MATERIAŁY XXVI KONFERENCJI SZKOLENIOWEJ Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ ZESPOLONEJ

2005 **Łódź** **str. 25**

EFEKTYWNE TWIERDZENIE HILBERTA O ZERACH WEDŁUG Z. JELONKA

Andrzej Lenarcik, Arkadiusz Płoski (Kielce)

1 Wstęp

Będziemy rozważali wielomiany o współczynnikach w ciele algebraicznie domkniętym $\mathbf{K}$. Jeżeli $F_i \in \mathbf{K}[X], i = 1, \ldots, k$ jest ciągiem wielomianów zmiennych $X = (X_1, \ldots, X_n)$ takim, że układ równań $F_1 = \ldots = F_k = 0$ nie ma rozwiązania w $\mathbf{K}^n$ to na mocy klasycznego twierdzenia Hilberta o zerach istnieją wielomiany $A_i \in \mathbf{K}[X]$, $i = 1, \ldots, k$ takie, że zachodzi "tożsamość Bezouta"

$$A_1F_1 + \ldots + A_kF_k = 1 \text{ w } \mathbf{K}[X] \, .$$

W roku 1988 János Kollár [2] udowodnił następujące

Efektywne Twierdzenie Hilberta o Zerach
Jeśli układ równań wielomianowych $F_1 = \ldots = F_k = 0$ nie ma rozwiązań w $\mathbf{K}^n$ to istnieją wielomiany $A_1, \ldots, A_k$ takie, że

1. $A_1F_1 + \ldots + A_kF_k = 1$ w $\mathbf{K}[X]$,
2. $\deg(A_iF_i) \leq (\deg F_1) \ldots (\deg F_k)$ dla $i = 1, \ldots, k$.

Kollár udowodnił powyższe twierdzenie stosując wyrafinowane metody współczesnej geometrii algebraicznej przy założeniu, że $\deg F_i > 2$ dla $i = 1, \ldots, k$. Ostatnio Zbigniew Jelonek [1] używając elementarnych środków algebraicznych podał dowód Efektywnego Twierdzenia Hilberta o zerach bez dodatkowych założeń o stopniach wielomianów F_i oraz uogólnił to twierdzenie na przypadek funkcji regularnych na zbiorach algebraicznych. Praca Z. Jelonka zawiera obok przytoczonej wersji twierdzenia o zerach także inne godne uwagi rezultaty podobnego typu. Podstawowym środkiem dowodowym w tej pracy jest uogólnienie pewnego klasycznego twierdzenia Oskara Perrona pochodzącego z 1927 roku. Jest to z pewnością najlepsze podejście do efektywnych twierdzeń geometrii algebraicznej.

Niniejszy artykuł pomyślany jest jako wprowadzenie do pracy [1]. Składa się on z trzech części: najpierw przedstawimy twierdzenie Perrona według [3], następnie omawiamy klasyczne twierdzenie normalizacyjne E. Noether, w końcu podajemy dowód Jelonka Efektywnego Twierdzenia Hilberta o zerach według [1]. Zakładamy, że czytelnik posiada podstawową wiedzę o wielomianach, rozszerzeniach ciał (stopień przestępności) i rozszerzeniach całkowitych. W dowodzie korzysta się również z klasycznego twierdzenia Hilberta o zerach (por. [4] gdzie wyłożone jest to twierdzenie w oparciu o pojęcie rugownika). Inne zastosowania twierdzenia Perrona czytelnik znajdzie w [5].

2 Twierdzenie Perrona

Niech $\mathbf{K}$ będzie dowolnym ciałem. Będziemy rozważać wielomiany o współczynnikach w $\mathbf{K}$. Poniższe twierdzenie pochodzi od O. Perrona ([3], Satz 57, S. 129).

Twierdzenie 2.1 *Niech $F_1, \ldots, F_{n+1} \in \mathbf{K}[X]$ będzie ciągiem $n+1$ wielomianów dodatniego stopnia n zmiennych $X = (X_1, \ldots, X_n)$. Oznaczmy* $\deg F_i = d_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n+1)$. *Wówczas istnieje taki niezerowy wielomian $P = P(Y) \in \mathbf{K}[Y]$, $n+1$ zmiennych $Y = (Y_1, \ldots, Y_{n+1})$, że*

(a) $P(F_1, \ldots, F_{n+1}) = 0$,

(b) *jeżeli* $\operatorname{waga} Y_i = d_i$ *dla* $i = 1, \ldots, n+1$, *to* $\operatorname{waga} P \leq d_1 \ldots d_{n+1}$.

Wielomian P spełniający warunki (a) i (b) będziemy nazywać relacją Perrona pomiędzy wielomianami $F_1, \ldots, F_{n+1}$. Przypomnijmy, że jeżeli $\operatorname{waga} Y_i = d_i$ $(i = 1, \ldots, n+1)$, to $\operatorname{waga}(cY_1^{a_1} \ldots Y_{n+1}^{a_{n+1}}) = a_1 d_1 + \ldots + a_{n+1} d_{n+1}$ (dla $c \in \mathbf{K}^*$) oraz waga niezerowego wielomianu P jest z definicji równa maksimum wag wszystkich jednomianów występujących w P z niezerowymi współczynnikami. Niech $\Delta = \{(a_1, \ldots, a_{n+1}) \in \mathbf{N}^{n+1} : \ d_1 a_1 + \ldots + d_{n+1} a_{n+1} \leq d_1 \ldots d_{n+1}\}$. Relacja Perrona P pomiędzy wielomianami $F_1, \ldots, F_{n+1}$ może być zapisana w postaci

$$P(Y_1, \ldots, Y_{n+1}) = \sum_{(a_1, \ldots, a_{n+1}) \in \Delta} c_{a_1, \ldots, a_{n+1}} Y_1^{a_1} \ldots Y_{n+1}^{a_{n+1}} .$$

Zauważmy, że

$$\deg P \le \frac{\prod_{i=1}^{n+1} d_i}{\min_{i=1}^{n+1} d_i} \le \left(\max_{i=1}^{n+1} d_i\right)^n \ .$$

Dowód twierdzenia Perrona przedstawiamy w kolejnym rozdziale. Zagadnienie wyznaczenia relacji Perrona sprowadza się do rozwiązania układu równań liniowych jednorodnych. Istotnie, rozważmy układ nowych zmiennych

$$C = (C_{a_1,\ldots,a_{n+1}} \,:\, (a_1,\ldots,a_{n+1}) \in \Delta) \ .$$

Niech $\Delta^* = \{(b_1,\ldots,b_n) \in \mathbf{N}^n \,:\, b_1 + \ldots + b_n \le d_1 \ldots d_{n+1}\}$. Wówczas

$$\sum_{(a_1,\ldots,a_{n+1})\in\Delta} C_{a_1,\ldots,a_{n+1}} F_1^{a_1} \ldots F_{n+1}^{a_{n+1}} = \sum_{(b_1,\ldots,b_n)\in\Delta^*} L_{b_1,\ldots,b_n}(C) X_1^{b_1} \ldots X_n^{b_n}$$

w pierścieniu $\mathbf{K}[C,X]$. Z faktu, że wielomiany $L_{b_1,\ldots,b_n}(C)$ są liniowe i jednorodne wynika łatwo

Własność 2.2 *Wielomian* $P = \sum_{(a_1,\ldots,a_{n+1})\in\Delta} c_{a_1,\ldots,a_{n+1}} Y_1^{a_1} \ldots Y_{n+1}^{a_{n+1}}$ *jest relacją Perrona pomiędzy* $F_1,\ldots,F_{n+1}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy układ elementów ciała* $c = (c_{a_1,\ldots,a_{n+1}} \,:\, (a_1,\ldots,a_{n+1}) \in \Delta)$ *jest niezerowym rozwiązaniem jednorodnego układu równań* $L_{b_1,\ldots,b_n}(C) = 0$, $(b_1,\ldots,b_n) \in \Delta^*$.

W ogólności relacja Perrona nie jest określona jednoznacznie przez dany ciąg wielomianów. Jeżeli jednak wśród $F_1,\ldots,F_{n+1}$ występuje n algebraicznie niezależnych wielomianów, to wówczas istnieje dokładnie jeden taki wielomian nierozkładalny $P_0 = P_0(Y_1,\ldots,Y_{n+1})$ (z dokładnością do czynnika w $\mathbf{K}^*$), że $P_0(F_1,\ldots,F_{n+1}) = 0$. Wtedy P_0 nazywamy wielomianem minimalnym dla $F_1,\ldots,F_{n+1}$. Odnotujmy prosty

Wniosek 2.3 *Załóżmy, że w ciągu* $F_1,\ldots,F_{n+1}$ *występuje* n *algebraicznie niezależnych wielomianów. Wówczas wielomian minimalny dla* $F_1,\ldots,F_{n+1}$ *jest relacją Perrona pomiędzy* $F_1,\ldots,F_{n+1}$.

Dowód. Niech P bedzie relacją Perrona pomiędzy $F_1,\ldots,F_{n+1}$. Wówcas P_0 dzieli P i $\operatorname{waga} P_0 \le \operatorname{waga} P \le d_1 \ldots d_{n+1}$.

3 Dowód Twierdzenia Perrona

Niech $F_1,\ldots,F_n$ bedą wielomianami n zmiennych $X = (X_1,\ldots,X_n)$ dodatnich stopni $d_1,\ldots,d_n$ o współczynnikach w rozszerzeniu $\mathbf{L}$ ciała $\mathbf{K}$.

Propozycja 3.1 *Załóżmy, że współczynniki wielomianów są algebraicznie niezależne nad* $\mathbf{K}$. *Wówczas dla każdego wielomianu dodatniego stopnia* $G = G(X) \in \mathbf{L}[X]$ *istnieje taka rodzina wielomianów*

$$G_{r_1,\ldots,r_n}(Y_1,\ldots,Y_n), \quad 0 \le r_i < d_i \ \textit{dla} \ i = 1,\ldots,n \ ,$$

że

(a) $G = \sum G_{r_1,\ldots,r_n}(F_1,\ldots,F_n)X_1^{r_1}\ldots X_n^{r_n}$,

(b) *jeżeli* waga $Y_i = d_i$ *(*$i = 1,\ldots,n$*), to* waga $G_{r_1,\ldots,r_n} + r_1 + \ldots + r_n \le \deg G$.

Dowód. Wystarczy sprawdzić, że dla każdego $N > 0$ rodzina

$$F_1^{a_1}\ldots F_n^{a_n}X_1^{r_1}\ldots X_n^{r_n}\ ,$$

($0 \le r_i < d_i$ dla $i = 1,\ldots,n$ oraz $\sum_{i=1}^n a_id_i + \sum_{i=1}^n r_i \le N$) tworzy bazę liniową przestrzeni $\mathbf{L}[X]_N = \{G \in \mathbf{L}[X] : \deg G \le N\}$. Dla dowolnego ciągu $(l_1,\ldots,l_n) \in \mathbf{N}^n$ połóżmy

$$Q_{l_1,\ldots,l_n} = F_1^{a_1}\ldots F_n^{a_n}X_1^{r_1}\ldots X_n^{r_n}\ ,$$

gdzie a_i nad r_i są określone warunkami $l_i = a_id_i + r_i$, $0 \le r_i < d_i$. Jest jasne, że odwzorowanie $(l_1,\ldots,l_n) \to (a_1,\ldots,a_n,r_1,\ldots,r_n)$ indukuje bijekcję zbiorów $\{(l_1,\ldots,l_n) : \sum_{i=1}^n l_i \le N\}$ i $\{(a_1,\ldots,a_n,r_1,\ldots,r_n) : \sum_{i=1}^n a_id_i + \sum_{i=1}^n r_i \le N$ and $0 \le r_i < d_i$ dla $i = 1,\ldots,n\}$. Dlatego wystarczy pokazać, że rodzina $(Q_{l_1,\ldots,l_n} : \sum_{i=1}^n l_i \le N)$ jest bazą liniową dla $\mathbf{L}[X]_N$. Wynika to z następujących obserwacji:

1. $Q_{l_1,\ldots,l_n} \in \mathbf{L}[X]$ ma stopień $\sum_{i=1}^n l_i$,

2. współczynniki wielomianu $Q_{l_1,\ldots,l_n}$ leżą w pierścieniu R współczynników wielomianów $F_1,\ldots,F_n$. Jeżeli $G \to \bar{G}$ jest taką specjalizacją $R[X]$ w $\mathbf{K}[X]$, że $\bar{F}_1 = X_1^{d_1},\ldots,\bar{F}_n = X_n^{d_n}$, to $\bar{Q}_{l_1,\ldots,l_n} = X_1^{l_1}\ldots X_n^{l_n}$.

3. Jeżeli D jest wyznacznikiem rodziny $(Q_{l_1,\ldots,l_n} : \sum_{i=1}^n l_i \le N)$ względem bazy liniowej $(X_1^{k_1}\ldots X_n^{k_n} : \sum_{i=1}^n k_i \le N)$ przestrzeni $\mathbf{L}[X]_N$ (w $\mathbf{N}^n$ rozważamy porządek leksykograficzny), wówczas $\bar{D} \ne 0$, a więc również $D \ne 0$.

Propozycja 3.2 *Załóżmy, że współczynniki wielomianów $F_1,\ldots,F_n$ są algebraicznie niezależne nad* $\mathbf{K}$. *Niech $d = \prod_{i=1}^n d_i$. Wówczas dla każdego wielomianu F_{n+1} stopnia $d_{n+1} > 0$ istnieje wielomian $P = Y_{n+1}^d + \sum_{i=1}^d P_i(Y_1,\ldots,Y_n)Y_{n+1}^{d-i}$ taki, że $P(F_1,\ldots,F_n,F_{n+1}) = 0$ oraz* waga $P \le \prod_{i=1}^{n+1} d_i$ *jeżeli* waga $Y_i = d_i$ *(*$i = 1,\ldots,n+1$*).*

Dowód. Niech $M_0 = 1$, …, $M_{d-1} = X_1^{d_1-1}\ldots X_n^{d_n-1}$ będzie ciągiem jednomianów $X_1^{r_1}\ldots X_n^{r_n}$, $0 \le r_i < d_i$ $(i = 1,\ldots,n)$. Z Propozycji 3.2 istnieją takie wielomiany $P_{ij} = P_{ij}(Y_1,\ldots,Y_n)$, że

(a) $M_iF_{n+1} = \sum_{j=0}^{d-1} P_{ij}(F_1,\ldots,F_n)M_j$ dla $i = 0,\ldots,d-1$,

(b) jeżeli waga $Y_i = d_i$ $(i = 1,\ldots,n)$, to waga $P_{ij} + \deg M_j \le \deg M_i + d_{n+1}$.

Ze wzorów Cramera otrzymujemy

(c) $\det(P_{ij}(F_1,\ldots,F_n) - \delta_{ij}F_{n+1}) = 0$.

Niech $P(Y_1,\dots,Y_{n+1}) = (-1)^d \det(P_{ij}(Y_1,\dots,Y_n) - \delta_{ij}Y_{n+1})$. Wówczas $P = Y_{n+1}^d + \sum_{i=1}^d P_i(Y_1,\dots,Y_n)Y_{n+1}^{d-i}$ oraz $P(F_1,\dots,F_n,F_{n+1}) = 0$. Niech waga $Y_{n+1} = d_{n+1}$. Aby oszacować wagę P połóżmy $\tilde{P}_{ij} = P_{ij} - \delta_{ij}Y_{n+1}$. Wobec warunku (b) mamy waga $\tilde{P}_{ij} \leq d_{n+1} + \deg M_i - \deg M_j$ oraz waga$(\pm\tilde{P}_{0,j_0}\dots\tilde{P}_{d-1,j_{d-1}}) \leq (d_{n+1}+\deg M_0 - \deg M_{j_0}) + \dots + (d_{n+1}+\deg M_{d-1} - \deg M_{j_{d-1}}) = d_{n+1}d = \prod_{i=1}^{n+1} d_i$ dla każdej permutacji $(j_0,\dots,j_{d-1})$ zbioru $(0,1,\dots,d-1)$. Zatem waga P = waga$(\sum \pm P_{0,j_0}\dots P_{d-1,j_{d-1}}) \leq \prod_{i=1}^{n+1} d_i$.

Z Propozycji 3.2 wynika, że twierdzenie Perrona jest prawdziwe dla wielomianów z algebraicznie niezależnymi współczynnikami. Wynika stąd prawdziwość twierdzenia w dowolnym przypadku. Aby to uzasadnić, ustalmy ciąg całkowitych dodatnich $d_1,\dots,d_{n+1}$ i niech $\Delta = \{(a_1,\dots,a_{n+1}) \in \mathbf{N}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} a_i d_i \leq d_1\dots d_{n+1}\}$. Dla dowolnego ciągu wielomianów $F_1,\dots,F_{n+1}$ o stopniach $d_1,\dots,d_{n+1}$ zdefiniujmy $M(F_1,\dots,F_{n+1})$ jako macierz rodziny $(F_1^{a_1}\dots F_{n+1}^{a_{n+1}} : (a_1,\dots,a_{n+1}) \in \Delta)$ względem bazy $(X_1^{k_1}\dots X_n^{k_n} : \sum_{i=1}^n k_i \leq d_1\dots d_{n+1})$. Twierdzenie Perrona jest prawdziwe dla $F_1,\dots,F_{n+1}$ wtedy i tylko wtedy, gdy wielomiany $F_1^{a_1}\dots F_{n+1}^{a_{n+1}}$ stopni mniejszych lub równych $\prod_{i=1}^{n+1} d_i$ są liniowo niezależne, co jest równoważne warunkowi rząd $M(F_1,\dots,F_{n+1}) < \operatorname{card}\Delta$.

Jeżeli $F_1\dots,F_{n+1}$ są wielomianami o algerbraicznie niezależnych współczynnikach, to na mocy Propozycji 3.2 rząd $M(F_1,\dots,F_{n+1}) < \operatorname{card}\Delta$. Rozważmy specjalizacje $\bar{F}_1,\dots,\bar{F}_{n+1}$ wielomianów $F_1,\dots,F_{n+1}$. Wówczas $M(\bar{F}_1,\dots,\bar{F}_{n+1}) = \overline{M(F_1,\dots,F_{n+1})}$, skąd rząd $M(\bar{F}_1,\dots,\bar{F}_{n+1}) < \operatorname{card}\Delta$, co dowodzi twiedzenia Perrona dla $\bar{F}_1,\dots,\bar{F}_{n+1}$.

4 Twierdzenie normalizacyjne E. Noether

Zakładamy, że $\mathbf{K}$ jest ciałem nieskończonym. Dowód podanego niżej (dobrze znanego) lematu pozostawiamy Czytelnikowi.

Lemat 4.1 *Niech $P = P(X)$, $X = (X_1,\dots,X_n)$ będzie wielomianem stopnia $N > 0$ o współczynnikach w nieskończonym ciele $\mathbf{K}$. Wtedy istnieją elementy $a_1,\dots,a_{n-1} \in \mathbf{K}$ takie, że $P(X_1 + a_1X_n,\dots,X_{n-1}+a_{n-1}X_n,X_n) = cX_n^N + \dots$ (jednomiany stopnia $< N$ względem X_n) dla pewnego $c \neq 0$.*

Możemy teraz podać dowód twierdzenia normalizacyjnego w postaci niezbędnej dla naszych celów.

Twierdzenie 4.2 *Niech $A = \mathbf{K}[x_1,\dots,x_n]$ będzie skończenie generowaną $\mathbf{K}$-algebrą. Wtedy istnieją stałe $c_{ij} \in \mathbf{K}$, $1 \leq i < j \leq n$, $i = 1,\dots,d$, $d \leq n$ takie, że elementy*

$$\begin{array}{ll} y_1 = & x_1 + c_{12}x_2 + \dots \dots + c_{1n}x_n \\ y_2 = & \quad\;\; x_2 \;+\; \dots \dots + c_{2n}x_n \\ \dots & \\ y_d = & \qquad\qquad x_d + \dots + c_{dn}x_n \end{array}$$

mają następujące własności:

1. *$y_1,\dots,y_d$ są algebraicznie niezależne nad $\mathbf{K}$,*

2. Rozszerzenie $A \supset \mathbf{K}[y_1, \ldots, y_d]$ jest rozszerzeniem całkowitym.

Jeżeli A jest dziedziną, to liczba d jest stopniem przestępności ciała ułamków A nad ciałem $\mathbf{K}$.

Dowód (indukcja względem liczby n generatorów algebry A).
Gdy $n = 1$ twierdzenie jest oczywiste. Załóżmy więc, że $n > 1$ i że twierdzenie jest prawdziwe dla algebr generowanych przez $n-1$ elementów. Rozważmy algebrę $A = \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Gdy $x_1, \ldots, x_n$ są algebraicznie niezależne and $\mathbf{K}$, to wystarczy przyjąć $d = n$ oraz $y_i = x_i$ dla $i = 1, \ldots, d$. Załóżmy zatem, że elementy $x_1, \ldots, x_n$ są algebraicznie zależne nad $\mathbf{K}$. Stosując lemat stwierdzamy, że istnieją stałe $a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbf{K}$ takie, że $A \supset \mathbf{K}[\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{n-1}]$, gdzie $\tilde{x}_i = x_i + a_i x_n$ dla $i = 1, \ldots, n-1$, jest rozszerzeniem całkowitym. Jeżeli $\tilde{x}_i$ są algebraicznie niezależne, to przyjmujemy $d = n-1$ oraz $y_i = \tilde{x}_i$ dla $i = 1, \ldots, n-1$. Jeżeli $\tilde{x}_i$ są algebraicznie zależne, to stosujemy założenie indukcyjne do algebry $\tilde{A} = \mathbf{K}[\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{n-1}]$. Istnieją więc elementy $y_i = \tilde{x}_i + c_{i,i+1}\tilde{x}_{i+1} + \ldots + c_{i,n-1}\tilde{x}_{n-1}$ $(i = 1, \ldots, d)$ algebraicznie niezależne takie, że $\tilde{A}$ jest rozszerzeniem całkowitym $\mathbf{K}[y_1, \ldots, y_d]$. Na mocy tranzytywności rozszerzeń całkowitych również A jest rozszerzeniem całkowitym $\mathbf{K}[y_1, \ldots, y_d]$. Wystarczy teraz zauważyć, że $y_i = x_i + c_{i1}x_{i+1} + \ldots + c_{in}x_n$ dla $i = 1, \ldots, d$, gdzie $c_{in} = a_i + \ldots + a_n$. Na koniec załóżmy, że A jest dziedziną i niech $\mathbf{L}$ będzie ciałem ułamków dziedziny A. Zatem $\mathbf{L}$ jest rozszerzeniem algebraicznym ciała $\mathbf{K}(y_1, \ldots, y_d)$ izomorficznego z ciałem funkcji wymiernych d zmiennych. Wynika stąd, że stopień przestępności $\mathbf{L}$ nad $\mathbf{K}$ jest równy d.

5 Dowód efektywnego twierdzenia o zerach

Dowód (Z. Jelonek). Możemy przyjąć, że $k \leq n$, bo każdy wielomian n zmiennych można uważać za wielomian większej liczby zmiennych. Załóżmy, że $d_1 \geq \ldots \geq d_k$ oraz połóżmy $d_{k+1} = \ldots = d_{n+1} = 1$. Niech Z będzie nową zmienną. Korzystając z klasycznego twierdzenia o zerach sprawdzamy, że $\mathbf{K}[ZF_1, \ldots, ZF_k, X] = \mathbf{K}[X, Z]$. Istotnie, z warunku $1 = A_1F_1 + \ldots + A_kF_k$ wynika $Z = A_1(ZF_1) + \ldots + A_k(ZF_k) \in \mathbf{K}[ZF_1, \ldots, ZF_n, X]$. Z twierdzenia normalizacyjnego zastosowanego do algebry wielomianów $\mathbf{K}[X, Z]$ i jej generatorów $ZF_1, \ldots, ZF_k, X$ otrzymujemy takie stałe $c_{ij} \in \mathbf{K}$, że

(α) wielomiany

$$\begin{array}{ll}
\psi_1 & = ZF_1 + c_{12}ZF_2 + \ldots + c_{1k}ZF_k + c_{1,k+1}X_1 + \ldots\ldots + c_{1,k+n}X_n \\
\psi_2 & = ZF_2 + \ldots + c_{2k}ZF_k + c_{2,k+1}X_1 + \ldots\ldots + c_{2,k+n}X_n \\
\ldots & \\
\psi_k & = ZF_k + c_{k,k+1}X_1 + \ldots\ldots + c_{k,k+n}X_n \\
\psi_{k+1} & = X_1 + \ldots\ldots + c_{k+1,k+n}X_n \\
\ldots & \\
\psi_{n+1} & = X_{n-k+1} + \ldots + c_{n+1,k+n}X_n
\end{array}$$

są algebraicznie niezależne.

(β) Rozszerzenie $\mathbf{K}[X,Z] \supset \mathbf{K}[\psi_1,\ldots,\psi_{n+1}]$ jest całkowite.

Oznaczmy dla skrócenia notacji $F_1^* = F_1 + c_{12}F_2 + \ldots + c_{1k}F_k$, $F_2^* = F_2 + c_{23}F_3 + \ldots + c_{1k}F_k$, $\ldots$,$F_k^* = F_k$ oraz $L_i = c_{i,k+1}X_1 + \ldots + c_{i,k+n}X_n$ dla $i = 1,\ldots,k$ oraz $L_i = \psi_i$ dla $i > k$. Wówczas $\psi_1 = ZF_1^* + L_1$, $\ldots$, $\psi_k = ZF_k^* + L_k$, $\psi_{k+1} = L_{k+1}$, $\ldots$, $\psi_{k+n} = L_{k+n}$. Wystarczy wykazać prawdziwości twierdzenia dla układu $F_1^* = \ldots = F_k^* = 0$.

Rozważmy wielomiany $\psi_1,\ldots,\psi_{n+1}$ jako elementy pierścienia $\mathbf{K}(Z)[X]$. Na mocy Twierdzenia 2.1 istnieje relacja Perrona $\tilde{P}(T_1,\ldots,T_{n+1})$ pomiędzy $\psi_1,\ldots,\psi_{n+1}$. Jest to wielomian o współczynnikach w $\mathbf{K}(Z)$ spełniający warunek waga $\tilde{P} \le d_1 \ldots d_{n+1}$, gdy waga $T_i = d_i$ dla $i = 1,\ldots,n+1$. Mnożąc wielomian $\tilde{P}$ przez wspólny mianownik współczynników możemy założyć, że $\tilde{P} \in \mathbf{K}[Z][T_1,\ldots,T_{n+1}]$.

Niech $P(T_1,\ldots,T_{n+1},T_{n+2}) \in \mathbf{K}[T_1,\ldots,T_{n+2}]$ będzie wielomianem minimalnym dla $\psi_1,\ldots,\psi_{n+1}$ i $\psi_{n+2} = Z$. Oczywiście P dzieli wielomian $\tilde{P}$, a więc $P(T_1,\ldots,T_{n+1},Z)$ jest relacją Perrona (waga $T_i = d_i$ dla $i = 1,\ldots,n+1$) pomiędzy wielomianami $\psi_1,\ldots,\psi_{n+1} \in \mathbf{K}(Z)[X]$. Z drugiej strony wielomian $P(T_1,\ldots,T_{n+2})$ jest moniczny względem T_{n+2}, gdyż ψ_{n+2} jest całkowity nad $\mathbf{K}[\psi_1,\ldots,\psi_{n+1}]$. Mamy

$$P = T_{n+2}^N + P_1(T_1,\ldots,T_{n+1})T_{n+2}^{N-1} + \ldots + P_N(T_1,\ldots,T_{n+1})\ ,$$

zatem

(1) $Z^N + P_1(\psi_1,\ldots,\psi_{n+1})Z^{N-1} + \ldots + P_N(\psi_1,\ldots,\psi_{n+1}) = 0$,

(2) $P_\nu(\psi_1,\ldots,\psi_{n+1})$ jest $\mathbf{K}-$liniową kombinacją wielomianów $\psi_1^{\alpha_1}\ldots\psi_{n+1}^{\alpha_{n+1}}$, $\sum \alpha_i d_i \le d_1 \ldots d_n$.

Niech $[Q]_\nu$ oznacza współczynnik przy Z^ν wielomianu Q. Z (1) otrzymujemy

(3) $1 + [P_1(\psi_1,\ldots,\psi_{n+1})]_1 + \ldots + [P_N(\psi_1,\ldots,\psi_{n+1})]_N = 0$.

Z (2) mamy

(4) $[P_\nu(\psi_1,\ldots,\psi_{n+1})]_\nu$ jest kombinacją liniową $[\psi_1^{\alpha_1},\ldots,\psi_{n+1}^{\alpha_{n+1}}]_\nu$, $\sum \alpha_i d_i \le d_1 \ldots d_k$.

Z drugiej strony łatwo obliczamy, że

(5) $[\psi_1^{\alpha_1},\ldots,\psi_{n+1}^{\alpha_{n+1}}]_\nu = \displaystyle\sum_{i_1+\ldots+i_k=\nu} \binom{\alpha_1}{i_1}\ldots\binom{\alpha_k}{i_k}(F_1^*)^{i_1}\ldots(F_k^*)^{i_k}L_1^{\alpha_1-i_1}\ldots L_k^{\alpha_k-i_k}\ldots L_{n+1}^{\alpha_{n+1}}$.

Mamy (dla ustalonych $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1}$, $\sum \alpha_i d_i \le d_1 \ldots d_k$):

$$\begin{aligned}&\deg (F_1^*)^{i_1}\ldots(F_k^*)^{i_k}L_1^{\alpha_1-i_1}\ldots L_k^{\alpha_k-i_k}L_{k+1}^{\alpha_{k+1}}\ldots L_n^{\alpha_{n+1}}\\ \le\, & i_1d_1 + \ldots + i_kd_k + (\alpha_1 - i_1)d_1 + \ldots + (\alpha_k - i_k)d_k + \alpha_{k+1} + \ldots + \alpha_{n+1}\\ \le\, & d_1 \ldots d_k\ .\end{aligned}$$

Z (4) i (5) wynika, że relacja (3) może być zapisana w postaci

$$1 + \sum_{i_1+\ldots+i_k>0} H_{i_1\ldots i_k}(F_1^*)^{i_1}\ldots(F_k^*)^{i_k} = 0, \qquad H_{i_1\ldots i_k} \in \mathbf{K}[X]$$

oraz $\deg\left(H_{i_1\ldots i_k}(F_1^*)^{i_1}\ldots(F_k^*)^{i_k}\right) \le d_1\ldots d_k$. Stąd łatwo otrzymujemy szukaną tożsamość Bezouta.

Uwaga. Udowodnione twierdzenie jest optymalne, gdy $k \le n$. Gdy $k > n$, oszacowanie dla stopni współczynników można wzmocnić [1], [2].

Bibliografia

[1] Z. Jelonek, *On the Łojasiewicz exponent and effective Nullstellensatz*, Preprint 641, Polish Acad. Sci. Math., June 2003.

[2] J. Kollar, *Sharp effective Nullstellensatz*, J. Amer. Math. Soc. 1 (1988), 963–975.

[3] O. Perron, *Algebra I (Die Grundlagen)*, Göschens Lehrbücherei, Berlin und Leipzig 1927.

[4] A. Płoski, *Efektywne Twierdzenie o Zerach*, Materiały XVIII Konferencji Szkoleniowej z Geometrii Analitycznej i Algebraicznej Zespolonej, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź 1997, str. 45–51.

[5] A. Płoski, *Algebraic Dependence of Polynomials after O. Perron and some applications* (to appear).

Effective Hilbert's Nullstellensatz after Z. Jelonek

In the paper we present Z. Jelonek's proof of the effective Nullstellensatz based on Perron's theorem on algebraic dependence of polynomials.

Łódź, 10 – 14 stycznia 2005 r.