Asymptotyczne niezmienniki multiplikatywnej rodziny ideałów jednorodnych

Grzegorz Malara

Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie

XXXVIII KONFERENCJA I WARSZTATY

"GEOMETRIA ANALITYCZNA I ALGEBRAICZNA"

9-13 stycznia 2017, Łódź

Notacja: Przez $S(n)$ oznaczamy pierścień wielomianów $n+1$ zmiennych nad ciałem $\mathbb{K}$ ($\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 0$).

Definicja.

Ideałem jednomianowym nazywamy ideał generowany przez jednomiany, a więc wyrażenia postaci $x^\alpha = x_0^{\alpha_0} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$.

Notacja: Przez $S(n)$ oznaczamy pierścień wielomianów $n+1$ zmiennych nad ciałem $\mathbb{K}$ ($\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 0$).

Definicja.

Ideałem jednomianowym nazywamy ideał generowany przez jednomiany, a więc wyrażenia postaci $x^\alpha = x_0^{\alpha_0} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$.

Definicja.

Dla każdego wielomianu $f = \sum c_\alpha x^\alpha \in S(n)$ oznaczamy,

$$\mathrm{in}(f) := \max\{x^\alpha \ : \ c_\alpha \neq 0\}.$$

Ideałem inicjującym ideału jednorodnego I nazywamy ideał jednomianowy generowany przez zbiór

$$\mathrm{in}(I) := \Big(\{\mathrm{in}(f) : f \in I\}\Big).$$

Przykłady.

Ideały

1. $I = (x^2, y^2) = \mathrm{in}(I)$,
2. $I_1 = (x, y^4) = \mathrm{in}(I_1)$,
3. $I_2 = (x^2, xy^4, y^8) = \mathrm{in}(I_2)$,

są jednomianowe.

Uwaga.

Nie zawsze $\mathrm{in}(I)$ jest generowany przez $\mathrm{in}(f)$ wielomianów f należących do minimalnego zbioru generatorów.
Dla $I = (x^2 + 3xy, 2x^2 + y^2) = (f_1, f_2)$ otrzymujemy $xy \notin (x^2)$, ale $2f_1 - f_2 = -y^2 + 6xy \in I$, zatem $xy \in \mathrm{in}(I)$.

Problem:

Ideał inicjujący jest niestabilny przy zmianie współrzędnych.

Np. dla $I = (x^2, y^2) = \mathrm{in}(I) \subset S(2)$, oraz dla zmiany współrzędnych

$$x \to x, \quad y \to x + y,$$

$$\mathrm{in}\Big((x^2, (x+y)^2)\Big) = (x^2, xy, y^3) \neq \mathrm{in}(I).$$

Problem:

Ideał inicjujący jest niestabilny przy zmianie współrzędnych.

Np. dla $I = (x^2, y^2) = \mathrm{in}(I) \subset S(2)$, oraz dla zmiany współrzędnych

$$x \to x, \quad y \to x + y,$$

$$\mathrm{in}\Big((x^2, (x+y)^2)\Big) = (x^2, xy, y^3) \neq \mathrm{in}(I).$$

Rozwiązanie problemu (Galligo'74):

Generycznym ideałem inicjującym ideału I nazywamy ideał $\mathrm{in}(g(I))$, oznaczany jako $\mathrm{gin}(I)$, dla odwzorowań g z pewnego podzbioru otwartego zawartego w $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Przykład.

Dla $I = (x^2, y^2) \subset S(2)$, odwrotnego porządku stopniowo leksykograficznego oraz $g = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, podstawiamy

$$x \longrightarrow ax + by, \quad y \longrightarrow cx + dy.$$

Wtedy

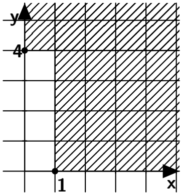
$$g(I) = ((ax+by)^2, (cx+dy)^2) = (2acxy + (ad+bc)y^2,\ acx^2 - bdy^2,\ y^3).$$

Zatem $\mathrm{gin}(I) = (x^2, xy, y^3)$.

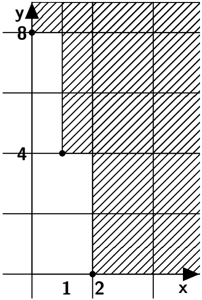
Zgodnie z ideą pochodzącą od Newtona, dla każdego ideału jednorodnego przyporządkowujemy diagram Newtona.

Zgodnie z ideą pochodzącą od Newtona, dla każdego ideału jednorodnego przyporządkowujemy diagram Newtona.

$I_1 = (x, y^4) \subset S(2) \qquad \Longrightarrow$



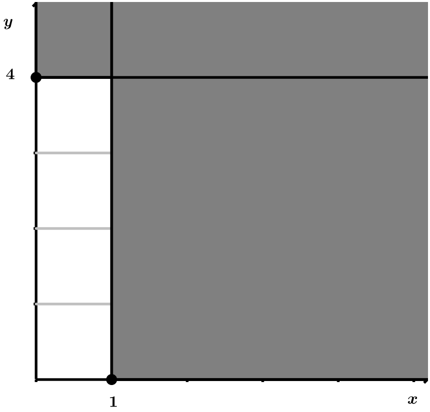
$I_2 = (x^2, xy^4, y^8) \subset S(2) \qquad \Longrightarrow$



Uogólnienie (Lazarsfeld, Kaveh, Khovanski, Mustata, Smith)

$I_\bullet = \{I^{(m)}\}_m \subset S(n)$.

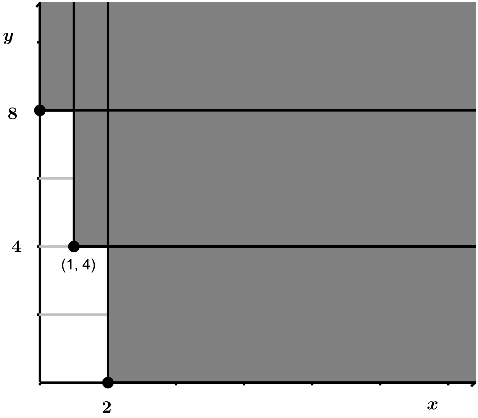
- $\mathrm{gin}(I) = I_1 = (x, y^4) \to P_1$;



Uogólnienie (Lazarsfeld, Kaveh, Khovanski, Mustata, Smith)

$I_\bullet = \{I^{(m)}\}_m \subset S(n)$.

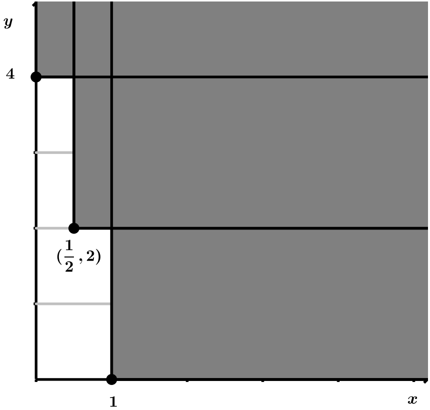
- $\mathrm{gin}(I) = I_1 = (x, y^4) \to P_1$;
- $\mathrm{gin}(I^{(2)}) = I_2 = (x^2, xy^4, y^8) \to P_2$;



Uogólnienie (Lazarsfeld, Kaveh, Khovanski, Mustata, Smith)

$I_\bullet = \{I^{(m)}\}_m \subset S(n)$.

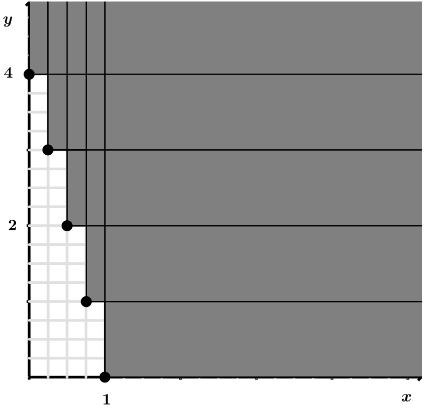
- $\mathrm{gin}(I) = I_1 = (x, y^4) \longrightarrow P_1$;
- $\mathrm{gin}(I^{(2)}) = I_2 = (x^2, xy^4, y^8) \longrightarrow \frac{P_2}{2}$;



Uogólnienie (Lazarsfeld, Kaveh, Khovanski, Mustata, Smith)

$I_\bullet = \{I^{(m)}\}_m \subset S(n)$.

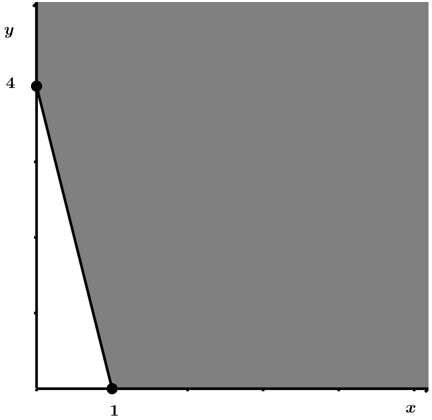
- $\mathrm{gin}(I) = I_1 = (x, y^4) \to P_1$;
- $\mathrm{gin}(I^{(2)}) = I_2 = (x^2, xy^4, y^8) \to \frac{P_2}{2}$;
- $\mathrm{gin}(I^{(3)}) = I_3 = (x^3, x^2y^4, xy^8, y^{12}) \to \frac{P_3}{3}$;



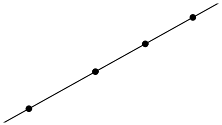
Uogólnienie (Lazarsfeld, Kaveh, Khovanski, Mustata, Smith)

$I_\bullet = \{I^{(m)}\}_m \subset S(n)$.

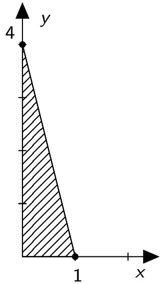
- $\mathrm{gin}(I) = I_1 = (x, y^4) \longrightarrow P_1$;
- $\mathrm{gin}(I^{(2)}) = I_2 = (x^2, xy^4, y^8) \longrightarrow \frac{P_2}{2}$;
- $\mathrm{gin}(I^{(3)}) = I_3 = (x^3, x^2y^4, xy^8, y^{12}) \longrightarrow \frac{P_3}{3}$;
- $\mathrm{gin}(I^{(m)}) \longrightarrow \frac{P_m}{m}$;

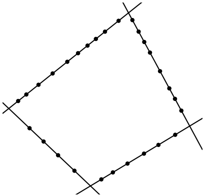


Kształtem granicznym nazywamy $\Delta(I_\bullet) := \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} \frac{P_i}{i}}$.

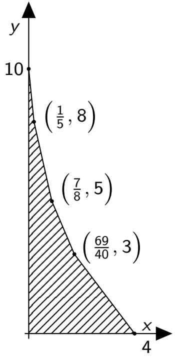


$\Longrightarrow$





$\Longrightarrow$



Własności kształtów granicznych

Dla rodziny $I_\bullet = \{I^{(m)}\}_m \subset S(n)$

- stała Waldschmidt'a,

$$\widehat{\alpha}(I_\bullet) := \lim_{m\to\infty} \frac{\alpha(I^{(m)})}{m},$$

  gdzie $\alpha(I) := \min\{d : I_d \neq 0\}$.

Własności kształtów granicznych

Dla rodziny $I_\bullet = \{I^{(m)}\}_m \subset S(n)$

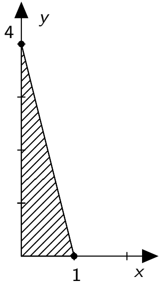
- stała Waldschmidt'a,

$$\widehat{\alpha}(I_\bullet) := \lim_{m\to\infty} \frac{\alpha(I^{(m)})}{m},$$

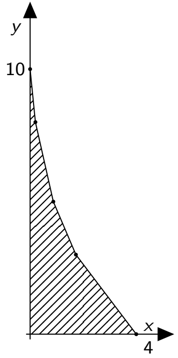
  gdzie $\alpha(I) := \min\{d : I_d \neq 0\}$.

- asymptotyczna regularność,

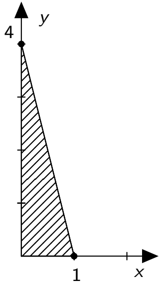
$$\widehat{\mathrm{reg}}(I_\bullet) := \lim_{m\to\infty} \frac{\mathrm{reg}(I^{(m)})}{m}.$$

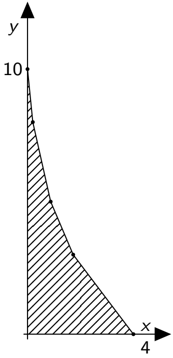


y
4
1
x



y
10
x
4





Dalsze uogólnienia

Multiplikatywną rodziną ideałów nazywamy rodzinę ideałów $\{I_m\}_{m\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}}$ taką, że dla wszystkich $p, q \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ zachodzi $I_p \cdot I_q \subseteq I_{p+q}$.

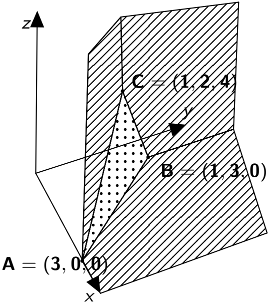
Twierdzenie

Dla generycznych ideałów inicjujących multliplikatywnej rodziny ideałów $I_\bullet = \{\mathrm{gin}(I_m)\}_m$,

$$\widehat{\alpha}(I_\bullet) = \min\{|x| \ : \ x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \text{ jest pkt ekst. } \Delta(I_\bullet)\} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Jeśli $\widehat{\mathrm{reg}}(I_\bullet)$ istnieje, to $\widehat{\mathrm{reg}}(I_\bullet) =$

$$= \sup\{|x| \ : \ x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \text{ jest pkt ekst. } \Delta(I_\bullet)\} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$



Klasyfikacja symptotycznych niezmienników multiplikatywnej rodziny ideałów jednorodnych

- numeryczne:
  - $\widehat{\alpha}(I_\bullet) := \lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{\alpha(I_m)}{m}$,
  - $\widehat{\mathrm{ri}}(I_\bullet) := \lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{\mathrm{ri}(I_m)}{m}$,
  - $\widehat{\mathrm{reg}}(I_\bullet) := \lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{\mathrm{reg}(I_m)}{m}$.

Klasyfikacja symptotycznych niezmienników multiplikatywnej rodziny ideałów jednorodnych

- numeryczne:
  - $\widehat{\alpha}(I_\bullet) := \lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{\alpha(I_m)}{m}$,
  - $\widehat{\mathrm{ri}}(I_\bullet) := \lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{\mathrm{ri}(I_m)}{m}$,
  - $\widehat{\mathrm{reg}}(I_\bullet) := \lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{\mathrm{reg}(I_m)}{m}$.
- funkcyjne:
  - $\mathrm{aHF}_{I_\bullet}(t) := \lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{\mathrm{HF}_{I_m}(\lfloor mt \rfloor)}{m^n}$,
  - $\mathrm{aHP}_{I_\bullet}(t) := \lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{\mathrm{HP}_{I_m}(mt)}{m^n}$.

Klasyfikacja symptotycznych niezmienników multiplikatywnej rodziny ideałów jednorodnych

- numeryczne:
  - $\widehat{\alpha}(I_\bullet) := \lim_{m\to\infty} \frac{\alpha(I_m)}{m}$,
  - $\widehat{\mathrm{ri}}(I_\bullet) := \lim_{m\to\infty} \frac{\mathrm{ri}(I_m)}{m}$,
  - $\widehat{\mathrm{reg}}(I_\bullet) := \lim_{m\to\infty} \frac{\mathrm{reg}(I_m)}{m}$.
- funkcyjne:
  - $\mathrm{aHF}_{I_\bullet}(t) := \lim_{m\to\infty} \frac{\mathrm{HF}_{I_m}(\lfloor mt \rfloor)}{m^n}$,
  - $\mathrm{aHP}_{I_\bullet}(t) := \lim_{m\to\infty} \frac{\mathrm{HP}_{I_m}(mt)}{m^n}$.
- obszarowe

Dziękuję za uwagę!