Własności faktorialne podpierścieni związane z elementami nierozkładalnymi i bezkwadratowymi

Łukasz Matysiak

Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

8 – 12 stycznia 2018

XXXIX Konferencja i Warsztaty
"Geometria Analityczna i Algebraiczna"
Łódź

Motywacje

Uogólnienie hipotezy jakobianowej

Dla dowolnych wielomianów $f_1, \dots, f_m \in k[x_1, \dots, x_n]$, gdzie k jest ciałem charakterystyki zero i $m \in \{2, \dots, n\}$, jeśli

$$\mathrm{NWD}(\mathrm{jac}^{f_1,\dots,f_m}_{x_{j_1},\dots,x_{j_m}}, 1 \leqslant j_1 < \dots < j_m \leqslant n) \in k \setminus \{0\},$$

to $k[f_1, \dots, f_m]$ jest algebraicznie domknięty w $k[x_1, \dots, x_n]$.

P. Jędrzejewicz, J. Zieliński, *Analogs of Jacobian conditions for subrings*, J. Pure Appl. Algebra 221 (2017), 2111-2118, arXiv: 1601.01508

Uwaga

W dowolnej skończenie generowanej dziedzinie nad ciałem k charakterystyki zerowej podpierścień jest algebraicznie domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy jest pierścieniem stałych pewnej k-derywacji.

A. Nowicki, *Rings and fields of constants for derivations in characteristic zero*, J. Pure Appl. Algebra 96 (1994), 47-55

Oznaczenia

Niech R będzie dowolnym pierścieniem. Wówczas:
– R^* oznacza zbiór wszystkich elementów odwracalnych w pierścieniu R,
– $\operatorname{Irr} R$ oznacza zbiór wszystkich elementów nierozkładalnych w pierścieniu R,
– $\operatorname{Sqf} R$ oznacza zbiór wszystkich elementów bezkwadratowych w pierścieniu R.

Definicje

Niech R będzie dowolnym pierścieniem.
Element $x \in R$ nazywamy nierozkładalnym, jeśli $x \notin R^*$ oraz

$$\forall a, b \in R \quad x = ab \Rightarrow (a \in R^* \vee b \in R^*).$$

Definicje

Niech R będzie dowolnym pierścieniem.
Element $x \in R$ nazywamy nierozkładalnym, jeśli $x \notin R^*$ oraz

$$\forall a, b \in R \quad x = ab \Rightarrow (a \in R^* \vee b \in R^*).$$

Element $x \in R$ nazywamy bezkwadratowym, jeśli

$$\forall a, b \in R \quad x = a^2 b \Rightarrow a \in R^*.$$

Twierdzenie

Niech k będzie ciałem charakterystyki zero. Załóżmy, że $f_1, \dots, f_m \in k[x_1, \dots, x_n]$ są algebraicznie niezależne nad k, gdzie $m \in \{1, \dots, n\}$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

(i) $\mathrm{NWD}(\mathrm{jac}^{f_1,\dots,f_m}_{x_{j_1},\dots,x_{j_m}}, j_1 < \dots < j_m) \in k \setminus \{0\}$,

(ii) $\mathrm{Irr}\, k[f_1, \dots, f_m] \subset \mathrm{Sqf}\, k[x_1, \dots, x_n]$,

(iii) $\mathrm{Sqf}\, k[f_1, \dots, f_m] \subset \mathrm{Sqf}\, k[x_1, \dots, x_n]$.

P. Jędrzejewicz, J. Zieliński, *Analogs of Jacobian conditions for subrings*, J. Pure Appl. Algebra 221 (2017), 2111-2118, arXiv: 1601.01508

Odpowiedniki warunku jakobianowego

Będziemy rozważać warunki

$$\operatorname{Irr} R \subset \operatorname{Sqf} A \qquad \operatorname{Sqf} R \subset \operatorname{Sqf} A,$$

gdzie R jest podpierścieniem dziedziny A.

Definicja

Niech A będzie pierścieniem, R jego podpierścieniem. Mówimy, że R jest faktorialnie domknięty w A, jeśli

$$\forall x, y \in A \quad xy \in R \setminus \{0\} \Rightarrow x, y \in R.$$

Znany fakt

Niech A będzie dziedziną z jednoznacznością rozkładu. Niech R będzie podpierścieniem pierścienia A takim, że $R^* = A^*$. Następujące warunki są równoważne:

(i) $\operatorname{Irr} R \subset \operatorname{Irr} A$,

(ii) R jest faktorialnie domknięty w A.

Twierdzenie

Niech A będzie dziedziną z jednoznacznością rozkładu. Niech R będzie podpierścieniem pierścienia A takim, że $R^* = A^*$ i $R_0 \cap A = R$. Następujące warunki są równoważne:

(i) $\operatorname{Sqf} R \subset \operatorname{Sqf} A$,

(ii) dla dowolnych $x \in A$, $y \in \operatorname{Sqf} A$, jeśli $x^2 y \in R \setminus \{0\}$, to $x, y \in R$.

Twierdzenie

Niech A będzie dziedziną z jednoznacznością rozkładu. Niech R będzie podpierścieniem pierścienia A takim, że $R^* = A^*$. Rozważmy następujące warunki:

(i) $\operatorname{Irr} R \subset \operatorname{Irr} A$,

(ii) $\operatorname{Sqf} R \subset \operatorname{Sqf} A$,

(iii) $\operatorname{Irr} R \subset \operatorname{Sqf} A$.

Wtedy zachodzą następujące implikacje:

$$\text{(i)} \Rightarrow \text{(ii)} \Rightarrow \text{(iii)}.$$

Irr $R \subset$ Sqf A

Twierdzenie

Niech A będzie dziedziną. Niech R będzie podpierścieniem pierścienia A. Rozważmy warunki:

(i) $\operatorname{Irr} R \subset \operatorname{Sqf} A$,

(ii) dla dowolnych $x \in A$, $y \in \operatorname{Sqf} A$, jeśli $x^2 y \in R \setminus \{0\}$, to $x, xy \in R$.

Wówczas (ii)$\Rightarrow$ (i).

M. Marciniak, Ł. Matysiak, *A sufficient condition for atoms of a submonoid to be square-free in a monoid*, praca w przygotowaniu.

Dowód.

Załóżmy, że zachodzi warunek:

$$\forall x \in A, \forall y \in \operatorname{Sqf} A \quad x^2 y \in R \setminus \{0\} \Rightarrow x, xy \in R.$$

Rozważmy $r \in \operatorname{Irr} R$. Przypuśćmy, że $r \notin \operatorname{Sqf} A$, więc $r = x^2 y$, gdzie $x \in A \setminus A^*, y \in \operatorname{Sqf} A$. Skoro $x^2 y \in R \setminus \{0\}$, to $x, xy \in R$. Ale $x, xy \notin R^*$. Sprzeczność. Zatem $\operatorname{Irr} R \subset \operatorname{Sqf} A$. $\square$

Dowód.

Załóżmy, że zachodzi warunek:

$$\forall x \in A, \forall y \in \operatorname{Sqf} A \quad x^2 y \in R \setminus \{0\} \Rightarrow x, xy \in R.$$

Rozważmy $r \in \operatorname{Irr} R$. Przypuśćmy, że $r \notin \operatorname{Sqf} A$, więc $r = x^2 y$, gdzie $x \in A \setminus A^*, y \in \operatorname{Sqf} A$. Skoro $x^2 y \in R \setminus \{0\}$, to $x, xy \in R$. Ale $x, xy \notin R^*$. Sprzeczność. Zatem $\operatorname{Irr} R \subset \operatorname{Sqf} A$. $\square$

Czy zachodzi (i) $\Rightarrow$ (ii)?

Definicja

Półgrupę przemienną H z elementem neutralnym spełniający warunek:

$$\forall a, b, c \in H \quad ab = ac \Rightarrow b = c$$

nazywamy monoidem przemiennym ze skracaniem (commutative cancellative monoid).

Definicja

Półgrupę przemienną H z elementem neutralnym spełniający warunek:

$$\forall a, b, c \in H \quad ab = ac \Rightarrow b = c$$

nazywamy monoidem przemiennym ze skracaniem (commutative cancellative monoid).

Przykład

Jeśli A jest dziedziną, to $A \setminus \{0\}$ z mnożeniem jest monoidem przemiennym ze skracaniem.

Kontrprzykład

Rozważmy monoid $A = \{p^k q^l r^m; k, l, m \geqslant 0\}$ i jego podmonoid $R =< pq, pr >$.
Wówczas Irr $R \subset$ Sqf A, ale istnieją $x \in A$, $y \in$ Sqf A takie, że $x^2 y \in R \setminus \{0\}$, ale $x, xy \notin R$.

M. Marciniak, Ł. Matysiak, *A sufficient condition for atoms of a submonoid to be square-free in a monoid*, praca w przygotowaniu.

Kontrprzykład

$A = \{p^k q^l r^m ; k, l, m \geqslant 0\}$
$R = < pq, pr >$
$\mathrm{Irr}\, R = \{pq, pr\}$
$\mathrm{Sqf}\, A = \{1, p, q, r, pq, pr, qr, pqr\}$
Przyjmijmy $x = p$, $y = qr \in \mathrm{Sqf}\, A$.
Wówczas:
$x^2 y = p^2 qr = pq \cdot pr \in R$,
$x = p \notin R$,
$y = qr \notin R$.

Twierdzenie

Niech A będzie pierścieniem. Niech R będzie podpierścieniem pierścienia A, $R^* = A^*$. Następujące warunki są równoważne:

(i) dla każdego $x \in A, y \in \mathrm{Sqf}\, A$ jeśli $x^2 y \in R \setminus \{0\}$, to $x, xy \in R$,

(ii) dla każdego $n \geqslant 0$ oraz dla każdego $s_0, \dots, s_n \in \mathrm{Sqf}\, A$, jeśli $\prod_{i=0}^{n} s_i^{2^i} \in R$,to $\prod_{i=1}^{n} s_i^{2^{i-1}} s_0, \prod_{i=2}^{n} s_i^{2^{i-2}} s_1, \dots, s_n^2 s_{n-1} s_{n-2}, s_n s_{n-1}, s_n \in R$,

(iii) dla każdego $n \geqslant 0$ oraz dla każdego $s_0, \dots, s_n \in (\mathrm{Sqf}\, A) \setminus A^*$, s_i rpr s_j, $i \neq j$ i dla każdego $k_0 > \dots > k_n > 0$, jeśli $\prod_{i=0}^{n} s_i^{k_i} \in R$, to $s_0, s_0 s_1, \dots, \prod_{i=0}^{n} s_i \in R$,

(iv) dla każdego $n \geqslant 0$ oraz dla każdego $s_0, \dots, s_n \in (\mathrm{Sqf}\, A) \setminus A^*$, gdzie $s_i \mid s_{i+1}, s_i \not\sim s_j$ dla $i = 0, 1, \dots, n-1$ i dla każdego $k_j > 0$, gdzie $j = 0, 1, \dots, n$, jeśli $\prod_{i=0}^{n} s_i^{k_i} \in R \setminus \{0\}$, to $s_0, s_1, \dots, s_{n-1}, s_n \in R$.

M. Marciniak, Ł. Matysiak, *A sufficient condition for atoms of a submonoid to be square-free in a monoid*, praca w przygotowaniu.

Bibliografia

1. P. Jędrzejewicz, Ł. Matysiak, J. Zieliński, *A note on square-free factorizations*, Analytic and Algebraic Geometry 2 (2017), Łódź University Press, 79-84, arXiv: 1609.09464.
2. M. Marciniak, Ł. Matysiak, *A sufficient condition for atoms of a submonoid to be square-free in a monoid*, praca w przygotowaniu.
3. P. Jędrzejewicz, J. Zieliński, *Analogs of Jacobian conditions for subrings*, J. Pure Appl. Algebra 221 (2017), 2111-2118, arXiv: 1601.01508.
4. A. Geroldinger, F. Halter-Koch, *Non-unique factorizations, algebraic, combinatorial and analytic theory*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2006.
5. P. Jędrzejewicz, Ł. Matysiak, J. Zieliński, *On some factorial properties of subrings*, Universitatis Iagellonicae Acta Mathematica 54 (2017), 43-52, arXiv: 1606.06592.