)*. Jeżeli f jest nierozkładalny, to kiełek $f = 0$ nazywamy *gałęzią* (gałęzią nazywamy także szereg f). Oznaczmy przez \mathcal{B} zbiór gałęzi. W zbiorze tym jest określona ultrametryka [P1] zwana kontaktem:

$$d(f, g) = \frac{(f, g)_0}{(\text{ord } f)(\text{ord } g)}.$$

Dla $f, g, h \in \mathcal{B}$ mamy:

(d_1) $d(f, g) = \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy f i g definiują ten sam kielek,

(d_2) $d(f, g) = d(g, f)$,

(d_3) $d(f, g) \geq \min\{d(f, h), d(g, h)\}$.

2 Kontakt i charakterystyka

Rozważmy rosnący ciąg $d_1 < d_2 < \dots$ liczb wymiernych ≥ 1 . Łatwo sprawdzić, że istnieje jednoznacznie określony ciąg par liczb całkowitych dodatnich $(N_1, M_1), (N_2, M_2), \dots$ taki, że

$$(1) \quad d_k = \frac{M_k}{(N_1 \dots N_{k-1})^2 N_k}, \quad \text{NWP}(N_k, M_k) = 1, \quad k = 1, 2, \dots$$

Jeżeli $N_k > 1$, to d_k nazywamy *wyrazem charakterystycznym* a (N_k, M_k) *parą charakterystyczną* ciągu.

Przykład 2.1 Rozważmy ciąg $(2, 5/2, 11/4, 23/8, 25/3)$. Mamy

$$2 = \frac{2}{1}; \quad \frac{5}{2} = \frac{5}{1^2 \cdot 2}; \quad \frac{11}{4} = \frac{11}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 1};$$

$$\frac{23}{8} = \frac{23}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 1^2 \cdot 2}; \quad \frac{25}{3} = \frac{400}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3},$$

skąd otrzymamy ciąg par

$$(1, 2), \quad (2, 5), \quad (1, 11), \quad (2, 23), \quad (3, 400).$$

Pozostawiając w ciągu tylko wyrazy charakterystyczne $(5/2, 23/8, 25/3)$ i powtarzając konstrukcję, otrzymamy te same pary charakterystyczne $(2, 5), (2, 23), (3, 400)$.

Niech teraz $f = 0$ będzie gałęzią i rozważmy zbiór

$$D(f) = \{d(f, h) : h \in \mathcal{B}\}.$$

Wykorzystując teorię półgrupy gałęzi dowodzimy, że skończone elementy zbioru $D(f)$ mogą być ustawione w ciąg rosnący oraz zbiór wyrazów charakterystycznych tego ciągu $\text{char}(f)$ jest skończony. Niech $\mathbf{g}(f) := \#\text{char}(f)$. Mamy $\mathbf{g}(f) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f = 0$ jest gałęzią gładką. Dla gałęzi osobliwych wyrazy charakterystyczne $\text{char}(f)$ porządkujemy rosnąco: $d_1(f) < \dots < d_{\mathbf{g}}(f)$ i nazywamy *ciągami kontaktów charakterystycznych*. Ciągowi temu odpowiada ciąg par charakterystycznych $(n_1, \bar{m}_1), \dots, (n_{\mathbf{g}}, \bar{m}_{\mathbf{g}})$ otrzymany z (1). Liczbę $\mathbf{g} = \mathbf{g}(f)$ nazywamy *liczbą par charakterystycznych* gałęzi.

Uwaga 2.2 Powyżej zdefiniowane pary są powiązane z klasyczną charakterystyką półgrupy $(\bar{\beta}_0, \dots, \bar{\beta}_{\mathbf{g}})$ przez związek

$$\frac{\bar{\beta}_k}{\bar{\beta}_0} = \frac{\bar{m}_k}{n_1 \dots n_k}, \quad k = 1, \dots, \mathbf{g}.$$

Rozważmy podział zbioru gałęzi $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_1 \cup \dots$, gdzie \mathcal{B}_0 oznacza gałęzie gładkie, \mathcal{B}_1 gałęzie z jedną parą charakterystyczną, itd. Mamy

Własność 2.3 Niech $f \in \mathcal{B}$, $\mathbf{g} = \mathbf{g}(f)$. Istnieje ciąg gałęzi $f^{(0)}, \dots, f^{(\mathbf{g})} = f$ taki, że

- (i) $f^{(k)} \in \mathcal{B}_k$, $k = 0, \dots, \mathbf{g}$,
- (ii) $d(f, f^{(k-1)}) = d_k(f)$, $k = 1, \dots, \mathbf{g}$.

O ciągu $f^{(0)}, \dots, f^{(\mathbf{g})}$ powiemy, że *realizuje kontakty charakterystyczne*. Gałąź gładka $f^{(0)}$ jest w tzw. *maksymalnym kontakcie* z f ([P2]). Ogólnie [GB-P]

$$d_k = d(f, f^{(k-1)}) = \sup\{d(f, h) : h \in \mathcal{B}_{k-1}\}, \quad k = 1, \dots, \mathbf{g}.$$

Przykład 2.4 Niech f będzie gałęzią zdefiniowaną przez szereg Puiseux

$$Y = X + X^{\frac{3}{2}} + X^2 + X^{\frac{9}{4}}.$$

Mamy $\text{char}(f) = (3/2, 15/8)$ oraz $f^{(0)}$ odpowiada szeregowi $Y = X$, zaś $f^{(1)}$ jest zdefiniowane przez szereg $Y = X + X^{3/2} + X^2$.

3 Kule i drzewa

Do opisu drzewa Eggersa ([E], [GB]) wykorzystujemy język kul w przestrzeni ultrametrycznej ([G-L-P]). Niech $f \in \mathcal{B}$ i niech $R \in \langle 1, +\infty \rangle$. Zbiór

$$B(f, R) = \{g \in \mathcal{B} : d(f, g) \geq R\}$$

będziemy nazywać *kulą* o środku f i promieniu R . Zbiór gałęzi \mathcal{B} jest kulą o promieniu jeden. Dwie dowolne gałęzie $f, g \in \mathcal{B}$ definiują kulę

$$B(f, g) := B(f, d(f, g)) = B(g, d(f, g)).$$

Dla każdej kuli $B \subset \mathcal{B}$ definiujemy *średnicę* $d(B) := \inf\{d(f, g) : f, g \in B\}$. Jeżeli $B = B(f, g)$, to $d(B) = d(f, g)$. Kula \mathcal{B} jest zdefiniowana przez dowolne dwie gałęzie przecinające się transwersalnie. Dla kul B_1, B_2 wprowadzamy częściowy porządek $B_1 \leq B_2 \Leftrightarrow B_1 \supset B_2$ (naturalnie definiujemy ostrą nierówność). Przytoczymy za Kuratowskim i Mostowskim definicję drzewa.

Definicja 3.1 ([K-M], Rozdz. 2, Par. 9, Def. 6)

Zbiór \mathbf{X} uporządkowany przez relację \leq nazywamy *pseudodrzewem*, jeżeli dla dowolnego $x \in \mathbf{X}$ zbiór poprzedników $\{y : y \leq x\}$ jest łańcuchem. Zbiór nazywamy *drzewem*, jeżeli zbiór poprzedników dowolnego elementu jest dobrze uporządkowany.

Wniosek 3.2 Dowolny skończony zbiór kul w \mathcal{B} tworzy drzewo.

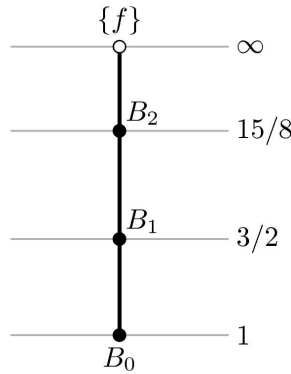
Kula \mathcal{B} jest minimum w zbiorze wszystkich kul. Kulę o nieskończonej średnicy nazywamy *białymi*; pozostałe kule są *czarne*.

Definicja 3.3 Drzewo gałęzi f definiujemy wybierając ciąg gałęzi $f^{(0)}, \dots, f^{(\mathbf{g})} = f$ realizujących kontakty charakterystyczne. Drzewem jest łańcuch kul

$$(2) \quad B_0 < B_1 < \dots < B_{\mathbf{g}} < \{f\},$$

gdzie $B_0 = \mathcal{B}$ oraz $B_k = B(f, f^{(k-1)})$, $k = 1, \dots, \mathbf{g}$. Definicja nie zależy od wyboru ciągu. Dla gałęzi gładkiej mamy $B_0 < \{f\}$.

Przykład 3.4 Niech f będzie gałęzią z Przykładu 2.4. Mamy $\text{char}(f) = (3/2, 15/8)$. Drzewo składa się z trzech kul czarnych i jednej białej.



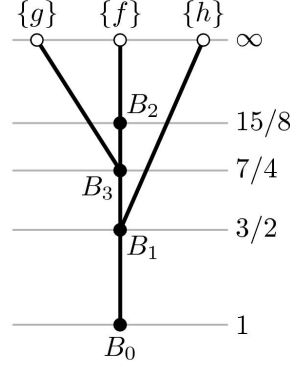
Definicja 3.5 Rozważmy teraz dowolny kielek opisany przez szereg zredukowany f i niech $f = f_1 \dots f_r$ będzie rozkładem na czynniki nierozkładalne. *Drzewo kielka* jest sumą kul występujących w drzewach gałęzi oraz kul postaci $B(f_i, f_j)$, $i, j = 1, \dots, r$, $i \neq j$.

Przykład 3.6 Rozważmy kielek o trzech gałęziach $f, g, h \in \mathcal{B}$ zdefiniowanych przez rozwinięcia Puiseux:

$$\begin{aligned} f &: Y = X + X^{\frac{3}{2}} + X^2 + X^{\frac{9}{4}} \\ g &: Y = X + X^{\frac{3}{2}} + 2X^2 \\ h &: Y = X \end{aligned}$$

Mamy $\text{char}(f) = (3/2, 15/8)$, $\text{char}(g) = (3/2)$, zaś kielek $h = 0$ jest gładki. Ponadto

$$d(f, g) = 7/4, d(f, h) = d(h, g) = 3/2.$$



Okazuje się, że dotychczas zdefiniowane drzewo nie zawiera pełnej informacji o klasie ekwisingularności kielka. Na przykład drzewo nie zmieni się, gdy w ostatnim przykładzie gałąź h zastąpimy przez gałąź osobliwą h' zdefiniowaną przez szereg $Y = X + 2X^{3/2}$. Zagadnienie to wyjaśniamy w kolejnym rozdziale.

4 Kule i charakterystyka

Rozważmy dowolną kulę $B \subset \mathcal{B}$ o średnicy $d = d(B)$. Zajmiemy się zagadnieniem: w jakim stopniu gałęzie $f \in B$ mają zgodną charakterystykę? Oznaczmy przez $\text{char}(f)_d$ ucięty ciąg charakterystyczny wyrazów ostro mniejszych od d .

Własność 4.1 Niech $B \subset \mathcal{B}$ będzie kulą o średnicy $d = d(B)$. Wówczas dla dowolnego $f, g \in \mathcal{B}$ $\text{char}(f)_d = \text{char}(g)_d$.

Wniosek 4.2 Charakterystyka $\text{char}(B)$ jest dobrze określona.

Analizując kule z Przykładu 3.6, mamy $\text{char}(B_1) = \emptyset$, $\text{char}(B_3) = (3/2)$, $\text{char}(B_2) = (3/2)$. Formalnie charakterystyka jest zdefiniowana dla wszystkich kul: $\text{char}(B_0) = \emptyset$, zaś dla kul o nieskończonej średnicy mają charakterystykę równą charakterystyce swoich gałęzi.

Definicja 4.3 Niech B będzie kulą, $d = d(B)$, $1 < d < \infty$. Mówimy, że kula B jest *charakterystyczna* (niecharakterystyczna), jeśli liczba d w ciągu $\text{char}(B) \cup \{d\}$ jest wyrazem charakterystycznym (niecharakterystycznym) w sensie (1).

Kula B_1 jest charakterystyczna, gdyż liczba $3/2$ jest wyrazem charakterystycznym ciągu $\text{char}(B_1) \cup \{3/2\} = (3/2)$. Podobnie B_2 , gdyż liczba $15/8$ jest wyrazem charakterystycznym w ciągu $\text{char}(B_2) \cup \{15/8\} = (3/2, 15/8)$. Kula B_3 nie jest charakterystyczna, gdyż liczba $7/4$ nie jest wyrazem charakterystycznym ciągu $\text{char}(B_3) \cup \{7/4\} = (3/2, 7/4)$. Konstrukcja (1) prowadzi tu do par $(2, 3)$, $(1, 7)$.

Definicja 4.4 Niech B będzie kulą o skończonej średnicy $d = d(B) < \infty$. Przyjmując

$$(3) \quad B' = \{f \in B : d(B) \in \text{char}(f)\} \quad B'' = \{f \in B : d(B) \notin \text{char}(f)\}$$

otrzymujemy podział kuli na część *aktywną* B' oraz *pasywną* B'' .

Uwaga 4.5 Kula niecharakterystyczna składa się wyłącznie z części pasywnej. Kula charakterystyczna ma obie części niepuste.

W oznaczeniach z Przykładu 3.6 każda gałąź kuli B_1 odpowiada jednemu z rozwinieć

$$y = X + cX^{3/2} + \dots, \quad c \in \mathbf{C},$$

przy czym gałąź leży w części aktywnej B'_1 dla $c \neq 0$ oraz w części pasywnej B''_1 dla $c = 0$. Odnotujemy

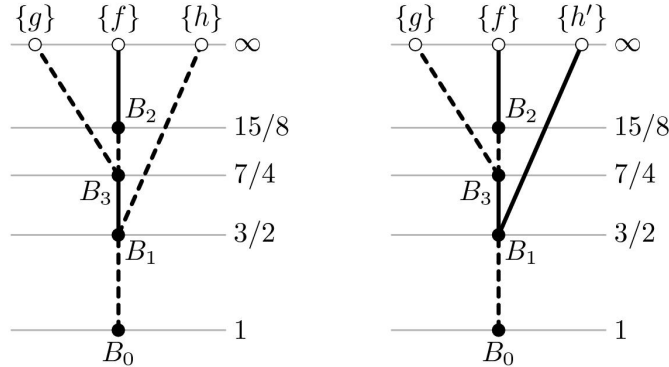
Własność 4.6 Niech $f^{(0)}, \dots, f^{(\mathbf{g})} = f$ będzie ciągiem realizującym kontakty charakterystyczne dla gałęzi f . Dla $k = 1, \dots, \mathbf{g}$ niech $B_k = B(f, f^{(k-1)}) = B'_k \cup B''_k$. Wówczas $f \in B'_k$ oraz $f^{(k-1)} \in B''_k$.

W szczególności gładkie kontakty maksymalne leżą zawsze w części pasywnej.

Podstawą definicji pełnego drzewa Eggersa będzie

Własność 4.7 Niech $B < C$ będą dowolnymi kulami i niech $B = B' \cup B''$ będzie podziałem na część *aktywną* i *pasywną*. Wówczas $C \subset B'$ lub $C \subset B''$.

Dotychczas zdefiniowaliśmy drzewo Eggersa jako zbiór uporządkowanych kul w przestrzeni ultrametrycznej. Kule te odpowiadają wierzchołkom grafu. Krawędź grafu będzie odpowiadała każdej parze $B < C$, bezpośrednio następujących po sobie kul, przy czym krawędź jest *aktywna* (zapisywana linią ciągłą), jeśli $C \subset B'$ lub *pasywna* (zapisywana linią przerywaną), gdy $C \subset B''$. Poniżej prezentujemy pełne drzewo Eggersa dla kielka $fgh = 0$ z Przykładu 3.6 oraz dla kielka $fgh' = 0$ omawianego za tym przykładem.



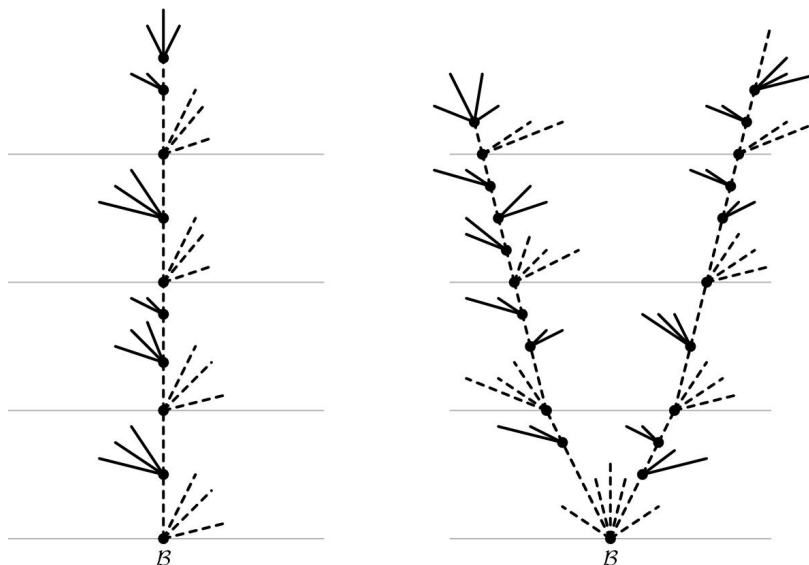
Uwaga 4.8 Z wierzchołka niecharakterystycznego wychodzą tylko krawędzie pasywne (co najmniej dwie); z wierzchołka charakterystycznego wychodzi co najwyżej jedna krawędź pasywna i co najmniej jedna krawędź aktywna.

5 Anonsowane rezultaty

Drzewa Eggersa pomagają opisać typ topologiczny kielka osobliwego w sposób zwięzły. Rozważmy łańcuch w drzewie Eggersa złożony z następujących po sobie kul. Łańcuch ten nazwiemy *ładkim* jeżeli zaczyna się od kuli \mathcal{B} oraz wszystkie jego połączenia są pasywne. Dwa takie łańcuchy są *transwersalne* jeżeli \mathcal{B} jest ich jedynym elementem wspólnym. Rezultat [GB-L-P] można wypowiedzieć następująco:

Twierdzenie 5.1 *Rozważmy drzewo Eggersa kielka niezdegenerowanego w sensie Kouchnirenki. Wówczas zachodzi jeden z przypadków:*

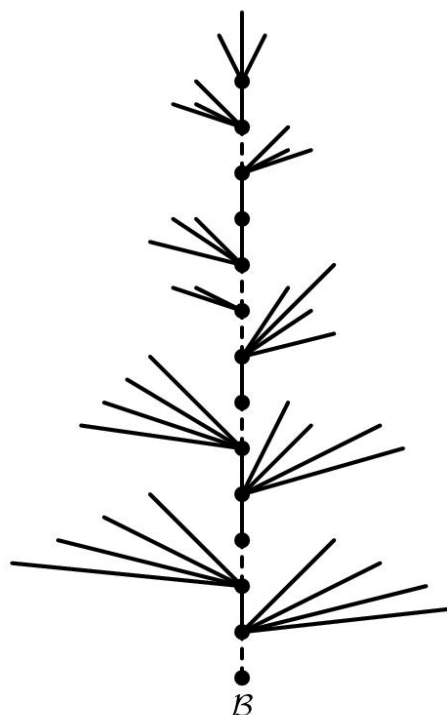
- (i) *wszystkie kule czarne tworzą ładki łańcuch,*
- (ii) *wszystkie kule czarne tworzą dwa ładkie transwersalne łańcuchy.*



Zauważmy, że jeżeli łańcuch jest ładki, to istnieje gałąź ładka, która należy do wszystkich jego kul. Gałąź tę nazwiemy *osią łańcucha ładkiego*. Jeżeli ostatnia kula łańcucha jest biała, to ona sama określa jednoznacznie oś łańcucha; jeżeli ostatnia kula jest czarna, to osią jest dowolna gałąź wybrana z jej części pasywnej. Jeżeli kieltek spełnia założenia punktu (i) twierdzenia (punktu (ii)), to wybierając układ współrzędnych w ten sposób, że jedna z osi pokrywa się z osią łańcucha (obie osie pokrywają się z osiami łańcuchów), otrzymamy układ, w którym szereg opisujący kieltek jest niezdegenerowany.

Kieltek nazwiemy *jednołańcuchowym*, gdy wszystkie kule czarne w drzewie Eggersa tworzą jeden łańcuch. Teissier [T] zaproponował niezmiennik osobliwości zwany *jakobianowym wielokątem Newtona*. Można zadać pytanie, czy wielokąt ten określa typ osobliwości kielka krzywej? Eggers [E] podał przykład, że nie. Odpowiedź pozytywną uzyskujemy dla gałęzi [M] oraz dla niezdegenerowanych kielków jednostycznych [L]. Poniższe twierdzenie uogólnia dwa cytowane rezultaty.

Twierdzenie 5.2 *W klasie kielków jednołańcuchowych jacobianowy wielokąt Newtona określa typ ekwisingularności.*



Literatura

- [E] H. Eggers, *Polarinvarianten und die Topologie von Kurvensingularitäten*, Bonner Math. Schriften 147, Universität Bonn, Bonn 1982.
- [GB] E. García Barroso, *Sur les courbes polaires d'une courbe plane réduite*, Proc. London Math. Soc. (3), 81 (2000), 1–28.
- [GB-P] E. R. García Barroso, A. Płoski, *Sur l'exposant de contact des courbes analytiques planes*, Octobre 2002, Travail en cours.
- [GB-L-P] E. R. García Barroso, A. Lenarcik, A. Płoski, *Characterization of non-degenerate plane curve singularities*, Univ. Iagel. Acta Math. Fasc. XLV (2007), 27–36.
- [G-L-P] J. Gwoździewicz, A. Lenarcik, A. Płoski, *Polar invariants of plane curve singularities. Intersection theoretical approach*, praca przesłana do druku

- [K-M] K. Kuratowski, M. Mostowski, *Teoria Mnogości*, PWN, Warszawa 1978.
- [L] A. Lenarcik, *On the jacobian Newton polygon of plane curve singularities*, Manuscripta Math. 125 (2008), 309–324.
- [M] M. Merle, *Invariants polaires des courbes planes*, Invent. Math. 41 (1977), 103–111.
- [P1] A. Płoski, *Remarque sur la multiplicité d'intersection des branches planes*, Bull. Pol. Acad. Sci. Math., Vol. 33, No 11-12, (1985), 601–605.
- [P2] A. Płoski, *O kontakcie maksymalnym*, Materiały na XXV Konferencję Szkoleniową z Geometrii Analitycznej i Algebraicznej Zespólonej, Łódź 2004, 19–25. 11-12, (1985), 601–605.
- [T] B. Teissier, *Polyèdre de Newton Jacobien et équisingularité*, in: Séminaire sur les Singularités, Publ. Math. Univ. Paris VII 7, 1980, 193–221.

On Egger's tree and curve germ singularities

Summary. Egger's tree is a brief representation of a curve germ singularity. We present a construction of Egger's tree by using naturally defined ultrametric in the space of branches. We announce two results. We show a description of nondegenerate curve singularity. Then we define a new class of singularities (with one chain in the tree) for which the equisingularity type is determined by the jacobian Newton polygon. This new class includes branches and nondegenerate unitangent singularities for which such results are known.

Łódź, 12 – 16 stycznia 2009 r.

