Krzywe niespodziewane typu $(d + k, d)$

Grzegorz Malara

(praca wspólna z Halszką Tutaj-Gasińską)

Uniwersytet Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie

23 stycznia 2024

Hipoteza SHGH

- $S = \mathbb{C}[\mathbb{P}^N]$,
- $Z = m_1 P_1 + \ldots + m_s P_s,\ I(Z) = I(P_1)^{m_1} \cap \ldots \cap I(P_s)^{m_s}$,
- $\dim_{\mathbb{C}}\left([I(Z)]_t\right) \geq \max\left\{\binom{t+N}{t} - \sum_{j=1}^{s}\binom{m_j+N-1}{N}, 0\right\}.$

Hipoteza SHGH

- $S = \mathbb{C}[\mathbb{P}^N]$,
- $Z = m_1 P_1 + \ldots + m_s P_s$, $I(Z) = I(P_1)^{m_1} \cap \ldots \cap I(P_s)^{m_s}$,
- $\dim_{\mathbb{C}} \left([I(Z)]_t\right) \geq \max\left\{ \binom{t+N}{t} - \sum_{j=1}^{s} \binom{m_j+N-1}{N}, 0 \right\}$.

$$F \in I(Z) \Leftrightarrow \frac{\partial^{i_0+\ldots+i_N} F}{\partial^{i_0} x_0 \cdots \partial^{i_N} x_N}(P_i) = 0,\ i_0 + \ldots + i_N \leq m_j - 1.$$

Hipoteza SHGH

- $S = \mathbb{C}[\mathbb{P}^N]$,
- $Z = m_1 P_1 + \ldots + m_s P_s$, $I(Z) = I(P_1)^{m_1} \cap \ldots \cap I(P_s)^{m_s}$,
- $\dim_{\mathbb{C}} ([I(Z)]_t) \geq \max\left\{ \binom{t+N}{t} - \sum_{j=1}^{s} \binom{m_j+N-1}{N}, 0 \right\}$.

$$F \in I(Z) \Leftrightarrow \frac{\partial^{i_0+\ldots+i_N} F}{\partial^{i_0} x_0 \cdots \partial^{i_N} x_N}(P_i) = 0,\ i_0 + \ldots + i_N \leq m_j - 1.$$

Problem

Dla $N = 2$ scharakteryzować takie Z, t, że

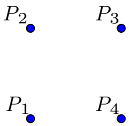
$$\dim_{\mathbb{C}} ([I(Z)]_t) > \max\left\{ \binom{t+2}{t} - \sum_{i=1}^{s} \binom{m_i+1}{2}, 0 \right\}.$$

Hipoteza SHGH

Hipoteza (Segre '61)

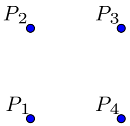
Niech Z będzie schematem w $\mathbb{P}^2$ punktów w pozycji ogólnej $P_1, \ldots, P_s$. Jeśli $\dim\left([I(Z)]_t\right) > \max\left\{\binom{t+2}{t} - \sum_{i=1}^{s}\binom{m_i+1}{2}, 0\right\}$, to istnieje nierozkładalny wielomian F taki, że $F^2 \mid G$ dla każdego $G \in [I(Z)]_t$.

Przykład



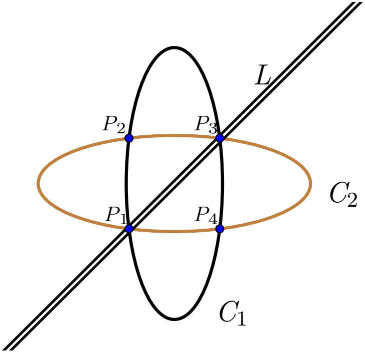
$$Z = 3P_1 + P_2 + 3P_3 + P_4 \subset \mathbb{P}^2$$

Przykład



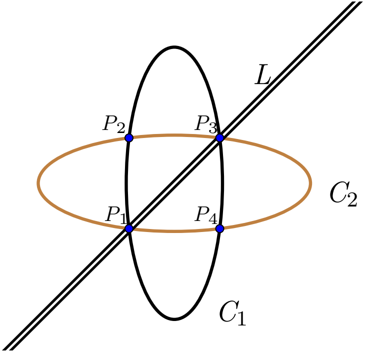
$$Z = 3P_1 + P_2 + 3P_3 + P_4 \subset \mathbb{P}^2$$
$$\dim[I(Z)]_4 \geq \max\left\{0, \binom{4+2}{2} - 2\binom{3+1}{2} - 2\binom{2}{2}\right\} = 1$$

Przykład



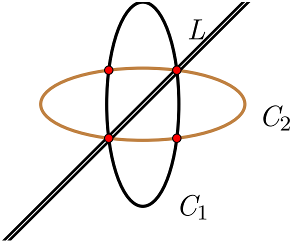
$$Z = 3P_1 + P_2 + 3P_3 + P_4 \subset \mathbb{P}^2$$
$$\dim[I(Z)]_4 \geq \max\left\{0, \binom{4+2}{2} - 2\binom{3+1}{2} - 2\binom{2}{2}\right\} = 1$$
$$[I(Z)]_4 \supseteq \langle L^2 C_1,\ L^2 C_2\rangle,$$

Przykład



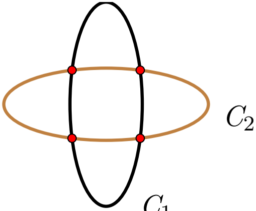
$$Z = 3P_1 + P_2 + 3P_3 + P_4 \subset \mathbb{P}^2$$
$$\dim[I(Z)]_4 \geq \max\left\{0, \binom{4+2}{2} - 2\binom{3+1}{2} - 2\binom{2}{2}\right\} = 1$$
$$[I(Z)]_4 = \langle L^2 C_1,\ L^2 C_2\rangle, \quad 2 = \dim[I(Z)]_4 > 1.$$

Hipoteza (Segre '61)



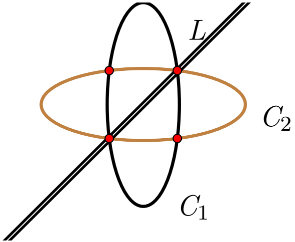
$$Z = 3P_1 + P_2 + 3P_3 + P_4$$

$\Longrightarrow$

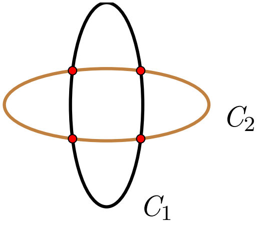


$$Z' = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$$

Hipoteza (Segre '61)



$\Longrightarrow$



$Z = 3P_1 + P_2 + 3P_3 + P_4$ $\qquad$ $Z' = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$

$2 = \dim[I(Z)]_4 = \dim[I(Z')]_2 = \max\left\{0, \binom{2+2}{2} - 4\binom{2}{2}\right\} = \max\{0, 6-4\} = 2.$

Problem (Cook II, Harbourne, Migliore and Nagel, 2018)

Niech $Z = P_1 + \ldots + P_s \subset \mathbb{P}^2$ będzie schematem ustalonych punktów i niech Q będzie punktem ogólnym. Scharakteryzować te Z, t, dla których

$$\dim_{\mathbb{C}}[I(Z + mQ)]_t > \max\left\{\binom{t+2}{t} - s - \binom{m+1}{2}, 0\right\}.$$

Problem (Cook II, Harbourne, Migliore and Nagel, 2018)

Niech $Z = P_1 + \ldots + P_s \subset \mathbb{P}^2$ będzie schematem ustalonych punktów i niech Q będzie punktem ogólnym. Scharakteryzować te Z, t, dla których

$$\dim_{\mathbb{C}}[I(Z+mQ)]_t > \max\left\{\binom{t+2}{t} - s - \binom{m+1}{2}, 0\right\}.$$

Definicja (CHMN, 2018)

Niech $Z = P_1 + \ldots + P_s$ będzie zbiorem pojedynczych punktów w $\mathbb{P}^2$. Mówimy, że Z wyznacza **krzywą niespodziewaną stopnia** $m+1$ jeśli dla punktu ogólnego $Q \in \mathbb{P}^2$ punkt tłusty mQ nie narzuca niezależnych warunków na przestrzeń krzywych stopnia $m+1$ przechodzących przez Z, tj.,

$$\dim_{\mathbb{C}}[I(Z+mQ)]_{m+1} > \max\left\{\dim_{\mathbb{C}}[I(Z)]_{m+1} - \binom{m+1}{2}, 0\right\}.$$

Rozwój badań:

- Bauer, Th., Malara, G., Szpond, J., Szemberg, T.:*Quartic unexpected curves and surfaces*, Manuscripta Mathematica 161, (2020) 283–292
- De Poi, P., Ilardi, G.:*Companion varieties for Hesse, Hesse union dual Hesse arrangements*, J. Commut. Algebra 15 (2023) 1–13
- Di Marca, M., Malara, G., Oneto, A., *Unexpected curves arising from special line arrangements*, J. Algebraic Combin. 51 (2020), 171–194
- Dimca, A., *Unexpected curves in* $\mathbb{P}^2$ *line arrangements, and minimal degree of jacobian relations*, J. Commut. Algebra 15 (2023) 15–30
- Dumnicki, M., Farnik, Ł., Harbourne, B., Malara, G., Szpond, J., Tutaj-Gasińska, H:*A matrixwise approach to unexpected surfaces*, Linear Algebra Appl. vol. 592 (2020), 113-133
- Dumnicki, M., Harbourne, B., Roe, J., Szemberg, T., Tutaj-Gasińska, H.:*Unexpected surfaces singular on lines in* $\mathbb{P}^3$, European Journal of Mathematics, 17 Nov. 2020

Rozwój badań:

- Farnik, Ł., Galuppi, F., Sodomaco, L., Trok, W., *On the unique unexpected quartic in* P^2, J. Algebraic Combin. 53 (2021), 131-146
- Favacchio, G., Guardo, E., Harbourne, B., Migliore, J.: *Expecting the unexpected: Quantifying the persistence of unexpected hypersurfaces*, Adv. in Math., 388 (2021)
- Harbourne, B., Migliore, J., Nagel, U., Teitler, Z.: *Unexpected hypersurfaces and where to find them*, Michigan Math. J. 70 (2020), 301–339
- Harbourne, B., Migliore, J., Tutaj-Gasińska, H.: *New constructions of unexpected hypersurfaces in* $\mathbb{P}^n$, Rev. Mat. Complut. (2020), 18p.
- Kabat, J., Strycharz-Szemberg, B.: *Diminished Fermat-type arrangements and unexpected curves*, Comptes Rendus Mathématique 358 (2020) 603-608

Rozwój badań:

- Szpond, J.: *Unexpected hypersurfaces with multiple fat points*, Journal of Symbolic Computation, 109, (2022), 510-519
- Trok, B.: *Projective duality, unexpected hypersurfaces and logarithmic derivations of hyperplane arrangements*, https://arxiv.org/abs/2003.02397
- i wiele innych

Konstrukcja z [CHMN]

$\check{\mathbb{P}}^2$	$\mathbb{P}^2$

Konstrukcja z [CHMN]

$\check{\mathbb{P}}^2$	$\mathbb{P}^2$
	$Z = \{P_1, \ldots, P_t\}$

Konstrukcja z [CHMN]

$\check{\mathbb{P}}^2$	$\mathbb{P}^2$
$l_1, \ldots, l_t, \quad f = \ell_1 \cdots \ell_t$	$Z = \{P_1, \ldots, P_t\}$

Konstrukcja z [CHMN]

$\check{\mathbb{P}}^2$	$\mathbb{P}^2$
$l_1, \ldots, l_t, \quad f = \ell_1 \cdots \ell_t$	$Z = \{P_1, \ldots, P_t\}$
$L : \alpha a + \beta b + \gamma c = 0$	

Konstrukcja z [CHMN]

$\check{\mathbb{P}}^2$	$\mathbb{P}^2$
$l_1, \ldots, l_t, \quad f = \ell_1 \cdots \ell_t$	$Z = \{P_1, \ldots, P_t\}$
$L : \alpha a + \beta b + \gamma c = 0$	$\check{L} = P_L = (\alpha, \beta, \gamma)$

Konstrukcja z [CHMN]

$\check{\mathbb{P}}^2$	$\mathbb{P}^2$
$l_1, \dots, l_t, \quad f = \ell_1 \cdots \ell_t$	$Z = \{P_1, \dots, P_t\}$
$L : \alpha a + \beta b + \gamma c = 0$	$\check{L} = P_L = (\alpha, \beta, \gamma)$
(s_0, s_1, s_2, s_3) to syzygie (f_a, f_b, f_c, L), gdzie $\deg(s_0) = \deg(s_1) = \deg(s_2) = d$	

Konstrukcja z [CHMN]

$\check{\mathbb{P}}^2$	$\mathbb{P}^2$
$l_1, \ldots, l_t, \quad f = \ell_1 \cdots \ell_t$	$Z = \{P_1, \ldots, P_t\}$
$L : \alpha a + \beta b + \gamma c = 0$	$\check{L} = P_L = (\alpha, \beta, \gamma)$
(s_0, s_1, s_2, s_3) to syzygie (f_a, f_b, f_c, L), gdzie $\deg(s_0) = \deg(s_1) = \deg(s_2) = d$ $Q = (a, b, c) \in L$	$L_Q = ax + by + cz$

Konstrukcja z [CHMN]

$\check{\mathbb{P}}^2$	$\mathbb{P}^2$
$l_1, \ldots, l_t, \quad f = \ell_1 \cdots \ell_t$	$Z = \{P_1, \ldots, P_t\}$
$L : \alpha a + \beta b + \gamma c = 0$	$\check{L} = P_L = (\alpha, \beta, \gamma)$
(s_0, s_1, s_2, s_3) to syzygie (f_a, f_b, f_c, L), gdzie $\deg(s_0) = \deg(s_1) = \deg(s_2) = d$ $Q = (a, b, c) \in L$ $s(Q) = (s_0(Q), s_1(Q), s_2(Q))$	 $L_Q = ax + by + cz$ $L_{s(Q)} = s_0(Q)x + s_1(Q)y + s_2(Q)z$

Konstrukcja z [CHMN]

$\check{\mathbb{P}}^2$	$\mathbb{P}^2$
$l_1, \dots, l_t, \quad f = \ell_1 \cdots \ell_t$	$Z = \{P_1, \dots, P_t\}$
$L : \alpha a + \beta b + \gamma c = 0$	$\check{L} = P_L = (\alpha, \beta, \gamma)$
(s_0, s_1, s_2, s_3) to syzygie (f_a, f_b, f_c, L), gdzie $\deg(s_0) = \deg(s_1) = \deg(s_2) = d$ $Q = (a, b, c) \in L$ $s(Q) = (s_0(Q), s_1(Q), s_2(Q))$	 $L_Q = ax + by + cz$ $L_{s(Q)} = s_0(Q)x + s_1(Q)y + s_2(Q)z$
	$P = L_Q \cap L_{s(Q)}$

Konstrukcja z [CHMN]

$\check{\mathbb{P}}^2$	$\mathbb{P}^2$
$l_1, \ldots, l_t, \quad f = \ell_1 \cdots \ell_t$	$Z = \{P_1, \ldots, P_t\}$
$L : \alpha a + \beta b + \gamma c = 0$	$\check{L} = P_L = (\alpha, \beta, \gamma)$
(s_0, s_1, s_2, s_3) to syzygie (f_a, f_b, f_c, L), gdzie $\deg(s_0) = \deg(s_1) = \deg(s_2) = d$	
$Q = (a, b, c) \in L$	$L_Q = ax + by + cz$
$s(Q) = (s_0(Q), s_1(Q), s_2(Q))$	$L_{s(Q)} = s_0(Q)x + s_1(Q)y + s_2(Q)z$
	$P = L_Q \cap L_{s(Q)}$

- Proste L_Q, $L_{s(Q)}$ przecinają się (w ogólności) w punkcie P, zadając odwzorowanie $L \ni Q \to P \in \mathbb{P}^2$, ewentualnie niezdefiniowane jeśli $\ell_{s(Q)} = \ell_Q$
- Punkty $Q \in L$ zadają punkty P, które tworzą krzywą C stopnia $d+1$
- C przechodzi przez punkty Z oraz $\operatorname{mult} C_{P_L} = d$

Uogólnienie

Pytanie

Czy można uogólnić podana konstrukcję?

Krzywe niespodziewane typu $(d+k, d)$

Definicja (Krzywa niespodziewana typu $(d+k, d)$)

Mówimy, że krzywa C, zadana jako forma stopnia $d+k$ w $[I_Z]_{d+k}$, mająca punkt ogólny P krotności m, jest niespodziewana typu $(d+k, d)$ jeśli

$$\dim[I_{Z\cup mP}]_{d+k} > \max\left(0, \dim[I_Z]_{d+k} - \binom{m+1}{2}\right);$$

ponadto znikanie na Z zadaje niezależne warunki na formy stopnia $d+k$.

Konstrukcja na bazie syzygii

$\check{\mathbb{P}}^2$	$\mathbb{P}^2$

Konstrukcja na bazie syzygii

$\check{\mathbb{P}}^2$	$\mathbb{P}^2$
$\check{Z} = \{l_1, \ldots, l_t\}, \quad f = \ell_1 \cdots \ell_t$	$Z = \{P_1, \ldots, P_t\}$

Konstrukcja na bazie syzygii

$\check{\mathbb{P}}^2$	$\mathbb{P}^2$
$\check{Z} = \{l_1, \ldots, l_t\}, \quad f = \ell_1 \cdots \ell_t$	$Z = \{P_1, \ldots, P_t\}$
$L : \alpha a + \beta b + \gamma c = 0$	$\check{L} = P_L = (\alpha, \beta, \gamma)$

Konstrukcja na bazie syzygii

$\check{\mathbb{P}}^2$	$\mathbb{P}^2$
$\check{Z} = \{l_1, \ldots, l_t\}, \quad f = \ell_1 \cdots \ell_t$	$Z = \{P_1, \ldots, P_t\}$
$L : \alpha a + \beta b + \gamma c = 0$	$\check{L} = P_L = (\alpha, \beta, \gamma)$
$(g_{k,0,0}, \ldots, g_{0,0,k}, g)$ to syzygie $(f_a, f_b, f_c)^k + (L)$ gdzie $\deg(g_{i_1,i_2,i_3}) = d$	

Konstrukcja na bazie syzygii

$\check{\mathbb{P}}^2$	$\mathbb{P}^2$
$\check{Z} = \{l_1, \dots, l_t\}, \quad f = \ell_1 \cdots \ell_t$	$Z = \{P_1, \dots, P_t\}$
$L : \alpha a + \beta b + \gamma c = 0$	$\check{L} = P_L = (\alpha, \beta, \gamma)$
$(g_{k,0,0}, \dots, g_{0,0,k}, g)$ to syzygie $(f_a, f_b, f_c)^k + (L)$ gdzie $\deg(g_{i_1,i_2,i_3}) = d$ $Q = (a, b, c) \in L$	

Konstrukcja na bazie syzygii

$\check{\mathbb{P}}^2$	$\mathbb{P}^2$
$\check{Z} = \{l_1, \ldots, l_t\}, \quad f = \ell_1 \cdots \ell_t$	$Z = \{P_1, \ldots, P_t\}$
$L : \alpha a + \beta b + \gamma c = 0$	$\check{L} = P_L = (\alpha, \beta, \gamma)$
$(g_{k,0,0}, \ldots, g_{0,0,k}, g)$ to syzygie $(f_a, f_b, f_c)^k + (L)$ gdzie $\deg(g_{i_1,i_2,i_3}) = d$ $Q = (a, b, c) \in L$	$S_Q(x, y, z) :=$ $g_{k,0,0}(Q)x^k + g_{k-1,1,0}(Q)x^{k-1}y + \cdots + g_{0,0,k}(Q)z^k$

Konstrukcja na bazie syzygii

$\check{\mathbb{P}}^2$	$\mathbb{P}^2$
$\check{Z} = \{l_1, \ldots, l_t\}, \quad f = \ell_1 \cdots \ell_t$	$Z = \{P_1, \ldots, P_t\}$
$L : \alpha a + \beta b + \gamma c = 0$	$\check{L} = P_L = (\alpha, \beta, \gamma)$
$(g_{k,0,0}, \ldots, g_{0,0,k}, g)$ to syzygie $(f_a, f_b, f_c)^k + (L)$ gdzie $\deg(g_{i_1,i_2,i_3}) = d$ $Q = (a, b, c) \in L$	$S_Q(x, y, z) :=$ $g_{k,0,0}(Q)x^k + g_{k-1,1,0}(Q)x^{k-1}y + \cdots + g_{0,0,k}(Q)z^k$ $L_Q = ax + by + cz$

Konstrukcja na bazie syzygii

$\check{\mathbb{P}}^2$	$\mathbb{P}^2$
$\check{Z} = \{l_1, \dots, l_t\}, \quad f = \ell_1 \cdots \ell_t$	$Z = \{P_1, \dots, P_t\}$
$L : \alpha a + \beta b + \gamma c = 0$	$\check{L} = P_L = (\alpha, \beta, \gamma)$
$(g_{k,0,0}, \dots, g_{0,0,k}, g)$ to syzygie $(f_a, f_b, f_c)^k + (L)$ gdzie $\deg(g_{i_1,i_2,i_3}) = d$ $Q = (a, b, c) \in L$	$S_Q(x, y, z) :=$ $g_{k,0,0}(Q)x^k + g_{k-1,1,0}(Q)x^{k-1}y + \cdots + g_{0,0,k}(Q)z^k$ $L_Q = ax + by + cz$
	$L_Q \cap S_Q$

Definicja

Układ równań

$$\begin{cases} \alpha a + \beta b + \gamma c = 0 \\ ax + by + cz = 0 \\ S_Q(x, y, z) = 0. \end{cases} \qquad (\star)$$

jest nieokreślony w $Q = (a, b, c) \in L$, jeśli dla wszystkich (x, y, z) zachodzi $S_Q(x, y, z) = (ax + by + cz)^k$.

Twierdzenie [–, Tutaj-Gasińska (2021)]

1. Układ $(\star)$ może być nieokreślony tylko w punktach $Q \in \check{Z} \cap L$.
2. Rozwiązania (x, y, z) układu $(\star)$ leżą na krzywej $C_L \subset \mathbb{P}^2$ stopnia co najwyżej $d + k$.
3. C_L przechodzi przez punkty zbioru Z.
4. C_L ma punkt krotności przynajmniej d w P_L.

Interesujący przykład

- Niech $F_n = (x^n - y^n)(x^n - z^n)(y^n - z^n)$, wtedy Z składa się z $n^2 + 3$ punktów.

Interesujący przykład

- Niech $F_n = (x^n - y^n)(x^n - z^n)(y^n - z^n)$, wtedy Z składa się z $n^2 + 3$ punktów.
- $DF_n = xyz \prod_{i,j=0}^{n-1} (x + e^i y + e^j z)$, gdzie e jest n-tym prymitywnym pierwiastkiem z jedynki.

Interesujący przykład

- Niech $F_n = (x^n - y^n)(x^n - z^n)(y^n - z^n)$, wtedy Z składa się z $n^2 + 3$ punktów.
- $DF_n = xyz \prod_{i,j=0}^{n-1} (x + e^i y + e^j z)$, gdzie e jest n-tym prymitywnym pierwiastkiem z jedynki.
- Niech $n = 4$ oraz $(d + k, d) = (7, 5)$.

Interesujący przykład

$$\mathcal{C}_{4,7,5} = (5b^4c+3c^5)x^6y+(-20ab^3c)x^5y^2+(30a^2b^2c)x^4y^3+(-20a^3bc)x^3y^4+(5a^4c-3c^5)x^2y^5+$$
$$(-3b^5-5bc^4)x^6z+(10ab^4-10ac^4)x^5yz+(-10a^2b^3)x^4y^2z+(5a^4b+5bc^4)x^2y^4z+(-2a^5+10ac^4)xy^5z+(20abc^3)x^5z^2+$$
$$(10a^2c^3)x^4yz^2+(-20abc^3)xy^4z^2+(-10a^2c^3)y^5z^2+(-30a^2bc^2)x^4z^3+(30a^2bc^2)y^4z^3+(20a^3bc)x^3z^4+$$
$$(-5a^4c-5b^4c)x^2yz^4+(20ab^3c)xy^2z^4+(-30a^2b^2c)y^3z^4+(-5a^4b+3b^5)x^2z^5+(2a^5-10ab^4)xyz^5+(10a^2b^3)y^2z^5=0.$$

Interesujący przykład

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}_{4,7,5} = {} & (5b^4c+3c^5)x^6y + (-20ab^3c)x^5y^2 + (30a^2b^2c)x^4y^3 + (-20a^3bc)x^3y^4 + (5a^4c-3c^5)x^2y^5 + \\
& (-3b^5-5bc^4)x^6z + (10ab^4-10ac^4)x^5yz + (-10a^2b^3)x^4y^2z + (5a^4b+5bc^4)x^2y^4z + (-2a^5+10ac^4)xy^5z + (20abc^3)x^5z^2 + \\
& (10a^2c^3)x^4yz^2 + (-20abc^3)xy^4z^2 + (-10a^2c^3)y^5z^2 + (-30a^2bc^2)x^4z^3 + (30a^2bc^2)y^4z^3 + (20a^3bc)x^3z^4 + \\
& (-5a^4c-5b^4c)x^2yz^4 + (20ab^3c)xy^2z^4 + (-30a^2b^2c)y^3z^4 + (-5a^4b+3b^5)x^2z^5 + (2a^5-10ab^4)xyz^5 + (10a^2b^3)y^2z^5 = 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C'}_{4,7,5} = {} & (50ab^6c^2+90ab^2c^6)x^4y^3 + (-150a^2b^5c^2-90a^2bc^6)x^3y^4 + (150a^3b^4c^2+30a^3c^6)x^2y^5 + \\
& (-50a^4b^3c^2-30b^3c^6)xy^6 + (-30b^8c-60b^4c^5-6c^9)x^5yz + (50ab^7c-110ab^3c^5)x^4y^2z + \\
& (60a^3bc^5)x^2y^4z + (-50a^4b^4c-30a^4c^5+90b^4c^5+6c^9)xy^5z + (30a^5b^3c+50ab^3c^5)y^6z + (15b^9+66b^5c^4+15bc^8)x^5z^2 + \\
& (-25ab^8+190ab^4c^4+15ac^8)x^4yz^2 + (25a^4b^5-15a^4bc^4-75b^5c^4-15bc^8)xy^4z^2 + \\
& (-15a^5b^4+9a^5c^4-175ab^4c^4-15ac^8)y^5z^2 + (-200ab^5c^3-60abc^7)x^4z^3 + (200ab^5c^3+60abc^7)y^4z^3 + \\
& (150a^2b^5c^2+90a^2bc^6)x^3z^4 + (-150a^3b^4c^2-30a^3c^6)x^2yz^4 + (50a^4b^3c^2+30b^3c^6)xy^2z^4 + (-50ab^6c^2-90ab^2c^6)y^3z^4 + \\
& (-60a^3bc^5)x^2z^5 + (50a^4b^4c+30a^4c^5+30b^8c-30b^4c^5)xyz^5 + (-30a^5b^3c-50ab^7c+60ab^3c^5)y^2z^5 + \\
& (-25a^4b^5+15a^4bc^4-15b^9+9b^5c^4)xz^6 + (15a^5b^4-9a^5c^4+25ab^8-15ab^4c^4)yz^6 = 0.
\end{aligned}
$$

Dziękuje za uwagę!