**MATERIAŁY XX KONFERENCJI SZKOLENIOWEJ
Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ
ZESPOLONEJ**

1999 **Łódź** **str. 7**

PRZYKŁAD FREUDENBURGA DO CZTERNASTEGO PROBLEMU HILBERTA

Andrzej Nowicki (Toruń)

1 Wstęp

Niech k będzie ciałem. Niech $k[X] = k[x_1, \dots, x_n]$ oraz $k(X) = k(x_1, \dots, x_n)$ będą odpowiednio pierścieniem wielomianów i ciałem funkcji wymiernych nad k. Załóżmy, że L jest podciałem ciała $k(X)$ zawierającym k i rozważmy przekrój $L \cap k[X]$. Przekrój ten jest podpierścieniem pierścienia $k[X]$ zawierającym ciało k. Czternastym problemem Hilberta jest następujące pytanie.

Czy pierścień $L \cap k[X]$ jest skończenie generowany nad k ?

W 1956 roku Nagata ([8], [9]) wykazał (konstruując odpowiedni przykład), że odpowiedź na to pytanie może być negatywna. Liczba zmiennych w przykładzie Nagaty jest równa $n = 2r^2$, gdzie $r \geqslant 4$. Najmniejszą taką liczbą jest $n = 32$.

Załóżmy teraz, że d jest derywacją pierścienia $k[X]$, tzn., $d : k[X] \to k[X]$ jest k-liniowym odwzorowaniem takim, że $d(ab) = ad(b) + bd(a)$, dla wszystkich $a, b \in k[X]$. Niech $k[X]^d$ oznacza *pierścień stałych* tej derywacji, tzn.:

$$k[X]^d = \{a \in k[X];\ d(a) = 0\}.$$

Łatwo sprawdzić, że $k[X]^d = L \cap k[X]$, gdzie L jest ciałem ułamków pierścienia $k[X]^d$. Występujące tu ciało L jest oczywiście podciałem ciała $k(X)$ i zawiera k. Mamy zatem szczególny przypadek czternastego problemu Hilberta:

Czy pierścień $k[X]^d$ jest skończenie generowany nad k ?

Jeśli charakterystyka ciała k jest dodatnia, to wiadomo, że odpowiedź na to pytanie jest pozytywna ([13]). Dalej zakładać będziemy, że k jest ciałem charakterystyki zero.

W 1988 roku udowodniono (w [13]), że rozważany pierścień $k[X]^d$ jest skończenie generowany nad k w przypadku, gdy $n \leqslant 3$. Następnie Derksen [1] wykazał, że pierścień, występujący we wspomnianym wyżej przykładzie Nagaty, jest postaci $k[X]^d$. Wynika stąd, że (dla $n \geqslant 32$) istnieje derywacja pierścienia $k[X]$, której pierścień stałych nie jest skończenie generowany.

W 1990 roku P. Roberts [14] podał, dla $n = 7$, nowy kontrprzykład do czternastego problemu Hilberta. Roberts udowodnił, że pierścień stałych derywacji δ (pierścienia wielomianów $k[x, y, z, s, t, u, v]$) określonej wzorem

$$\delta = x^3 \frac{\partial}{\partial s} + y^3 \frac{\partial}{\partial t} + z^3 \frac{\partial}{\partial u} + x^2 y^2 z^2 \frac{\partial}{\partial v},$$

nie jest skończenie generowany nad k. Dowodowi tego faktu poświęcona jest praca [12]. Inne dowody znajdziemy w [2], [6], [4] (patrz również [5], [7]). Derywacja δ jest lokalnie nilpotentna (tzn., że dla każdego $f \in k[X]$ istnieje liczba naturalna n taka, że $\delta^n(f) = 0$).

Z przedstawionych faktów łatwo wynika, że dla każdego $n \geqslant 7$, istnieje derywacja pierścienia $k[X]$, której pierścień stałych nie jest skończenie generowany nad k. Wspomnieliśmy o skończonej generowalności dla $n \leqslant 3$. Pozostały zatem przypadki $n = 4$, $n = 5$ oraz $n = 6$.

Ostatnio zaatakowano przypadek $n = 6$. W 1998 roku Gene Freudenburg udowodnił:

Twierdzenie 1.1 ([4]). *Pierścień stałych derywacji Δ, pierścienia wielomianów $k[x, y, s, t, u, v]$, określonej wzorem*

$$\Delta = x^3 \frac{\partial}{\partial s} + y^3 s \frac{\partial}{\partial t} + y^3 t \frac{\partial}{\partial u} + x^2 y^2 \frac{\partial}{\partial v},$$

nie jest skończenie generowany nad k.

Celem tego artykułu jest przedstawienie dowodu powyższego twierdzenia. Podany tutaj dowód został opracowany na podstawie pracy Freudenburga [4].

2 Derywacja Δ i jej pierścień stałych

Niech $B = k[x, y, s, t, u, v]$ będzie pierścieniem wielomianów nad ciałem k (charakterystyki zero) sześciu zmiennych x, y, s, t, u, v. Niech $\Delta : B \to B$ będzie derywacją zdefiniowaną w Twierdzeniu 1.1. Derywacja ta jest jednoznacznie wyznaczona przez równości

$$D(x) = 0, \qquad D(y) = 0,$$
$$D(s) = x^3, \qquad D(t) = y^3 s, \qquad D(u) = y^3 t, \qquad D(v) = x^2 y^2.$$

Bez trudu stwierdzamy, że derywacja Δ jest lokalnie nilpotentna.
Stosować będziemy następujące oznaczenia:

$$\begin{array}{lcl} A & = & B^{\Delta} = \text{ pierścień stałych derywacji } \Delta, \\ I & = & \text{ideał w } B \text{ generowany przez zmienne } x \text{ i } y, \\ \mathcal{O} & = & k[s,t,u,v], \text{ pierścień wielomianów (zachodzi równość } B = \mathcal{O}[x,y]), \\ \Omega & = & x^3\mathcal{O} \oplus y^3\mathcal{O} \oplus x^2y^2\mathcal{O}, \text{ moduł wolny nad } \mathcal{O} \text{ o bazie } \{x^3, y^3, x^2y^2\}, \end{array}$$

Moduł Ω jest podmodułem $\mathcal{O}$-modułu B. Jest oczywiste, że $\Delta(\mathcal{O}) \subseteq \Omega$.

Stwierdzenie 2.1 ([4]). $A \subseteq k \oplus I$.

Przed dowodem tego stwierdzenia udowodnimy kilka lematów.

Lemat 2.2. $\Delta(I) \cap \Omega = \{0\}$.

Dowód. Oznaczmy przez M ideał w $k[x,y]$ generowany przez x i y. Niech $g \in I$. Wtedy $g = \sum m_i\sigma_i$, gdzie $m_i \in M$, $\sigma_i \in \mathcal{O}$. Stąd mamy:

$$\Delta(g) = \sum m_i\Delta(\sigma_i) \in \sum m_i \left(x^3\mathcal{O} \oplus y^3\mathcal{O} \oplus x^2y^2\mathcal{O}\right) \subseteq \textstyle\sum_{i+j\geqslant 4} x^iy^j\mathcal{O}.$$

Zatem $\Delta(g) \in \Omega \iff \Omega(g) = 0$, a więc $\Delta(I) \cap \Omega = \{0\}$. $\boxtimes$

Lemat 2.3. $k[s, 2su - t^2] \cap k[t,u] = k$.

Dowód. Oznaczmy: $w = 2su - t^2$. Elementy s i w są algebraicznie niezależne nad k. Mamy zatem dwa pierścienie wielomianów $k[s,w]$ i $k[t,u]$, bedące podpierścieniami pierścienia $k[s,t,u]$.

Niech $f \in k[s,w] \cap k[t,u]$. Wtedy

$$F_p(s)w^p + \cdots + F_1(s)w + F_0(s) = f = H_q(u)t^q + \cdots + H_1(u)t + H_0(u),$$

gdzie $F_p(s), \ldots, F_0(s) \in k[s]$, $H_q(u) + \ldots, H_0(u) \in k[u]$. Wstawiając $u = 0$, $t = 0$ otrzymujemy $w = 0$ i stąd $F_0(s) = H_0(0) \in k$, czyli

$$F_p(s)w^p + \cdots + F_1(s)w = H_q(u)t^q + \cdots + H_1(u)t + C(u)u,$$

gdzie $C(u)u = H_0(u) - H_0(0)$. Wstawiając teraz $s = 0$ i $t = 0$ stwierdzamy, że $C(u)u = 0$. Mamy zatem

$$\left(F_p(s)w^{p-1} + \cdots + F_1(s)\right) w = \left(H_q(u)t^{q-1} + \cdots + H_1(u)\right) t.$$

Ponieważ zmienne w i t są względnie pierwsze, więc $H_1(u) = \ldots = H_q(u) = 0$ oraz $F_1(s) = \ldots = F_p(s) = 0$ i stąd $f = F_0(s) = H_0(0) \in k$. $\boxtimes$

Lemat 2.4. *Niech d będzie derywacją pierścienia wielomianów $k[s,t,u]$ taką, że $d(s) = 0$, $d(t) = s$ i $d(u) = t$. Wtedy $k[s,t,u]^d = k[s, 2su - t^2]$.*

Dowód. Jest to dobrze znany fakt. Patrz na przykład [11] strona 71. ⊠

Lemat 2.5. $A \cap \mathcal{O} = k$.

Dowód. Niech $h \in A \cap \mathcal{O}$. Wtedy

$$\begin{aligned} 0 = \Delta(h) &= x^3 \tfrac{\partial h}{\partial s} + y^3 s \tfrac{\partial h}{\partial t} + y^3 t \tfrac{\partial h}{\partial u} + x^2 y^2 \tfrac{\partial h}{\partial v} \\ &= \tfrac{\partial h}{\partial s} x^3 + \left(s \tfrac{\partial h}{\partial t} + t \tfrac{\partial h}{\partial u}\right) y^3 + \tfrac{\partial h}{\partial v} x^2 y^2. \end{aligned}$$

Ponieważ $h \in \mathcal{O}$ więc ostatnia suma należy do Ω. Zatem $s\frac{\partial h}{\partial t} + t\frac{\partial h}{\partial u} = 0$, $\frac{\partial h}{\partial s} = 0$, $\frac{\partial h}{\partial v} = 0$. Stąd, na mocy lematu 2.4, h należy do przekroju $k[s, 2su - t^2] \cap k[t, u]$, który (patrz lemat 2.3) pokrywa się z ciałem k. Zatem $h \in k$. ⊠

Dowód Stwierdzenia 2.1. Niech f będzie wielomianem należącym do A. Wielomian ten możemy przedstawić w postaci $f = g - h$, gdzie $g \in I$ oraz $h \in \mathcal{O}$. Wtedy $0 = \Delta(f) = \Delta(g) - \Delta(h)$ i mamy:

$$\Delta(h) = \Delta(g) \in \Delta(I) \ \cap \ \Omega = \{0\}$$

(patrz Lemat 2.2). Zatem $h \in A$, a więc $h \in A \cap \mathcal{O} = k$ (Lemat 2.5) i stąd $f \in I \oplus k$. ⊠

Zanotujmy teraz następne stwierdzenie.

Stwierdzenie 2.6 ([4]). *Dla każdej liczby naturalnej $m \geqslant 1$ istnieją wielomiany β_0, β_1, ..., β_{3m-1} należące do $I^2 \cap k[x, y, s, t, u]$ takie, że wielomian*

$$xv^{3m} + \beta_{3m-1} v^{3m-1} + \cdots + \beta_1 v^1 + \beta_0$$

należy do pierścienia A.

Dowodem tego stwierdzenia zajmiemy się później. Teraz, przy pomocy powyższych faktów, udowodnimy główny wynik.

Dowód Twierdzenia 1.1. Przypuśćmy, że pierścień A jest skończenie generowany nad k. Istnieją wtedy wielomiany $f_1, \ldots, f_n \in A$ takie, że $A = k[f_1, \ldots, f_n]$. Możemy założyć, na mocy Stwierdzenia 2.1, że wielomiany te należą do ideału I. Rozważmy pierścień B modulo I^2. Jest jasne, że

$$B \bmod I^2 = 1 \cdot \mathcal{O} \oplus x \cdot \mathcal{O} \oplus y \cdot \mathcal{O}.$$

W szczególności, dla każdego $i \in \{1, \ldots, n\}$, istnieją elementy $a_i, b_i \in \mathcal{O}$ takie, że

$$f_i \equiv xa_i + yb_i \pmod{I^2}.$$

Oznaczmy przez r największą z liczb $\deg a_1, \ldots, \deg a_n$.

Niech teraz h będzie dowolnym wielomianem należącym do A. Wówczas $h = P(f_1, \ldots, f_n)$, gdzie $P = P(x_1, \ldots, x_n)$ jest wielomianem n zmiennych nad ciałem

k. Załóżmy, że część liniowa wielomianu P jest równa $L = c_0 + c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$, gdzie $c_0, c_1, \ldots, c_n \in k$. Mamy wtedy:

$$\begin{aligned} h &= P(f_1, \ldots, f_n) \\ &\equiv P(xa_1 + yb_1, \ldots, xa_n + yb_n) \\ &\equiv L(xa_1 + yb_1, \ldots, xa_n + yb_n) \\ &\equiv c_0 + x(c_1a_1 + \cdots + c_na_n) + y(c_1b_1 + \cdots + c_nb_n) \pmod{I^2}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że stopień wielomianu $c_1a_1 + \cdots + c_na_n$ nie przewyższa liczby r. Oznacza to, że każdy wielomian należący do A, rozpatrywany modulo I^2, ma przy zmiennej x współczynnik (należący do $\mathcal{O}$) stopnia $\leqslant r$. Zwróćmy uwagę, że omawiany współczynnik jest jednoznacznie wyznaczony.

Spójrzmy teraz na Stwierdzenie 2.6. Ze stwierdzenia tego wynika, że dla każdego $m \geqslant 1$, istnieje $h_m \in A$ takie, że

$$h_m \equiv xv^{3m} \pmod{I^2}$$

(bowiem wielomiany $\beta_0, \ldots, \beta_{3m-1}$, występujące w tym stwierdzeniu, należą do I^2). Zatem dla każdej liczby naturalnej m zachodzi nierówność $3m = \deg v^{3m} \leqslant r$. Otrzymana sprzeczność kończy dowód Twierdzenia 1.1. $\boxtimes$

Musimy jeszcze udowodnić Stwierdzenie 2.6. Poświęcamy temu następne rozdziały.

3 Derywacja D

Niech $R = k[a, b, s, t, u]$ będzie pierścieniem wielomianów nad k, pięciu zmiennych a, b, s, t, u. Oznaczmy przez D lokalnie nilpotentną derywację pierścienia R określoną wzorem:

$$D = a\tfrac{\partial}{\partial s} + bs\tfrac{\partial}{\partial t} + bt\tfrac{\partial}{\partial u}.$$

Jeżeli n jest liczbą naturalną, to przez t_n oznaczać będziemy wielomian z $k[a, b]$ zdefiniowany następująco:

$$t_n = \begin{cases} ab, & \text{gdy } n \equiv 0 \pmod 3, \\ a, & \text{gdy } n \equiv 1 \pmod 3, \\ b, & \text{gdy } n \equiv 2 \pmod 3. \end{cases}$$

Przy powyższych oznaczeniach można udowodnić:

Twierdzenie 3.1 ([4]). *Istnieje ciąg (w_n), wielomianów należących do R takich, że*

(1) $w_0 = 1$, $w_1 = s$, $w_2 = t$,

(2) $D(w_n) = t_nw_{n-1}$ *dla wszystkich* $n \in \mathbb{N}$ *oraz*

(3) $w_n \in aR + bR$ *dla* $n \geqslant 3$.

Dowodem tego twierdzenia zajmiemy się później. Najpierw pokażemy jak, korzystając z tego twierdzenia, można udowodnić Stwierdzenie 2.6.

Zanotujmy natychmiastowy

Wniosek 3.2. *Jeśli* (w_n) *jest ciągiem takim jak w* Twierdzeniu 3.1, *to*

$$D^{3i}(w_{3m}) = (ab)^{2i} w_{3(m-i)},$$

dla wszystkich $m \geqslant 1$, $0 \leqslant i \leqslant m$. ⊠

4 Elementy stałe derywacji lokalnie nilpotentnej

Załóżmy chwilowo, że d jest niezerową lokalnie nilpotentną derywacją pewnej dziedziny B zawierającej ciało k. Załóżmy ponadto, że $b \in B$ jest takim elementem, że $d(b) = 1$. Dobrze wiadomo (patrz na przykład [11] 63), że wtedy każdy element postaci

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!}(-b)^p d^p(r),$$

(gdzie $r \in B$) należy do B^d, pierścienia stałych derywacji d.

Derywacja d może jednak nie posiadać żadnego elementu b takiego, że $d(b) = 1$. Założyliśmy, że $d \neq 0$. Istnieje zatem zawsze element $c \in B$ taki, że $d(c) \neq 0$ i $d^2(c) = 0$. Dla takiego elementu c oznaczmy przez S podzbiór multyplikatywny w B skladający się ze wszystkich potęg $d(c)^n$, $n \geqslant 0$. Niech B_S będzie pierścieniem ułamków dziedziny B względem systemu S i niech d_S będzie naturalnym rozszerzeniem derywacji d do pierścienia B_S. Wówczas d_S jest derywacją lokalnie nilpotentną spełniającą warunek $d_S(b) = 1$ dla $b = c/d(c) \in B_S$. Stosując zatem powyższe fakty dla derywacji d_S i elementu $b = c/d(c)$ stwierdzamy, że każdy element postaci

$$\pi(r) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \left(\frac{-c}{d(c)}\right)^p d^p(r),$$

(gdzie $r \in B$) należy do $B_S^{d_S}$, pierścienia stałych derywacji d_S. Zanotujmy również oczywistą równość: $B_S^{d_S} \cap B = B^d$.

Dowód Stwierdzenia 2.6. Wróćmy teraz do poprzednich oznaczeń. Niech $R = k[a, b, s, t, u]$, $B = k[x, y, s, t, u, v]$ i niech D oraz Δ będą lokalnie nilpotentnymi derywacjami wprowadzonymi w poprzednich rozdziałach. Załóżmy, że

$$a = x^3, \quad b = y^3.$$

Wówczas R jest podpierścieniem pierścienia B i ograniczenie derywacji Δ do pierścienia R pokrywa się z derywacją D. Ponieważ $\Delta(v) = x^2y^2 \neq 0$ i $\Delta^2(v) = 0$, więc zmienna v spełnia te same warunki co rozpatrywany powyżej element c. Zatem każdy element postaci

$$\pi(r) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{1}{p!} x^{-2p} y^{-2p} \Delta^p(r) v^p,$$

(gdzie $r \in B$) należy do pierścienia ułamków pierścienia $A = B^{\Delta}$ względem systemu multyplikatywnego $\{\Delta(v)^n; n \geqslant 0\}$.

Niech teraz $m \in \mathbb{N}$ i niech $r = xw_{3m}$, gdzie w_{3m} jest wielomianem takim, jak w Twierdzeniu 3.1. Stwierdzamy wówczas bez trudu (na mocy Twierdzenia 3.1 i Wniosku 3.2), że element

$$(-1)^{3m}(3m)!\pi(xw_{3m})$$

jest wielomianem należącym do pierścienia A oraz, że wielomian ten jest postaci

$$xv^{3m} + \beta_{3m-1}v^{3m-1} + \cdots + \beta_1 v^1 + \beta_0,$$

gdzie $\beta_0, \ldots, \beta_{3m-1} \in k[x, y, s, t, u]$.

Wiemy ponadto (patrz Twierdzenie 3.1), że jeśli $n \geqslant 3$, to $w_n \in aR + bR = x^3R + y^3R$. Z tego wynika, że wszystkie wielomiany postaci β_n należą do ideału I^2. W ten sposób udowodniliśmy Stwierdzenie 2.6. ⊠

W powyższym dowodzie wykorzystaliśmy Twierdzenie 3.1, którego jeszcze nie udowodniliśmy. Zajmiemy się tym w następnym rozdziale.

5 Własności derywacji D

Powracamy do derywacji D pierścienia $R = k[a, b, s, t, u]$. Przypomnijmy, że D jest lokalnie nilpotentną derywacją taką, że

$$D(a) = 0, \quad D(b) = 0, \quad D(s) = a, \quad D(t) = bs, \quad D(u) = bt.$$

Wprowadzamy $\mathbb{Z}^3$-gradację w pierścieniu R przyjmując:

$$\begin{array}{lll} \deg a = (1, 0, 0), & \deg b = (0, 1, 0), & \\ \deg s = (1, 0, 1), & \deg t = (1, 1, 2), & \deg u = (1, 2, 3). \end{array}$$

W szczególności $\deg t_{3m} = (1, 1, 0)$, $\deg t_{3m+1} = (1, 0, 0)$, $\deg t_{3m+2} = (0, 1, 0)$, dla wszystkich $m \geqslant 0$. Względem takiej gradacji derywacja D jest jednorodna stopnia $(0, 0, -1)$.

Zakładamy, że czytelnik zna podstawowe pojęcia i fakty dotyczące pierścieni z gradacją oraz derywacji jednorodnych.

Jeżeli $n \geqslant 1$, to przez δ_n oznaczać będziemy element z $\mathbb{Z}^n$ zdefiniowany wzorem

$$\delta_n = (0, 0, n) + \textstyle\sum_{j=1}^{n} \deg t_j.$$

Przyjmujemy dodatkowo, że $\delta_0 = (0, 0, 0)$. Zauważmy, że dla wszystkich $m \geqslant 0$ zachodzą równości:

$$\begin{array}{rcl} \delta_{3m} & = & (2m, 2m, 3m), \\ \delta_{3m+1} & = & (2m+1, 2m, 3m+1), \\ \delta_{3m+2} & = & (2m+1, 2m+1, 3m+2). \end{array}$$

Pamiętamy, że musimy udowodnić jeszcze Twierdzenie 3.1. Udowodnimy więcej. Pokażemy, że można skonstruować wielomiany postaci (w_n), o których mowa w Twierdzeniu 3.1, spełniające dodatkowe warunki. Udowodnimy następujące

Twierdzenie 5.1 ([4]). *Istnieje ciąg (w_n), wielomianów należących do R takich, że*

(1) $w_0 = 1$, $w_1 = s$, $w_2 = t$,

(2) $D(w_n) = t_n w_{n-1}$ *dla wszystkich* $n \in \mathbb{N}$,

(3) $w_n \in aR + bR$ *dla* $n \geqslant 3$,

(4) $w_n \in aR$, *dla wszystkich* $n > 1$ *takich, że* $n \equiv 1 \pmod 3$, *oraz*

(5) $\deg w_n = \delta_n$ *dla wszystkich* $n \in \mathbb{N}$.

Przed dowodem wprowadźmy jeszcze pewne oznaczenia i udowodnimy dwa lematy. Jeśli $p, q \in \{0, 1, 2\}$, to przez $\gamma(p, q)$ oznaczać będziemy element należący do zbioru $\{1, a, b, b/a\}$ zdefiniowany następującą tabelką.

$\gamma(0,0) = 1$	$\gamma(0,1) = b$	$\gamma(0,2) = b$
$\gamma(1,0) = 1$	$\gamma(1,1) = 1$	$\gamma(1,2) = a$
$\gamma(2,0) = 1$	$\gamma(2,1) = b/a$	$\gamma(2,2) = 1$

Rozważać będziemy również funkcję $\lambda : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \{1, a, b, b/a\}$ określoną wzorem

$$\lambda(m, n) = \gamma(m \bmod 3, m \bmod 3).$$

dla wszystkich $m, n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Zwróćmy uwagę, że jeśli $m \equiv 2 \pmod 3$ i $n \equiv 1 \pmod 3$, to $\lambda(m, n) = b/a$. W pozostałych przypadkach $\lambda(m, n)$ należy do $k[a, b]$.

Lemat 5.2. *Jeśli* $1 \leqslant i \leqslant m$, *to:*

$$t_{m-i}\lambda(m, i) = t_m \lambda(m-1, i) \quad \textit{oraz} \quad t_i \lambda(m, i) = t_m \lambda(m-1, i-1).$$

Dowód. Niech $m \equiv 0 \pmod 3$, $i \equiv 0 \pmod 3$. Wtedy $t_{m-i}\lambda(m,i) = ab\gamma(0,0) = ab$, $t_m\lambda(m-1,i) = ab\gamma(2,0) = ab$, więc $t_{m-i}\lambda(m,i) = t_m\lambda(m-1,i)$. Ponadto $t_i\lambda(m,i) = ab\gamma(0,0) = ab$, $t_m\lambda(m-1,i-1) = ab\gamma(2,2) = ab$, czyli $t_i\lambda(m,i) = t_m\lambda(m-1,i-1)$. W podobny sposób sprawdzamy wszystkie pozostałe przypadki. ⊠

Lemat 5.3. *Niech* $n \geqslant 3$. *Załóżmy, że* $w_0 = 1, w_1, \ldots, w_n$ *jest ciągiem jednorodnych wielomianów z pierścienia* R *spełniającym następujące własności.*

(*a*) $\deg w_m = \delta_m$ *dla* $m = 1, \ldots, n$,

(*b*) $D(w_m) = t_m w_{m-1}$ *dla* $m = 1, \ldots, m$, *oraz*

(*c*) $w_m \in aR$, *dla wszystkich* $1 < m \leqslant n$ *takich, że* $m \equiv 1 \pmod 3$.

Oznaczmy: $\boxed{\xi_{(m,i)} = \xi_{(m,m-i)} = \lambda(m,i) w_i w_{m-i}}$,

dla wszystkich m, i *takich, że* $3 \leqslant m \leqslant n$, $0 \leqslant i \leqslant m/2$. *Zachodzą wówczas następujące własności.*

(A_1) $\xi_(m, i)$ *jest zawsze wielomianem należącym do* $aR + bR$.

(A_2) *Jeśli* $i > 1$, $m \equiv 1 \pmod 3$, *to* $\xi_{(m,i)} \in aR$.

(A_3) $\xi_{(m,i)}$ *jest wielomianem jednorodnym stopnia* δ_m.

(A_4) $D\left(\xi_{(m,i)}\right) = t_m\left(\xi_{(m-1,i)} + \xi_{(m-1,i-1)}\right)$, *dla wszystkich* $m \geqslant 4$, $1 \leqslant i \leqslant m$.

Dowód. Sprawdzamy to bez trudu rozpatrując wszystkie przypadki w zależności od reszt z dzielenia przez 3 liczb m oraz i. W dowodzie własności (A_4) wykorzystujemy Lemat 5.2. ⊠

Dowód Twierdzenia 5.1. Wielomiany w_n skonstruujemy indukcyjnie w sześcioelementowych blokach. Najpierw określamy wielomiany $w_1, w_2, \ldots, w_7$.

$$\begin{aligned}
w_1 &= s, \\
w_2 &= t, \\
w_3 &= au, \\
w_4 &= aus - (1/2)at^2, \\
w_5 &= (3/5)bus^2 - (3/10)sbt^2 - (1/5)atu, \\
w_6 &= (1/7)(2bw_1w_5 + bw_2w_4 - w_3^2), \\
w_7 &= (1/7)(2aw_2w_5 - w_3w_4).
\end{aligned}$$

Wielomiany te spełniają żądane warunki.

Załóżmy teraz, że wielomiany $w_1, w_2, \ldots, w_{6m-5}$, gdzie $m \geqslant 2$, zostały już skonstruowane. Skonstruujemy wielomiany

$$w_{6m-4},\ w_{6m-2},\ w_{6m-3},\ w_{6m-1},\ w_{6m+1},\ w_{6m},$$

w takiej kolejności, jak je teraz wypisaliśmy.

$\boxed{w_{6m-4}}$ Wielomian ten definiujemy wzorem:

$$(A_5) \qquad w_n = \xi_{(n,1)} - \xi_{(n,2)} + \xi_{(n,3)} - \cdots + (-1)^s \xi_{(n,s-1)} + \tfrac{1}{2}(-1)^{s+1}\xi_{(n,s)},$$

gdzie $n = 6m-4$, $s = \frac{n}{2} = 3m-2$. Łatwo sprawdza się, że spełnione są wszystkie warunki od (1) do (5). Wykorzystujemy w tym celu Lemat 5.3. W dowodzie warunku (2) korzystamy z własności (A_4) oraz z oczywistej równości: $\xi_{(n-1,s)} = \xi_{(n-1,s-1)}$.

$\boxed{w_{6m-2}}$ Niech $n = 6m-2$, $s = \frac{n}{2} = 3m-1$. W tym przypadku mamy zdefiniowane już wielomiany $\xi_{(n,i)}$ dla $i = 2, 3, \ldots, s$ i z łatwością sprawdzamy, że wszystkie te wielomiany należą do aR. Wielomian w_n, którego teraz chcemy skonstruować, będzie miał postać

$$(A_6) \qquad w_n = c_1\xi_{(n,2)} + c_2\xi_{(n,3)} + \cdots + c_{s-2}\xi_{(n,s-1)} + c_{s-1}\xi_{(n,s)},$$

gdzie $c_1, \ldots, c_{s-1}$ są pewnymi liczbami wymiernymi. Działając na równość (A_6) derywacją D otrzymujemy (dzięki własności (A_4)):

$$(A_7) \qquad \begin{aligned}
t_n^{-1}D(w_n) \;=\;& c_1\xi_{(n-1,1)} + (c_1+c_2)\xi_{(n-1,2)} + (c_2+c_3)\xi_{(n-1,3)} \\
& + \cdots + \\
& (c_{s-2}+c_{s-1})\xi_{(n-1,s-1)} + c_{s-1}\xi_{(n-1,s)}.
\end{aligned}$$

Działając na tę równość jeszcze raz derywacją D i korzystając z równości $\xi_{(n-2,s)} = \xi_{(n-2,s-1)}$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}(t_n t_{n-1})^{-1} D(w_n) \;\; = \;\; & c_1 w_{n-2} + (2c_1 + c_2)\xi_{(n-2,1)} \\ & + (c_1 + 2c_2 + c_3)\xi_{(n-2,2)} + (c_2 + 2c_3 + c_4)\xi_{(n-2,3)} \\ & + \cdots \\ & + (c_{s-4} + 2c_{s-3} + c_{s-2})\xi_{(n-2,s-3)} \\ & + (c_{s-3} + 2c_{s-2} + 2c_{s-1})\xi_{(n-2,s-2)} \\ & + (c_{s-2} + 2c_{s-1})\xi_{(n-2,s-1)}.\end{aligned}$$

Pojawił się wielomian w_{n-2}, który jest już nam znany. Zamieniając w_{n-2} sumą (naprzemienną) podaną w (A_5) dochodzimy do układu równań liniowych postaci $\mathbb{A}c = y$, gdzie

$$c = (c_1, \ldots, c_{s-1})^T, \quad y = \left(1, -1, 1, \ldots, (-1)^{s-1}, \frac{1}{2}(-1)^s\right)^T$$

oraz $\mathbb{A}$ jest $(s-1)\times(s-1)$ macierzą o wymiernych współczynnikach. Obliczamy bez trudu, że wyznacznik tej macierzy jest niezerowy. Wyznacznik ten jest równy $(n-1)$. $\mathbb{A}c = y$ jest zatem układem Cramera. Mamy więc wymierne liczby $c_1, \ldots, c_{s-1}$, które (przy pomocy (A_6)) wyznaczają wielomian w_n. Zanotujmy, że $c_1 = (n-3)(n-1)^{-1}$, $c_2 = 1 - 3c_1$, $c_3 = -1 - 2c_2$, itd. Łatwo pokazać, że

$$(A_8) \qquad c_1 > 0, \; c_2 < 0, \; c_3 > 0, \; \ldots.$$

Jest jasne, że wielomian ten spełnia wszystkie warunki od (1) do (5), ale bez warunku (2). Warunku (2) nie możemy sprawdzić, gdyż nie mamy jeszcze wielomianu w_{n-1}.

$\boxed{w_{6m-3}}$ Niech n będzie takie, jak poprzednio, tzn. $n = 6m - 2$. Wtedy $6m - 3 = n - 1$. Z poprzedniej konstrukcji wielomianu w_n wiemy, że $a \mid w_n$. Ponieważ $D(a) = 0$, więc stąd wynika, że wielomian a dzieli wielomian $D(w_n)$. Definiujemy w_{n-1} przyjmując

$$w_{n-1} = a^{-1} D(w_n).$$

Mamy wówczas równość (2) dla wielomianu w_n, tzn. $D(w_n) = t_n w_{n-1}$. Ponieważ $D^2(w_n) = a^2 b w_{n-2}$, więc $D(w_{n-1}) = ab w_{n-2} = t_{n-1} w_{n-2}$. Zauważmy ponadto (patrz (A_7)), że wielomian w_{n-1} jest kombinacją liniową nad $\mathbb{Q}$ pewnych wielomianów postaci $\xi_{(m,i)}$. Wnioskujemy stąd (na mocy (A_1)), że $w_{n-1} \in aR + bR$.

$\boxed{w_{6m-1}}$ Teraz przyjmujemy: $n = 6m - 1$, $s = \frac{n-1}{2} = 3m - 1$. Wielomian w_n, którego chcemy skonstruować, będzie miał postać:

$$(A_9) \qquad w_n = d_1 \xi_{(n,1)} + d_2 \xi_{(n,2)} + \cdots + d_s \xi_{(n,s)}$$

gdzie $d_1, \dots, d_s$ są pewnymi liczbami wymiernymi. Działając na powyższą równość derywacją D i zamieniając wielomian w_{n-1} równością (A_6) dochodzimy do układu równań liniowych $\mathbb{B}d = c'$, gdzie

$$c' = (0, c_1, \dots, c_{s-1})^T, \quad y = (d_1, d_2, \dots, d_s)^T$$

oraz $\mathbb{B}$ jest $s \times s$ macierzą postaci

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ c_{s-2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ c_{s-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wyznacznik tej macierzy jest równy $1 - \sum_{i=1}^{s-1}(-1)^{i+1}c_i$, a więc na mocy (A_8) jest różny od zera. Mamy zatem wielomian w_n, określony równością (A_9). Wielomian ten spełnia oczywiście wszystkie warunki od (1) do (5). Ponadto, łatwo wykazać, że

$$(A_{10}) \qquad d_1 > 0,\ d_2 < 0,\ d_3 > 0,\ \dots.$$

$\boxed{w_{6m+1}}$ Teraz zakładamy, że $n = 6m+1$ oraz $s = \frac{n-1}{2} = 3m$. Mamy już zdefiniowane wielomiany $\xi_{(n,2)}$, $\xi_{(n,3)}$, …, $\xi_{(n,s)}$ i bez trudu sprawdzamy, że wszystkie te wielomiany należą do aR. Szukamy wielomianu w_n w postaci

$$(A_{11}) \qquad w_n = e_1\xi_{(n,2)} + e_2\xi_{(n,3)} + \dots + e_{s-1}\xi_{(n,s)},$$

gdzie $e_1, \dots, e_{s-1}$ są liczbami wymiernymi. Działając na powyższą równość dwukrotnie derywacją D i stosując równość (A_9) dochodzimy (dzięki (A_4)) do układu równań liniowych postaci $\mathbb{E}e = d$, w którym

$$e = (e_1, \dots, e_{s-1})^T, \quad y = (d_1, d_2, \dots, d_{s-1})^T$$

oraz $\mathbb{E}$ jest $(s-1) \times (s-1)$ macierzą postaci

$$\mathbb{E} = \begin{bmatrix} d_1+2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_2+1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_3 & 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_4 & 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & \vdots \\ d_{s-3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 1 & 0 \\ d_{s-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ d_{s-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Wykorzystaliśmy oczywistą równość $\xi_{(n-2,s)} = \xi_{(n-2,s-1)}$. Wyznacznik macierzy $\mathbb{E}$ jest równy

$$(n-2) + \sum_{i=1}^{s-1}(n-2i-2)d_i.$$

Dzięki (A_{10}) stwierdzamy szybko, że wyznacznik ten jest różny od zera. Mamy zatem wielomian w_n. Jest jasne, że wielomian ten spełnia wszystkie warunki od (1) do (5), ale bez warunku (2). Warunku (2) nie możemy sprawdzić, gdyż nie mamy jeszcze wielomianu w_{n-1}.

$\boxed{w_{6m}}$ Niech n będzie takie, jak poprzednio, tzn. $n = 6m + 1$. Wtedy $6m = n - 1$. Z poprzedniej konstrukcji wielomianu w_n wiemy, że $a \mid w_n$. Ponieważ $D(a) = 0$, więc stąd wynika, że wielomian a dzieli wielomian $D(w_n)$. Definiujemy w_{n-1} przyjmując

$$w_{n-1} = a^{-1}D(w_n).$$

Mamy wówczas równość (2) dla wielomianu w_n, tzn. $D(w_n) = t_n w_{n-1}$. Bez trudu sprawdzamy (podobnie jak to było z wielomianem w_{6m-3}), że spełnione są wszystkie warunki od (1) do (5). To kończy dowód Twierdzenia 5.1. ⊠

W ten sposób udowodniliśmy wszystkie fakty, z których korzystaliśmy w dowodzie Twierdzenia 1.1.

Uwaga 5.4 ([4]). Pierścień stałych powyższej derywacji D jest skończenie generowany nad k. Można udowodnić, korzystając ze znanego algorytmu van den Essena [3] (patrz [11]), że pieścień R^D jest generowany przez 5 następujących wielomianów:

$$a,\ b,\ 2aw_2 - bw_1^2,\ 3aw_3 - 3abw_1w_2 + b^2w_1^3,\ 10bw_1w_5 - 16bw_2w_4 + 9w_3^2.$$

6 Przykład Robertsa

Niech $B_7 = k[x, y, z, s, t, u, v]$ będzie pierścieniem wielomianów nad k siedmiu zmiennych. Ustalamy gradację na B_7 taką, że zmienne x, y, z mają stopień 0, a pozostałe zmienne, s, t, u i v, mają stopień 1. Rozważmy derywację $\delta : B_7 \to B_7$ określoną równościami:

$$\begin{array}{llll} \delta(x) = 0, & \delta(y) = 0, & \delta(z) = 0, & \\ \delta(s) = x^3, & \delta(t) = y^3, & \delta(u) = z^3, & \delta(v) = x^2y^2z^2. \end{array}$$

Derywacja ta jest lokalnie nilpotentną derywacją jednorodną stopnia -1.

W 1990 roku P. Roberts [14] udowodnił:

Twierdzenie 6.1. *Pierścień stałych derywacji δ nie jest skończenie generowany nad k.*

Dowód tego twierdzenia jest długi. W opracowaniu [12] zajmuje przeszło 20 stron, z których większość (wszystkie strony oprócz dwóch) przeznaczono na dowód następującego stwierdzenia.

Stwierdzenie 6.2 ([14] Lemma 3). *Dla każdego $n \geqslant 0$ istnieje jednorodny wielomian, należący do pierścienia stałych B_7^δ, w którym występuje jednomian xv^n ze współczynnikiem równym 1.*

Gene Freudenburg w omawianej pracy [4] podaje krótki dowód Stwierdzenia 6.2, oparty na Stwierdzeniu 2.6. Przedstawiamy teraz ten dowód.

Dowód Freudenburga. Niech h_1, h_2 i h_3 będą wielomianami z $k[x, y, z, s, t, u]$ zdefiniowanymi następująco:

$$\begin{aligned} h_1 &= s, \\ h_2 &= \tfrac{1}{2}(z^3st + y^3su - x^3tu), \\ h_3 &= \tfrac{1}{6}(y^6su^2 + z^6st^2 + y^3z^3stu - x^3y^3tu^2 - x^3z^3ut^2). \end{aligned}$$

Sprawdzamy bez trudu, że wielomiany te spełniają równości:

$$\delta(h_3) = y^3z^3h_2, \quad \delta(h_2) = y^3z^3h_1, \quad \delta(h_1) = x^3.$$

Definiujemy teraz homomorfizm $\varphi : B = k[x, y, s, t, u, v] \to B_7$ przyjmując:

$$\varphi(x) = x, \quad \varphi(y) = yz, \quad \varphi(s) = h_1, \quad \varphi(t) = h_2, \quad \varphi(u) = h_3, \quad \varphi(v) = v.$$

Homomorfizm ten, jak łatwo sprawdzić, spełnia równość $\delta\varphi = \varphi\Delta$. Zatem $\varphi(A) \subseteq B_7^\delta$, gdzie $A = B^\Delta$.

Wykazaliśmy (patrz Stwierdzenie 2.6), że dla każdego $m \geqslant 1$ istnieją wielomiany $\beta_{3m-1}, \ldots, \beta_0$ należące do $k[x, y, s, t, u]$ takie, że wielomian $xv^{3m} + \beta_{3m-1}v^{3m-1} + \cdots + \beta_0$ należy do pierścienia A. W dowodzie wykorzystaliśmy postać wielomianu $\pi(xw_{3m})$. Powtarzając to samo dla wielomianów $\pi(xw_{3m+1})$ i $\pi(xw_{3m+2})$ stwierdzamy, że dla każdej liczby $n \geqslant 1$ istnieją wielomiany $\beta_0, \ldots, \beta_{n-1} \in k[x, y, s, t, u]$ takie, że wielomian

$$xv^n + \beta_{n-1}v^{n-1} + \cdots + \beta_1 v^1 + \beta_0$$

należy do A. Działając teraz na powyższy wielomian homomorfizmem φ otrzymujemy wielomian z B_7, należący do pierścienia stałych derywacji δ, który posiada jednomian xv^n ze współczynnikiem równym jeden. Rozważmy składową jednorodną stopnia n tego wielomianu. Ponieważ derywacja δ jest jednorodna, składowa ta należy do pierścienia stałych i oczywiście zawiera xv^n. ⊠

References

[1] H. G. J. Derksen, *The kernel of a derivation*, J. Pure Appl. Algebra **84**(1993), 13 – 16.

[2] J.K. Deveney, D.R. Finston, *G_a actions on $\mathbb{C}^3$ and $\mathbb{C}^7$*, Communications in Algebra **22**(1994), 6295 - 6302.

[3] A. van den Essen, *An algorithm to compute the invariant ring of a G_a-action on an affine variety*, J. Symbolic Computation, **16**(1993), 551 – 555.

[4] G. Freudenburg, *A counterexample to Hilbert's Fourteenth Problem in dimension six*, Preprint, 1998.

[5] T. Janssen, *Kernels of elementary derivations*, Preprint, 1995.

[6] H. Kojima, M. Miyanishi, *On P. Roberts' counterexample to the fourteenth problem of Hilbert*, J. Pure Appl. Algebra **122**(1997), 277-292.

[7] S. Maubach, *Hilbert* 14 *and related subjects*, Preprint, Nijmegen 1998.

[8] M. Nagata, *Lectures on the Fourteenth Problem of Hilbert,* Lect. Notes **31**, Tata Institute, Bombay, 1965.

[9] M. Nagata, *On the fourteenth problem of Hilbert*, Proc. Intern. Congress Math., 1958, 459 – 462, Cambridge Univ. Press, New York, 1966.

[10] A. Nowicki, *Rings and fields of constants for derivations in characteristic zero*, J. Pure Appl. Algebra, **96**(1994), 47 - 55.

[11] A. Nowicki, *Polynomial derivations and their rings of constants*, UMK, Toruń, 1994.

[12] A. Nowicki, *Przykład Robertsa do czternastego problemu Hilberta*, Materiały XIX Konferencji Szkoleniowej z Geometrii Analitycznej i Algebraicznej, Łódź, Bronisławów, 1998, 19 - 44.

[13] A. Nowicki, M. Nagata, *Rings of constants for k-derivations in $k[x_1, \dots, x_n]$*, J. Math. Kyoto Univ., **28**(1988), 111 – 118.

[14] P. Roberts, *An infinitely generated symbolic blow-up in a power series ring and a new counterexample to Hilbert's fourteenth problem,* J. Algebra **132**(1990), 461 – 473.

Freudenburg's counterexample to the fourteenth problem of Hilbert

Summary. Let $B = k[x, y, s, t, u, v]$ be the polynomial ring in six variables over a field k of characteristic zero and let $\Delta : B \to B$ be the derivation of B defined by the equalities:

$$D(x) = D(y) = 0,\ D(s) = x^3,\ D(t) = y^3 s,\ D(u) = y^3 t,\ D(v) = x^2 y^2.$$

It is known (Gene Freudenburg 1998) that the ring of constants with respect to Δ is not finitely genereted over k. In the paper a proof of this fact is given.

Łódź, 11 – 15 stycznia, 1999 r.