MATERIAŁY NA XXXVII KONFERENCJĘ
Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ

2016 **Łódź** **str. 23**

O KLASACH EKWISINGULARNOŚCI OSOBLIWOŚCI KRZYWYCH PŁASKICH WYZNACZONYCH PRZEZ JAKOBIANOWY WIELOKĄT NEWTONA

Andrzej Lenarcik (Kielce)

Dla kiełka zespolonej krzywej płaskiej z osobliwością izolowaną rozważamy (generyczny) jakobianowy wielokąt Newtona wprowadzony przez B. Teissiera. E. García-Barroso oraz J. Gwoździewicz pokazali, że na podstawie jakobianowego wielokąta Newtona można rozpoznać, że osobliwość jest gałęzią. Wtedy możliwe też jest określenie typu osobliwości gałęzi (Merle). Anonsujemy analogiczny rezultat dla niektórych osobliwości złożonych z wielu gałęzi. Osobliwości te nazywamy miotłami.

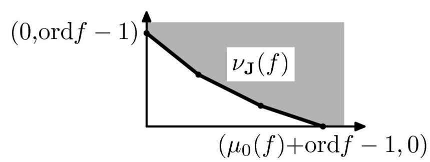
*

Niech $f \in \mathbb{C}\{X,Y\}$ będzie niezerowym szeregiem bez stałego wyrazu definiującym kiełek $f = 0$ w otoczeniu $0 \in \mathbb{C}^2$. Zakładamy, że $f = 0$ ma osobliwość izolowaną w zerze. Zdefiniujmy (generyczny) jakobianowy wielokąt Newtona dla f. Za B. Teissierem rozważamy krzywą polarną $a(\partial f/\partial X) + b(\partial f/\partial y)$ odpowiadającą generycznemu kierunkowi $(a : b) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ oraz rozkład tej krzywej

$a(\partial f/\partial X) + b(\partial f/\partial y) = h_1 \dots h_u$ na czynniki nierozkładalne w $\mathbb{C}\{X, Y\}$. Definiujemy zbiór niezmienników polarnych

$$Q(f) = \left\{ \frac{(f, h_j)_0}{\operatorname{ord} h_j} : j = 1, \dots, u \right\} ,$$

gdzie $(\ ,\ )_0$ jest krotnością przecięcia. Każdemy $q \in Q(f)$ odpowiada zbiór indeksów J_q złożony z $j \in \{1, \dots, u\}$, dla których $(f, h_j)_0/\operatorname{ord} h_j = q$. Wówczas $m_q = \sum_{j \in J_q} \operatorname{ord} h_j$ jest krotnością ilorazu polarnego q. Mamy $\sum m_q = \operatorname{ord} f - 1$ oraz $\sum m_q q = \mu_0(f) + \operatorname{ord} f - 1$, gdzie $\mu_0(f)$ jest liczbą Milnora. Informację o niezmiennikach polarnych i ich krotnościach przedstawiamy za Teissier'em w postaci jakobianowego wielokąta Newtona $\nu_{\mathbf{J}}(f)$.



Jest to nieograniczony wielokąt wypukły leżący w pierwszej ćwiartce. Od dołu ogranicza go łamana łączącą punkt $(\operatorname{ord} f - 1, 0)$ na osi pionowej z punktem $(\mu_0(f) + \operatorname{ord} f - 1, 0)$ na osi poziomej. Parami nierównoległym odcinkom łamanej odpowiadają różne niezmienniki polarne. Długość rzutu odcinka odpowiadającego danemu niezmiennikowi na oś pionową jest krotnością tego niezmiennika, zaś długość rzutu na oś poziomą jest równa iloczynowi wartości niezmiennika i jego krotności. Teissier [T1, T2] pokazał, że $\nu_{\mathbf{J}}(f)$ nie zależy od wyboru dostatecznie generycznego kierunku krzywej polarnej (w ogóniejszym przypadku dla osobliwości hiperpowierzchni).

Ekwisingularność kiełków i niezmienniki ekwisingularności
Kiełek $h = 0$ nazywamy gałęzią jeżeli szereg $h \in \mathbb{C}\{X, Y\}$ jest nierozkładalny (nazwa gałąź używana jest też do szeregu). Definiujemy półgrupę gałęzi

$$\Gamma(h) = \{(h, g)_0 : g \in \mathbb{C}\{X, Y\},\ h \text{ nie dzieli } g\} \subset \mathbb{N} .$$

Mamy $\Gamma(h) = \mathbb{N}$ wtedy i tylko wtedy, gdy h jest gałęzią gładką ($\operatorname{ord} h = 1$). Jakobianowy wielokąt Newtona gałezi w terminach półgrupy opisał Merle [M]. Dwa kiełki $f = 0$ i $g = 0$ nazywamy ekwisingularnymi, jeśli istnieją rozkłady $f = f_1 \dots f_r$ oraz $g = g_1 \dots g_s$ na gałęzie w $\mathbb{C}\{X, Y\}$ takie, że $r = s$, $\Gamma(f_i) = \Gamma(g_i)$ dla $i = 1, \dots, r$ oraz $(f_i, f_j)_0 = (g_i, g_j)_0$ dla $i, j = 1, \dots, r$. Relacja ekwisingularności definiuje klasy w zbiorze kiełków. Funkcje stałe na tych klasach nazywamy niezmiennikami ekwisingularności. Z cytowanych prac Teissiera wynika, że $\nu_{\mathbf{J}}(f)$ jest niezmiennikiem ekwisingularności. Podczas jednego z seminariów Kielecko-Łódzkich A. Płoski zadał pytanie, które niezmienniki ekwisingularności mogą być rozpoznane na podstawie $\nu_{\mathbf{J}}(f)$ (w szczególności pytanie dotyczyło liczby gałęzi)? Do pozytywnych przykładów oprócz oczywistych $\operatorname{ord} f$ i $\mu_0(f)$ należą także wykładnik Łojasiewicza

$\pounds_0(f)$ [T1], związany z maksymalnym niezmiennikiem polarnym, oraz wykładnik maksymalnego kontaktu Hironaki $\delta(f)$ ([LMP]), związany z minimalnym ilorazem polarnym. W tej ostatniej pracy powiązano też liczbę stycznych $t(f)$ z krotnością $\operatorname{ord} f$ jako ilorazu polarnego. Przykład, że liczba gałęzi nie może być odczytana na podstawie jakobianowego wielokąta Newtona podany jest w [L1].

Wspomniany przykład był inspiracją dla autorów pracy [GB-G], którzy pokazali, że chociaż nie można rozpoznać liczby gałęzi na podstawie jakobianowego wielokąta Newtona, to jednak można rozpoznać, że gałąź jest jedna. Stosując wtedy wynik Merla można określić klasę ekwisingularności kiełka.

DEFINICJA (*). Mówimy, że klasa ekwisingularności kiełka $f = 0$ jest wyznaczona przez jakobianowy wielokąt Newtona, jeżeli dla dowolnego kiełka $g = 0$ z równości $\nu_{\mathbf{J}}(f) = \nu_{\mathbf{J}}(g)$ wynika ekwisingularność kiełków $f = 0$ i $g = 0$.

TWIERDZENIE 1. ([GB-G]) Klasa ekwisingularności dowolnej gałęzi jest wyznaczona przez jakobianowy wielokąt Newtona.

Można zapytać, czy klasa ekwisingularności kiełków złożonych z wielu gałęzi może być wyznaczona przez jakobianowy wielokąt Newtona?

Definicja miotły (broom)
Przez $(\bar{\beta}_0, \ldots, \bar{\beta}_{\mathbf{g}})$ oznaczamy minimalny ciąg generatorów półgrupy gałęzi ($\mathbf{g} \geqslant 0$ oznacza tzw. liczbę par charakterystycznych; $\mathbf{g} = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy gałąź jest gładka). Niech $\varepsilon_k = \mathrm{NWP}(\bar{\beta}_0, \ldots, \bar{\beta}_k)$ będzie ciągiem dzielników ($k = 0, \ldots, \mathbf{g}$). Niech $f = f_1 \ldots f_r$ będzie rozkładem na czynniki nierozkładalne. Kiełek $f = 0$ nazywamy miotłą jeżeli $r = 1$ lub jeżeli $r \geqslant 2$ i wtedy istnieje stała c taka, że spełnione są warunki

(I) $\dfrac{(f_i, f_j)_0}{(\operatorname{ord} f_i)(\operatorname{ord} f_j)} = c$ dla $i \neq j$,

(II) dla każdej gałęzi osobliwej, jeżeli $(\bar{\beta}_0, \ldots, \bar{\beta}_{\mathbf{g}})$ jest ciągiem generatorów jej półgrupy ($\mathbf{g} \geqslant 1$), to

$$\frac{\varepsilon_{k-1}\bar{\beta}_k}{(\bar{\beta}_0)^2} \leqslant c \quad \text{dla } k = 1, \ldots, \mathbf{g} \, .$$

W pracy niniejszej anonsujemy następujące uogólnienie Twierdzenia 1.

TWIERDZENIE 2. Klasa ekwisingularności dowolnej miotły jest wyznaczona przez jakobianowy wielokąt Newtona.

Klasa ewisingularności miotły
Płoski [P1] pokazał, że wielkość $d(f,g) := (f,g)_0/((\operatorname{ord} f)(\operatorname{ord} g))$ (tzw. rząd kontaktu), występująca w (I) jest dystansem logarytmnicznym w zbiorze gałęzi. W szczególności zachodzi silna nierówność trójkąta $d(f,g) \geqslant \min\{d(f,h), d(g,h)\}$ dla dowolnych gałęzi f, g, h. Czyli można powiedzieć, że jeżeli miotła ma więcej niż

jedną gałąź, to każda para różnych gałęzi ma taki sam rząd kontaktu. Oznaczmy przez $\delta_k := (\varepsilon_{k-1}\bar{\beta}_k)/(\bar{\beta}_0)^2$, $k = 1, \ldots, \mathbf{g}$, wielkości występujące w (II). Pojawiły się one np. w programie nakreślonym w [GB-P]. Można pokazać (np. [GB-P, L2]), że dla danej gałęzi osobliwej wielkość δ_k jest maksymalnym rzędem kontaktu tej gałęzi z gałęziami posiadającymi ostro mniej niż k par charakterystycznych; δ_k nazywamy charakterystycznym rzędem kontaktu ($k = 1, \ldots, \mathbf{g}$). W szczególności δ_1 jest maksymalnym kontaktem Hironaki dla gałęzi. Z własności półgrupy gałęzi wynika nierówność $\delta_1 < \ldots < \delta_{\mathbf{g}}$. Czyli (II) oznacza, że w przypadku, gdy miotła ma więcej niż jedną gałąź, to wszystkie charakterystyczne rzędy kontaktów gałęzi osobliwych są mniejsze lub równe c. W [L2] pokazujemy, że charakterystyczne rzędy kontaktów dwóch gałęzi, ostro mniejsze od ich wzajemnego rzędu kontaktu, pokrywają się. Wynika stąd, że albo wszystkie gałęzie miotły mają jednakową klasę ekwisingularności opisaną przez $(\bar{\beta}_0, \ldots, \bar{\beta}_{\mathbf{g}})$, albo mogą występować gałęzie z krótszą charakterystyką $(\bar{\beta}_0/\varepsilon_{\mathbf{g}-1}, \ldots, \bar{\beta}_{\mathbf{g}-1}/\varepsilon_{\mathbf{g}-1})$.

Wzory na $\nu_{\mathbf{J}}(f)$ dla krzywych z dowolną liczbą gałęzi podał Eggers [E]. Do zakodowania klasy ewisingularności zastosował drzewa nazywane dzisiaj drzewami Eggersa. Praca ta długo pozostawała nieznana; została spopularyzowana w [GB]. Z własności drzew Eggersa wynika, że miotła może mieć co najwyżej jedną gałąź o krótszej charakterystyce. W pracach [L2, L3] konstruujemy wariant drzewa Eggersa za pomocą rzędu kontaktu gałęzi.

Uwagi i komentarze

Rozważmy słabszy wariant Definicji (*). Niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną kiełków.

DEFINICJA (**). Mówimy, że klasa ekwisingularności kiełka $f = 0$ jest wyznaczona przez jakobianowy wielokąt Newtona w rodzinie $\mathcal{F}$, jeżeli dla kiełków z $\mathcal{F}$ równość jakobianowych wielokątów Newtona implikuje ekwisingularność kiełków.

Wynik Merla [M] oznacza, że gałęzie posiadają własność wyrażoną w Definicji (**). W pracy [L1] pokazaliśmy, że własność tę posiadają także kiełki jednostyczne niezdegenerowane w sensie Kouchnirenki. Oba rezultaty są uogólnione w pracy [L3]. Wynik sformułowany jest w języku drzew Eggersa.

Literatura na temat jakobianowego wielokąta Newtona podana jest w [GLP].

Literatura

[E] H. Eggers, *Polarinvarianten und die Topologie von Kurvensingularitäten*, Bonner Math. Schriften 147, Universität Bonn, Bonn 1982

[GB] E. García Barroso, *Sur les courbes polaires d'une courbe plane réduite*, Proc. London Math. Soc., III, 81,1 (2000), 1–28.

[GB-G] E. García-Barroso, J. Gwoździewicz, *Characterization of jacobian Newton polygons of plane branches and new criteria of irreducibility*, Annales de l'Institut Fourier 60,2 (2010), 683–709.

[GB-P] E. García-Barroso, A. Płoski, *Sur l'exposant de contact des courbes analytiques planes*, Octobre 2002, Travail en cours.

[GLP] J. Gwoździewicz, A. Lenarcik, A. Płoski, *Polar invariants of plane curve singularities: intersection theoretical approach*, Demonstratio Math. 43(2), (2010) 303–323.

[L1] A. Lenarcik, *On the jacobian Newton polygon of plane curve singularities*, Manuscripta Math., 125 (2008), 309–324.

[L2] A. Lenarcik, *On the Łojasiewicz exponent, special direction and maximal polar quotient*, arXiv:1112.5578v1, Dec 2011

[L3] A. Lenarcik, *Eggers tree and jacobian Newton polygon*, Manuscripta Math. 142 (2013), 233-244.

[LMP] A. Lenarcik, M. Masternak, A. Płoski, *Factorization of the polar curve and the Newton polygon*, Kodai Math. J., vol. 26, n. 3 (2003), 288–303.

[M] M. Merle, *Invariants polaires des courbes planes*, Invent. Math. 41 (1977), 103–111.

[P1] A. Płoski, *Remarque sur la multiplicité d'intersection des branches planes*, Bull. Pol. Acad. Sci. Math. 33(11-12), (1985) 601–605.

[T1] B. Teissier, *Variétés polaires*, Invent. Math. 40 (1977), 267–292.

[T2] B. Teissier, *Polyèdre de Newton Jacobien et équisingularité*, in: Séminaire sur les Singularités, Publ. Math. Univ. Paris VII 7, 1980, 193–221.

ON THE EQUISINGULARITY CLASSES OF PLANE CURVE SINGULARITIES DETERMINED BY THE JACOBIAN NEWTON POLYGON

Summary. For a germ of a plane curve complex isolated singularity we consider the (generic) jacobian Newton polygon introduced by B. Teissier for hypersurfaces. E. García-Barroso and J. Gwoździewicz observed that it is possible to recognize that the singularity has one branch by studying the jacobian Newton polygon. Then it is possible to determine the equisingularity class by using the result of Merle. We announce a generalization of this observation for wider class of singularities which admits more that one branch. We call these singularities "brooms".

Katedra Matematyki i Fizyki
Politechnika Świętokrzyska
Aleja Tysiąclecia Państwa Polskiego 7
25-314 Kielce, Poland
e-mail: ztpal@tu.kielce.pl

Łódź, 11 – 15 stycznia 2016 r.