

# O klasyfikacji kwadratowych odwzorowań wielomianowych $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^n$

Piotr Migus (Politechnika Świętokrzyska)

wspólnie z M. Farnikiem (UJ) i Z. Jelonkiem (IMPAN)

Łódź, 8-12.01.2018

Niech  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  lub  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .

Niech  $\Omega_{\mathbb{K}^2}(d_1, \dots, d_n)$  oznacza przestrzeń odwzorowań wielomianowych  $F = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^n$  gdzie  $\deg f_i \leq d_i$  dla  $1 \leq i \leq n$ . Niech  $F, G \in \Omega_{\mathbb{K}^2}(d_1, \dots, d_n)$ . Powiemy, że  $F$  jest liniowo równoważne z  $G$  jeśli istnieją liniowe izomorfizmy  $\Phi : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2$  oraz  $\Psi : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$  takie, że  $F = \Psi \circ G \circ \Phi$ .

Niech  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  lub  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .

Niech  $\Omega_{\mathbb{K}^2}(d_1, \dots, d_n)$  oznacza przestrzeń odwzorowań wielomianowych  $F = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^n$  gdzie  $\deg f_i \leq d_i$  dla  $1 \leq i \leq n$ . Niech  $F, G \in \Omega_{\mathbb{K}^2}(d_1, \dots, d_n)$ . Powiemy, że  $F$  jest liniowo równoważne z  $G$  jeśli istnieją liniowe izomorfizmy  $\Phi : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2$  oraz  $\Psi : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$  takie, że  $F = \Psi \circ G \circ \Phi$ .

- Przez  $GA(n)$  będziemy oznaczali grupę afinicznych transformacji  $\mathbb{K}^n$ .
- Przez  $\mathcal{GA}(n, m)$  oznaczmy grupę  $GA(m) \times GA(n)$  z iloczynem określonym wzorem:  
$$(L_2, R_2) \circ (L_1, R_1) = (L_2 \circ L_1, R_1 \circ R_2).$$
- Grupa  $\mathcal{GA}(n, m)$  działa na zbiór  $\Omega_{\mathbb{K}^n}(2, \dots, 2)$  odwzorowań kwadratowych  $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  następująco:  $(L, R)F = L \circ F \circ R$ .
- Orbitę  $F$  oznaczmy przez  $O(F)$ . Powiemy, że  $F$  i  $G$  są liniowo równoważne, jeśli istnieje  $\alpha \in \mathcal{GA}(n, m)$  taka, że  $F = \alpha G$ , tzn.  $F \in O(G)$ .

- Przez  $GA(n)$  będziemy oznaczali grupę afinicznych transformacji  $\mathbb{K}^n$ .
- Przez  $\mathcal{GA}(n, m)$  oznaczmy grupę  $GA(m) \times GA(n)$  z iloczynem określonym wzorem:  

$$(L_2, R_2) \circ (L_1, R_1) = (L_2 \circ L_1, R_1 \circ R_2).$$
- Grupa  $\mathcal{GA}(n, m)$  działa na zbiór  $\Omega_{\mathbb{K}^n}(2, \dots, 2)$  odwzorowań kwadratowych  $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  następująco:  $(L, R)F = L \circ F \circ R$ .
- Orbitę  $F$  oznaczmy przez  $O(F)$ . Powiemy, że  $F$  i  $G$  są liniowo równoważne, jeśli istnieje  $\alpha \in \mathcal{GA}(n, m)$  taka, że  $F = \alpha G$ , tzn.  $F \in O(G)$ .

- Przez  $GA(n)$  będziemy oznaczali grupę afinicznych transformacji  $\mathbb{K}^n$ .
- Przez  $\mathcal{GA}(n, m)$  oznaczmy grupę  $GA(m) \times GA(n)$  z iloczynem określonym wzorem:  

$$(L_2, R_2) \circ (L_1, R_1) = (L_2 \circ L_1, R_1 \circ R_2).$$
- Grupa  $\mathcal{GA}(n, m)$  działa na zbiór  $\Omega_{\mathbb{K}^n}(2, \dots, 2)$  odwzorowań kwadratowych  $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  następująco:  $(L, R)F = L \circ F \circ R$ .
- Orbitę  $F$  oznaczmy przez  $O(F)$ . Powiemy, że  $F$  i  $G$  są liniowo równoważne, jeśli istnieje  $\alpha \in \mathcal{GA}(n, m)$  taka, że  $F = \alpha G$ , tzn.  $F \in O(G)$ .

- Przez  $GA(n)$  będziemy oznaczali grupę afinicznych transformacji  $\mathbb{K}^n$ .
- Przez  $\mathcal{GA}(n, m)$  oznaczymy grupę  $GA(m) \times GA(n)$  z iloczynem określonym wzorem:  

$$(L_2, R_2) \circ (L_1, R_1) = (L_2 \circ L_1, R_1 \circ R_2).$$
- Grupa  $\mathcal{GA}(n, m)$  działa na zbiór  $\Omega_{\mathbb{K}^n}(2, \dots, 2)$  odwzorowań kwadratowych  $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  następująco:  $(L, R)F = L \circ F \circ R$ .
- Orbitę  $F$  oznaczymy przez  $O(F)$ . Powiemy, że  $F$  i  $G$  są liniowo równoważne, jeśli istnieje  $\alpha \in \mathcal{GA}(n, m)$  taka, że  $F = \alpha G$ , tzn.  $F \in O(G)$ .

- Przez  $GA(n)$  będziemy oznaczali grupę afinicznych transformacji  $\mathbb{K}^n$ .
- Przez  $\mathcal{GA}(n, m)$  oznaczmy grupę  $GA(m) \times GA(n)$  z iloczynem określonym wzorem:  

$$(L_2, R_2) \circ (L_1, R_1) = (L_2 \circ L_1, R_1 \circ R_2).$$
- Grupa  $\mathcal{GA}(n, m)$  działa na zbiór  $\Omega_{\mathbb{K}^n}(2, \dots, 2)$  odwzorowań kwadratowych  $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  następująco:  $(L, R)F = L \circ F \circ R$ .
- Orbitę  $F$  oznaczmy przez  $O(F)$ . Powiemy, że  $F$  i  $G$  są liniowo równoważne, jeśli istnieje  $\alpha \in \mathcal{GA}(n, m)$  taka, że  $F = \alpha G$ , tzn.  $F \in O(G)$ .



Niech  $F = (f_1, \dots, f_m) : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  będzie odwzorowaniem wielomianowy. Wymiar przestrzeni afinicznej rozpiętej na obrazie  $F$  będziemy oznaczali przez  $\dim_a(F)$ .

Oznaczmy przez  $\text{Stab}(F)$  stabilizator odwzorowania

$F : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ . Zauważmy, że

$$\dim \text{Stab}(F) + \dim O(F) = \dim \mathcal{GA}(n, m) = n(n+1) + m(m+1).$$

### Własność

Niech  $F : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  będzie odwzorowaniem wielomianowym

oraz niech  $G = (F, 0, \dots, 0) : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^s$  będzie złożeniem

standardowej inkluzji  $\mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^s$  z  $F$ . Wówczas mamy

$\dim \text{Stab}(G) = \dim \text{Stab}(F) + s^2 - m^2 - (s - m) \dim_a(F)$  oraz

$\dim O(G) = \dim O(F) + (s - m)(1 + \dim_a(F))$ .

Niech  $F = (f_1, \dots, f_m) : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  będzie odwzorowaniem wielomianowy. Wymiar przestrzeni afinicznej rozpiętej na obrazie  $F$  będziemy oznaczali przez  $\dim_a(F)$ .

Oznaczmy przez  $\text{Stab}(F)$  stabilizator odwzorowania

$F : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ . Zauważmy, że

$$\dim \text{Stab}(F) + \dim O(F) = \dim \mathcal{GA}(n, m) = n(n+1) + m(m+1).$$

### Własność

Niech  $F : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  będzie odwzorowaniem wielomianowym oraz niech  $G = (F, 0, \dots, 0) : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^s$  będzie złożeniem standardowej inkluzji  $\mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^s$  z  $F$ . Wówczas mamy  $\dim \text{Stab}(G) = \dim \text{Stab}(F) + s^2 - m^2 - (s - m) \dim_a(F)$  oraz  $\dim O(G) = \dim O(F) + (s - m)(1 + \dim_a(F))$ .

Niech  $F = (f_1, \dots, f_m) : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  będzie odwzorowaniem wielomianowy. Wymiar przestrzeni afinicznej rozpiętej na obrazie  $F$  będziemy oznaczali przez  $\dim_a(F)$ .

Oznaczmy przez  $\text{Stab}(F)$  stabilizator odwzorowania

$F : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ . Zauważmy, że

$$\dim \text{Stab}(F) + \dim O(F) = \dim \mathcal{GA}(n, m) = n(n+1) + m(m+1).$$

### Własność

Niech  $F : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  będzie odwzorowaniem wielomianowym oraz niech  $G = (F, 0, \dots, 0) : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^s$  będzie złożeniem standardowej inkluzji  $\mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^s$  z  $F$ . Wówczas mamy  $\dim \text{Stab}(G) = \dim \text{Stab}(F) + s^2 - m^2 - (s - m) \dim_a(F)$  oraz  $\dim O(G) = \dim O(F) + (s - m)(1 + \dim_a(F))$ .

Niech  $F = (f_1, \dots, f_m) : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  będzie odwzorowaniem wielomianowy. Wymiar przestrzeni afinicznej rozpiętej na obrazie  $F$  będziemy oznaczali przez  $\dim_a(F)$ .

Oznaczmy przez  $\text{Stab}(F)$  stabilizator odwzorowania

$F : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ . Zauważmy, że

$$\dim \text{Stab}(F) + \dim O(F) = \dim \mathcal{GA}(n, m) = n(n+1) + m(m+1).$$

### Własność

Niech  $F : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  będzie odwzorowaniem wielomianowym oraz niech  $G = (F, 0, \dots, 0) : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^s$  będzie złożeniem standardowej inkluzji  $\mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^s$  z  $F$ . Wówczas mamy  $\dim \text{Stab}(G) = \dim \text{Stab}(F) + s^2 - m^2 - (s - m) \dim_a(F)$  oraz  $\dim O(G) = \dim O(F) + (s - m)(1 + \dim_a(F))$ .



## Klasyfikacja odwzorowań kwadratowych $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ .

Jeśli  $F : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$  jest generycznie skończonym odwzorowaniem regularnym, wówczas zbiór

$\Delta(F) = \{x \in \mathbb{K}^n : \#F^{-1}(x) \neq \mu(F)\}$  nazywamy dyskryminantem odwzorowania  $F$ . W szczególności, jeśli  $F$  jest właściwe, to  $\Delta(F) = F(C(F))$ , gdzie  $C(F)$  gdzie jest zbiorem krytycznym odwzorowania  $F$ . Zbiór  $\Delta(F)$  jest albo hiperpowierzchnią albo zbiorem pustym.

Mamy następującą klasyfikację odwzorowań kwadratowych  $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  względem równoważności liniowej

## Klasyfikacja odwzorowań kwadratowych $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ .

Jeśli  $F : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$  jest generycznie skończonym odwzorowaniem regularnym, wówczas zbiór

$\Delta(F) = \{x \in \mathbb{K}^n : \#F^{-1}(x) \neq \mu(F)\}$  nazywamy dyskryminantem odwzorowania  $F$ . W szczególności, jeśli  $F$  jest właściwe, to  $\Delta(F) = F(C(F))$ , gdzie  $C(F)$  gdzie jest zbiorem krytycznym odwzorowania  $F$ . Zbiór  $\Delta(F)$  jest albo hiperpowierzchnią albo zbiorem pustym.

Mamy następującą klasyfikację odwzorowań kwadratowych  $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  względem równoważności liniowej

## Klasyfikacja odwzorowań kwadratowych $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ .

Jeśli  $F : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$  jest generycznie skończonym odwzorowaniem regularnym, wówczas zbiór

$\Delta(F) = \{x \in \mathbb{K}^n : \#F^{-1}(x) \neq \mu(F)\}$  nazywamy dyskryminantem odwzorowania  $F$ . W szczególności, jeśli  $F$  jest właściwe, to  $\Delta(F) = F(C(F))$ , gdzie  $C(F)$  gdzie jest zbiorem krytycznym odwzorowania  $F$ . Zbiór  $\Delta(F)$  jest albo hiperpowierzchnią albo zbiorem pustym.

Mamy następującą klasyfikację odwzorowań kwadratowych  $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  względem równoważności liniowej



## Klasyfikacja odwzorowań kwadratowych $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ .

Jeśli  $F : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$  jest generycznie skończonym odwzorowaniem regularnym, wówczas zbiór

$\Delta(F) = \{x \in \mathbb{K}^n : \#F^{-1}(x) \neq \mu(F)\}$  nazywamy dyskryminantem odwzorowania  $F$ . W szczególności, jeśli  $F$  jest właściwe, to  $\Delta(F) = F(C(F))$ , gdzie  $C(F)$  gdzie jest zbiorem krytycznym odwzorowania  $F$ . Zbiór  $\Delta(F)$  jest albo hiperpowierzchnią albo zbiorem pustym.

Mamy następującą klasyfikację odwzorowań kwadratowych  $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  względem równoważności liniowej

- $F_1 = (x^2 + y, y^2 + x)$ ,  $C(f_1) = \{4xy - 1 = 0\}$ ,  
 $\Delta(F_1) = \{2^8 x^2 y^2 - 2^8 x^3 - 2^8 y^3 + 2^5 \cdot 9xy - 27 = 0\}$  jest zredukowaną i nierozkładalną krzywą z 3 ostrzami w punktach  $F_1(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon^2}{2})$ , gdzie  $\varepsilon^3 = 1$ ,  $\dim O(F_1) = 12$ ,  $O(F_1)$  jest otwartą i gęstą podrozmaitością afiniczną  $\Omega_{\mathbb{C}^2}(2, 2)$ . Ponadto,  $\chi(O(F_1)) = 0$  and  $\mu(F_1) = 4$ .
- $F_2 = (x^2 + y, xy)$ ,  $C(F_2) = \{2x^2 = y\}$ ,  
 $\Delta(F_2) = \{4x^3 = 27y^2\}$  jest ostrzem,  $\dim O(F_2) = 11$ ,  $O(F_2)$  jest podrozmaitością afiniczną  $\Omega_{\mathbb{C}^2}(2, 2)$ ,  $\mu(F_2) = 3$ .
- $F_3 = (x^2 + y, y^2)$ ,  $C(F_3) = \{4xy = 0\}$ ,  
 $\Delta(F_3) = \{y(y - x^2) = 0\}$  jest sumą linii i paraboli,  
 $\dim O(F_3) = 11$ ,  $\mu(F_3) = 4$ .
- $F_4 = (x^2, y^2)$ ,  $C(F_4) = \{4xy = 0\}$ ,  $\Delta(F_4) = \{xy = 0\}$  jest sumą dwóch linii,  $\dim O(F_4) = 10$  oraz  $\mu(F_4) = 4$ .
- $F_5 = (x^2 - x, xy)$ ,  $C(F_5) = \{2x^2 - x = 0\}$ ,  $\Delta(F_5)$  jest sumą linii  $x = -1/4$  oraz  $x = 0$ ,  $\dim O(F_5) = 10$ ,  $\mu(F_5) = 2$  i  $F_5$  nie jest właściwe.

- $F_6 = (x^2, xy)$ ,  $C(F_6) = \{x^2 = 0\}$ ,  $\Delta(F_6)$ ,  $x = 0$ ,  
 $\dim O(F_6) = 9$ ,  $\mu(F_6) = 2$  oraz  $F_6$  nie jest właściwe.
- $F_7 = (xy, x + y)$ ,  $C(F_7) = \{y = x\}$ ,  $\Delta(F_7) = \{4x - y^2 = 0\}$ ,  
 $\dim O(F_7) = 10$  oraz  $\mu(F_7) = 2$ .
- $F_8 = (x, xy)$ ,  $C(F_8) = \{x = 0\}$ ,  $\Delta(F_8)$ ,  $\{x = 0\}$ ,  
 $\dim O(F_8) = 9$ ,  $\mu(F_8) = 1$  oraz  $F_8$  nie jest właściwe.
- $F_9 = (x^2, y)$ ,  $C(F_9) = \{x = 0\}$ ,  $\Delta(F_9) = \{x = 0\}$ ,  
 $\dim O(F_9) = 9$  oraz  $\mu(F_9) = 2$ .
- $F_{10} = (x^2 + y, x)$ ,  $\dim O(F_{10}) = 8$ ,  $C(F_{10})$  jest zbiorem  
 pustym,  $F_{10}$  jest automorfizmem,  $\mu(F_{10}) = 1$ .
- $F_{12} = (x, y)$ ,  $\dim O(F_{12}) = 6$ ,  $C(F_{12})$  jest zbiorem pustym,  
 $F_{12}$  jest automorfizmem,  $\mu(F_{12}) = 1$ .

- $F_{11} = (x^2, x)$ ,  $\dim O(F_{11}) = 7$  oraz  $C(F_{11})$  jest płaszczyzną.
- $F_{14} = (x^2 + y, 0)$ ,  $\dim O(F_{14}) = 7$  oraz  $C(F_{14})$  jest płaszczyzną.
- $F_{16} = (x, 0)$ ,  $\dim O(F_{16}) = 5$  oraz  $C(F_{16})$  jest płaszczyzną.
- $F_{13} = (xy, 0)$ ,  $\dim O(F_{13}) = 8$  oraz  $C(F_{13})$  jest płaszczyzną.
- $F_{15} = (x^2, 0)$ ,  $\dim O(F_{15}) = 6$  oraz  $C(F_{15})$  jest płaszczyzną.
- $F_{17} = (0, 0)$ ,  $\dim O(F_{17}) = 2$  oraz  $C(F_{17})$  jest płaszczyzną.

## Klasyfikacja odwzorowań kwadratowych $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$ .

Dla  $\mu(G) = 1$  definiujemy krzywą samoprzecięcia jako zbiór

$$SI_G = \{x \in \mathbb{K}^2 : G^{-1}(G(x)) \text{ nie jest punktem prostym}\}$$

Na  $SI_G$  możemy wprowadzić strukturę schematu w następujący sposób: niech  $G = (g_1, g_2, g_3)$  oraz  $\pi : \mathbb{K}[x_1, y_1] \rightarrow \mathbb{K}[x_1, y_1, x_2, y_2]$  będzie inkluzją odpowiadającą rzutowaniu na pierwszą współrzędną  $\mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2$ . Niech  $I$  będzie ideałem generowanym przez  $g_i(x_1, y_1) - g_i(x_2, y_2)$  for  $i = 1, 2, 3$ . Wówczas  $SI_G$  definiujemy jako schemat odpowiadający ideałowi  $\pi^{-1}(I : (x_1 - x_2, y_1 - y_2))$ .

Klasyfikacja odwzorowań kwadratowych  $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$ .

Dla  $\mu(G) = 1$  definiujemy krzywą samoprzecięcia jako zbiór

$$SI_G = \{x \in \mathbb{K}^2 : G^{-1}(G(x)) \text{ nie jest punktem prostym}\}$$

Na  $SI_G$  możemy wprowadzić strukturę schematu w następujący sposób: niech  $G = (g_1, g_2, g_3)$  oraz  $\pi : \mathbb{K}[x_1, y_1] \rightarrow \mathbb{K}[x_1, y_1, x_2, y_2]$  będzie inkluzją odpowiadającą rzutowaniu na pierwszą współrzędną  $\mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2$ . Niech  $I$  będzie ideałem generowanym przez  $g_i(x_1, y_1) - g_i(x_2, y_2)$  for  $i = 1, 2, 3$ . Wówczas  $SI_G$  definiujemy jako schemat odpowiadający ideałowi  $\pi^{-1}(I : (x_1 - x_2, y_1 - y_2))$ .

Klasyfikacja odwzorowań kwadratowych  $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$ .

Dla  $\mu(G) = 1$  definiujemy krzywą samoprzecięcia jako zbiór

$$SI_G = \{x \in \mathbb{K}^2 : G^{-1}(G(x)) \text{ nie jest punktem prostym}\}$$

Na  $SI_G$  możemy wprowadzić strukturę schematu w następujący sposób: niech  $G = (g_1, g_2, g_3)$  oraz

$\pi : \mathbb{K}[x_1, y_1] \rightarrow \mathbb{K}[x_1, y_1, x_2, y_2]$  będzie inkluzją odpowiadającą rzutowaniu na pierwszą współrzędną  $\mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2$ . Niech  $I$  będzie ideałem generowanym przez  $g_i(x_1, y_1) - g_i(x_2, y_2)$  for  $i = 1, 2, 3$ . Wówczas  $SI_G$  definiujemy jako schemat odpowiadający ideałowi  $\pi^{-1}(I : (x_1 - x_2, y_1 - y_2))$ .

- (1)  $G_1 = (x^2 + y, y^2 + x, xy)$  z trzema punktami osobliwymi  $\left(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon^2}{2}\right)$  oraz  $SI_{G_1}$  jest sumą trzech linii  $y + \varepsilon x - \varepsilon^2 = 0$ , gdzie  $\varepsilon^3 = 1$  oraz  $\dim O(G_1) = 18$ . Ponadto,  $\mu(G_1) = 1$ .
- (2)  $G_2 = (x^2 + y, y^2 + x, xy + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y)$  z punktem osobliwym  $P_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  oraz  $P_2 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ . Ponadto,  $SI_{G_2} = V((x - y)^2(x + y - 1))$ ,  $\dim O(G_2) = 17$  oraz  $\mu(G_2) = 1$ .
- (3)  $G_3 = (x^2, y^2 + x, xy)$  z punktem osobliwym  $P = (0, 0)$ ,  $SI_{G_3} = V(x^3)$  oraz  $\dim O(G_3) = 16$ . Ponadto,  $\mu(G_3) = 1$ .
- (4)  $G_4 = (x^2, y^2, xy)$  z punktem osobliwym  $P = (0, 0)$ ,  $\mu(G_4) = 2$  oraz  $\dim O(G_4) = 14$ .
- (5)  $G_5 = (x^2, y^2, x + y)$  z punktem osobliwym  $P = (0, 0)$ ,  $SI_{G_5} = V(x + y)$  oraz  $\dim O(G_5) = 17$ . Ponadto,  $\mu(G_5) = 1$ .
- (6)  $G_6 = (x^2 + y, y^2, x)$ ,  $C(G_6) = \emptyset$  oraz  $\dim O(G_6) = 16$ . Ponadto,  $\mu(G_6) = 1$ .



- (7)  $G_7 = (F_1, 0)$ ,  $C(G_7) = \{4xy - 1 = 0\}$  oraz  $\dim O(G_7) = 15$ .  
Ponadto,  $\mu(G_7) = 4$ .
- (8)  $G_8 = (x^2, xy, y)$  z punktem osobliwym  $P = (0, 0)$ ,  
 $SI_{G_8} = V(y)$  oraz  $\dim O(G_8) = 16$ . Ponadto,  $\mu(G_8) = 1$ .
- (9)  $G_9 = (x^2 + y, xy, x)$ ,  $C(G_9) = \emptyset$  oraz  $\dim O(G_9) = 15$ .  
Ponadto,  $\mu(G_9) = 1$ .
- (10)  $G_{10} = (F_2, 0)$ ,  $C(G_{10}) = \{2x^2 - y = 0\}$  oraz  
 $\dim O(G_{10}) = 14$ . Ponadto,  $\mu(G_{10}) = 3$ .
- (11)  $G_{11} = (x^2, y^2, y)$ ,  $C(G_{11}) = SI_{G_{11}} = \{x = 0\}$  oraz  
 $\dim O(G_{11}) = 15$ . Ponadto,  $\mu(G_{11}) = 2$ .
- (12)  $G_{12} = (F_3, 0)$ ,  $C(G_{12}) = \{4xy = 0\}$  oraz  $\dim O(G_{12}) = 14$ .  
Ponadto,  $\mu(G_{12}) = 4$ .
- (13)  $G_{13} = (F_4, 0)$ ,  $C(G_{13}) = \{4xy = 0\}$  oraz  $\dim O(G_{13}) = 13$ .  
Ponadto,  $\mu(G_{13}) = 4$ .
- (14)  $G_{14} = (x^2, xy, x)$ ,  $C(G_{14}) = \{2x = 0\}$  oraz  
 $\dim O(G_{14}) = 14$ . Ponadto,  $\mu(G_{14}) = 1$ .

- (15)  $G_{15} = (F_5, 0)$ ,  $C(G_{15}) = \{2x^2 - x = 0\}$  oraz  $\dim O(G_{15}) = 13$ . Ponadto,  $\mu(G_{15}) = 2$ .
- (16)  $G_{16} = (F_6, 0)$ ,  $C(G_{16}) = \{x^2 = 0\}$  oraz  $\dim O(G_{16}) = 12$ . Ponadto,  $\mu(G_{16}) = 2$ .
- (17)  $G_{17} = (xy, x, y)$ ,  $C(G_{17}) = \emptyset$  oraz  $\dim O(G_{17}) = 14$ . Ponadto,  $\mu(G_{17}) = 1$ .
- (18)  $G_{18} = (x^2, x, y)$ ,  $C(G_{18}) = \emptyset$  oraz  $\dim O(G_{18}) = 13$ . Ponadto,  $\mu(G_{18}) = 1$ .
- (19)  $G_{19} = (F_7, 0)$ ,  $C(G_{19}) = \{y - x = 0\}$  oraz  $\dim O(G_{19}) = 13$ . Ponadto,  $\mu(G_{19}) = 2$ .
- (20)  $G_{20} = (F_8, 0)$ ,  $C(G_{20}) = \{x = 0\}$  oraz  $\dim O(G_{20}) = 12$ . Ponadto,  $\mu(G_{20}) = 1$ .
- (21)  $G_{21} = (F_9, 0)$ ,  $C(G_{21}) = \{2x = 0\}$  oraz  $\dim O(G_{21}) = 12$ . Ponadto,  $\mu(G_{21}) = 2$ .
- (22)  $G_{22} = (F_{10}, 0)$ ,  $C(G_{22}) = \emptyset$  oraz  $\dim O(G_{22}) = 11$ . Ponadto,  $\mu(G_{22}) = 1$ .

- (23)  $G_{23} = (F_{11}, 0)$ ,  $C(G_{23}) = \mathbb{C}^2$  oraz  $\dim O(G_{23}) = 10$ .
- (24)  $G_{24} = (F_{12}, 0)$ ,  $C(G_{24}) = \emptyset$  oraz  $\dim O(G_{24}) = 9$ . Ponadto,  $\mu(G_{24}) = 1$ .
- (25)  $G_{25} = (F_{13}, 0)$ ,  $C(G_{25}) = \mathbb{C}^2$  oraz  $\dim O(G_{25}) = 10$ .
- (26)  $G_{26} = (F_{14}, 0)$ ,  $C(G_{26}) = \mathbb{C}^2$  oraz  $\dim O(G_{26}) = 9$ .
- (27)  $G_{27} = (F_{15}, 0)$ ,  $C(G_{27}) = \mathbb{C}^2$  oraz  $\dim O(G_{27}) = 8$ .
- (28)  $G_{28} = (F_{16}, 0)$ ,  $C(G_{28}) = \mathbb{C}^2$  oraz  $\dim O(G_{28}) = 7$ .
- (29)  $G_{29} = (F_{17}, 0)$ ,  $C(G_{29}) = \mathbb{C}^2$  oraz  $\dim O(G_{29}) = 3$ .

Odwzorowanie  $G_1 = (x^2 + y, y^2 + x, xy)$  ma dość ciekawą geometrię (jak również każde odwzorowanie z  $O(G_1)$ ). Krzywa  $SI_{G_1}$  składa się z trzech linii  $x + \varepsilon^2 y - \varepsilon = 0$  tworzących trójkąt,  $\varepsilon^3 = 1$ . Punkty osobliwe  $(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon^2}{2})$  są dokładnie środkami boków tego trójkątu. Po obcięciu odwzorowania  $G_1$  do jednej krawędzi otrzymujemy

$$(x + \frac{\varepsilon}{2}, -\varepsilon x + \frac{\varepsilon^2}{2}) \mapsto (x^2 + \frac{3\varepsilon^2}{4}, \varepsilon^2 x^2 + \frac{3\varepsilon}{4}, -\varepsilon x^2 + \frac{1}{4}).$$

Powyższe obcięcie jest równoważne endomorfizmowi linii  $x \mapsto x^2$ . Wierzchołki trójkąta  $(-\varepsilon, -\varepsilon^2)$  są przeciwobrazem punktów potrójnych odwzorowania  $G_1$ .

## Klasyfikacja odwzorowań kwadratowych $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^4$ .

Dla  $\Omega_{\mathbb{C}^2}(2, 2, 2, 2)$  otrzymujemy 29 przypadków  $(g_1, g_2, g_3, 0)$  gdzie  $(g_1, g_2, g_3) = G_i$  dla  $1 \leq i \leq 29$ . Ponadto, otrzymujemy następujące przypadki

- (1)  $H_1 = (x^2 + y, y^2, xy, x)$  - odwzorowanie będące immersją.  
Ponadto,  $\dim O(H_1) = 24$ .
- (2)  $H_2 = (x^2, y^2, xy, x)$  z punktem osobliwym  $(0, 0)$ ,  
 $SI_{H_2} = \{x = 0\}$  oraz  $\dim O(H_2) = 23$ . Ponadto,  $\mu(H_2) = 1$ .
- (3)  $H_3 = (x^2, y^2, x, y)$  - odwzorowanie będące immersją.  
Ponadto,  $\dim O(H_3) = 22$ .
- (4)  $H_4 = (x^2, xy, x, y)$  - odwzorowanie będące immersją.  
Ponadto,  $\dim O(H_4) = 21$ .

## Klasyfikacja odwzorowań kwadratowych $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^4$ .

Dla  $\Omega_{\mathbb{C}^2}(2, 2, 2, 2)$  otrzymujemy 29 przypadków  $(g_1, g_2, g_3, 0)$  gdzie  $(g_1, g_2, g_3) = G_i$  dla  $1 \leq i \leq 29$ . Ponadto, otrzymujemy następujące przypadki

- (1)  $H_1 = (x^2 + y, y^2, xy, x)$  - odwzorowanie będące immersją.  
Ponadto,  $\dim O(H_1) = 24$ .
- (2)  $H_2 = (x^2, y^2, xy, x)$  z punktem osobliwym  $(0, 0)$ ,  
 $SI_{H_2} = \{x = 0\}$  oraz  $\dim O(H_2) = 23$ . Ponadto,  $\mu(H_2) = 1$ .
- (3)  $H_3 = (x^2, y^2, x, y)$  - odwzorowanie będące immersją.  
Ponadto,  $\dim O(H_3) = 22$ .
- (4)  $H_4 = (x^2, xy, x, y)$  - odwzorowanie będące immersją.  
Ponadto,  $\dim O(H_4) = 21$ .

## Klasyfikacja odwzorowań kwadratowych $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^4$ .

Dla  $\Omega_{\mathbb{C}^2}(2, 2, 2, 2)$  otrzymujemy 29 przypadków  $(g_1, g_2, g_3, 0)$  gdzie  $(g_1, g_2, g_3) = G_i$  dla  $1 \leq i \leq 29$ . Ponadto, otrzymujemy następujące przypadki

- (1)  $H_1 = (x^2 + y, y^2, xy, x)$  - odwzorowanie będące immersją.  
Ponadto,  $\dim O(H_1) = 24$ .
- (2)  $H_2 = (x^2, y^2, xy, x)$  z punktem osobliwym  $(0, 0)$ ,  
 $SI_{H_2} = \{x = 0\}$  oraz  $\dim O(H_2) = 23$ . Ponadto,  $\mu(H_2) = 1$ .
- (3)  $H_3 = (x^2, y^2, x, y)$  - odwzorowanie będące immersją.  
Ponadto,  $\dim O(H_3) = 22$ .
- (4)  $H_4 = (x^2, xy, x, y)$  - odwzorowanie będące immersją.  
Ponadto,  $\dim O(H_4) = 21$ .

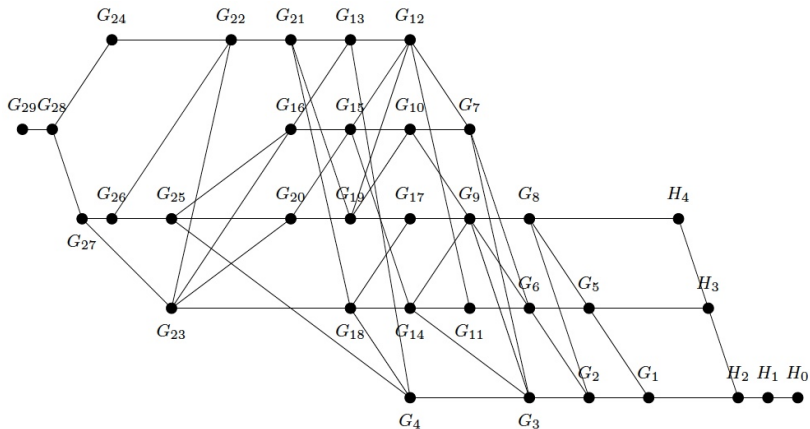
Klasyfikacja odwzorowań kwadratowych  $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^n$ ,  $n \leq 5$ .

Przypadkiem generycznym jest  $H_0 = (x^2, xy, y^2, x, y, 0, \dots, 0)$ ,  
 $\dim O(H_0) = 6n$ . Pozostałe przypadki otrzymujemy z  
 $\Omega_{\mathbb{C}^2}(2, 2, 2, 2)$  przez złożenie ze standardową inkluzją  $\mathbb{C}^4$  in  $\mathbb{C}^n$ .



Klasyfikacja odwzorowań kwadratowych  $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^n$ ,  $n \leq 5$ .

Przypadkiem generycznym jest  $H_0 = (x^2, xy, y^2, x, y, 0, \dots, 0)$ ,  
 $\dim O(H_0) = 6n$ . Pozostałe przypadki otrzymujemy z  
 $\Omega_{\mathbb{C}^2}(2, 2, 2, 2)$  przez złożenie ze standardową inkluzją  $\mathbb{C}^4$  in  $\mathbb{C}^n$ .



Każda kolumna składa się z orbit danego wymiaru, od najmniejszej do największej. Linia łącząca orbitę o mniejszym wymiarze z orbitą o większym wymiarze oznacza, że ta mniejsza jest zawarta w domknięciu tej większej. Do porównania orbit odwzorowania  $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^{n_1}$  i odwzorowania  $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^{n_2}$  dla  $n_1 < n_2$  składamy pierwsze ze standardową inkluzją  $\mathbb{C}^{n_1} \rightarrow \mathbb{C}^{n_2}$ .