MATERIAŁY NA XXX KONFERENCJĘ SZKOLENIOWĄ Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ ZESPOLONEJ

2009 **Łódź** **str. 19**

WYKŁADNIK ŁOJASIEWICZA OSOBLIWOŚCI NIEZDEGENEROWANYCH

Grzegorz Oleksik (Łódź)

Streszczenie

W pracy podajemy pewne oszacowania wykładnika Łojasiewicza osobliwości niezdegenerowanych w sensie Kusznirenki w terminach ich diagramów Newtona. Uzyskane rezultaty stanowią wzmocnienie nierówności Fukui [F] w przypadku, gdy diagram Newtona zawiera ściany wyjątkowe. Są one również wielowymiarowym uogólnieniem wyników Lenarcika [L].

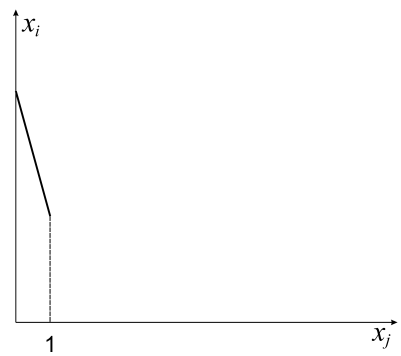
Wstęp

Niech $f : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ będzie funkcją holomorficzną w pewnym otoczeniu $0 \in \mathbb{C}^n$ oraz niech $\sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} a_\nu z^\nu$ będzie jej rozwinięciem w szereg Taylora o środku w zerze. Określmy zbiór $\Gamma_+(f) := \operatorname{conv}\{\nu + \mathbb{R}^n_+ : a_\nu \neq 0\} \subset \mathbb{R}^n$ i nazwijmy go *diagramem Newtona* funkcji f. Rodzinę wszystkich zwartych ścian dodatniego wymiaru zawartych w brzegu $\partial\Gamma_+(f)$ diagramu $\Gamma_+(f)$ będziemy nazywać *brzegiem Newtona* funkcji f i oznaczać przez $\Gamma(f)$. Dla każdej zwartej ściany $S \in \Gamma(f)$ określamy wielomian quasijednorodny $f_S := \sum_{\nu \in S} a_\nu z^\nu$. Powiemy, że f jest *niezdegenerowana w sensie Kusznirenki*, jeśli dla dowolnej ściany $S \in \Gamma(f)$ układ równań $\frac{\partial f_S}{\partial z_1} = \ldots = \frac{\partial f_S}{\partial z_n} = 0$ nie posiada rozwiązań w $(\mathbb{C}^*)^n$, gdzie $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. *Osobliwością* nazywamy funkcję holomorficzną w pewnym otoczeniu zera taką, że

$f(0) = 0$ i $\nabla f(0) = 0$. *Osobliwością izolowaną* nazywamy osobliwość, która posiada izolowany punkt krytyczny w 0, tzn. $\nabla f(z) \neq 0$ dla $z \neq 0$.

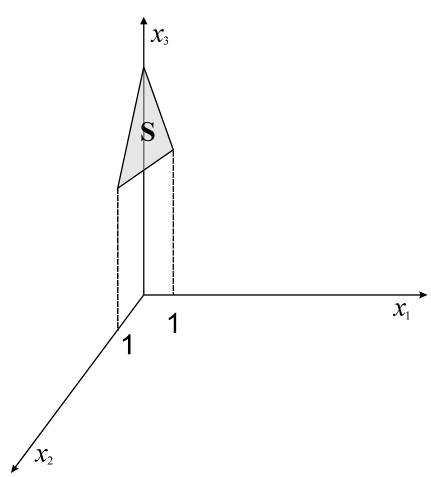
Niech $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Definicja 1 *Odcinkiem wyjątkowym w $\mathbb{R}^n$ względem osi Ox_i będziemy nazywać odcinek leżący w płaszczyźnie Ox_ix_j dla pewnego $j \in \{1, \ldots, n\}$, $j \neq i$, którego jeden koniec leży na osi Ox_i a drugi koniec jest odległy o 1 od osi Ox_i* (por. [L]).



Rys. 1 Odcinek wyjątkowy względem osi Ox_i.

Definicja 2 *Ścianą wyjątkową w $\mathbb{R}^n$ względem osi Ox_i nazywamy $(n-1)$-wymiarowy sympleks o tej własności, że jego przecięcie z każdą z płaszczyzn Ox_ix_j, $j \in \{1, \ldots, n\}$, $j \neq i$, jest odcinkiem wyjątkowym względem osi Ox_i.*



Rys. 2 Ściana wyjątkowa S względem osi Ox_3.

Definicja 3 *Diagram Newtona funkcji f nazywamy dogodnym, jeśli ma niepuste przecięcie z każdą z osi układu współrzędnych.*

Definicja 4 *Diagram Newtona funkcji f nazywamy niemal dogodnym, jeśli jego odległość od każdej z osi układu współrzędnych nie przekracza 1.*

Dla każdej $(n-1)$-wymiarowej ściany $S \in \Gamma(f)$ oznaczamy przez $x_1(S), \ldots, x_n(S)$ współrzędne w $\mathbb{R}^n$ przecięcia hiperpłaszczyzny wyznaczonej przez ścianę S z osiami układu współrzędnych. Łatwo sprawdzić, że diagram Newtona $\Gamma_+(f)$ dowolnej osobliwości izolowanej f jest niemal dogodny. Oznacza to, że ńiemal dogodność"diagramu Newtona jest warunkiem koniecznym bycia osobliwością izolowaną. Przy założeniu niedegeneracji jest to również warunek wystarczający dla $n=2$.

Własność 1 *Jeśli osobliwość $f : (\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ jest niezdegenerowana w sensie Kusznirenki i jej diagram Newtona $\Gamma_+(f)$ jest niemal dogodny, to osobliwość f jest izolowana.*

Dowód: Przypuśćmy nie wprost, że osobliwość f nie jest izolowana. Wówczas istnieje niezerowa parametryzacja Puiseux $\Phi = (\phi_1, \phi_2)$, $\phi_1, \phi_2 \in \mathbb{C}\{t\}^*$ taka, że $\nabla f \circ \Phi = 0$ tzn. $f'_{z_1} \circ \Phi = 0$, $f'_{z_2} \circ \Phi = 0$. Zauważmy najpierw, że parametryzacja Φ nie jest postaci $\Phi(t) = (0,t)$ lub $\Phi(t) = (t,0)$. Istotnie, w przeciwnym wypadku f byłaby postaci $f(z_1,z_2) = z_1^2\, g_1(z_1,z_2)$ lub $f(z_1,z_2) = z_2^2\, g_2(z_1,z_2)$, co jest sprzeczne z niemal dogodnością diagramu $\Gamma(f)$. Zatem $\Phi(t) = (t, \phi(t))$ lub $\Phi(t) = (\psi(t), t)$, ψ, $\phi \neq 0$. Przyjmijmy dla ustalenia uwagi, że $\Phi(t) = (t, \phi(t))$. Z twierdzenia Newtona-Puisex wynika, że parametryzacji Φ odpowiadają odcinki $S_1 \in \Gamma(f'_{z_1})$ i $S_2 \in \Gamma(f'_{z_2})$ takie, że $(f'_{z_1})_{S_1}(\operatorname{in}\Phi) = 0$ i $(f'_{z_2})_{S_2}(\operatorname{in}\Phi) = 0$ oraz

$$\operatorname{ord}(\phi(t)) = \frac{x_1(S_1)}{x_2(S_1)} = \frac{x_1(S_2)}{x_2(S_2)}.$$

Zauważmy, że również $f \circ \Phi = 0$, a więc z twierdzenia Newtona-Puiseux istnieje odcinek $S \in \Gamma(f)$ taki, że $f_S(t, \operatorname{in}\phi(t)) = 0$ i $\operatorname{ord}(\phi(t)) = \frac{x_1(S)}{x_2(S)}$. Oznacza to, że odcinki S, S_1, S_2 mają takie samo nachylenie. Stąd wynika, że S_1, S_2 pochodzą od wspólnego niewyjątkowego odcinka S, tzn. $S_1 = S-(1,0)$, $S_2 = S-(0,1)$. Wówczas $\nabla f_S(t, \operatorname{in}\phi(t)) = 0$, co oznacza degenerację f na odcinku S, co daje sprzeczność. $\square$

Dla dogodnego diagramu Newtona osobliwości f określamy liczbę

$$m_0(f) := \max_{S\in\Gamma(f),\, \dim S = n-1} \{x_1(S), \ldots, x_n(S)\}.$$

Łatwo widać, że jest to maksimum odległości punktów przecięcia diagramu Newtona z osiami współrzędnych od środka układu.

Uwaga. Dla funkcji dwóch zmiennych takiej, że jej diagram Newtona nie jest dogodny definiujemy liczbę $m_0(f)$ identycznie jak powyżej. Dla funkcji n-zmiennych, $n > 2$ takiej, że jej diagram Newtona nie jest dogodny definicja liczby $m_0(f)$ znajduje się w pracy Fukui [F]. Wszystkie prezentowane w pracy wyniki są prawdziwe dla $m_0(f)$ zdefiniowanego zarówno dla diagramów Newtona dogodnych jak i takich, które nie są dogodne.

Niech $f = (f_1, \ldots, f_n) : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ będzie odwzorowaniem holomorficznym posiadającym izolowane zero. Określamy liczbę

$$l_0(f) := \inf\{\alpha \in \mathbb{R}_+ : \exists_{C>0}\exists_{r>0}\forall_{\|z\|<r}\|f(z)\| \geqslant C\|z\|^\alpha\}$$

i nazywamy ją *wykładnikiem Łojasiewicza* odwzorowania f. Załóżmy, że $f : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ jest osobliwością izolowaną. Możemy wówczas zdefiniować liczbę $\pounds_0(f) := l_0(\nabla f)$. Będziemy ją nazywać *wykładnikiem Łojasiewicza* osobliwości f. Podstawowe własności wykładnika Łojasiewicza to (zob. [L-T]):

a) $\pounds_0(f)$ jest liczbą wymierną.
b) $\pounds_0(f) = \sup\{\frac{\mathrm{ord}\nabla f(z(t))}{\mathrm{ord}\, z(t)} : z(t) \in \mathbb{C}\{t\}^n,\ z(0) = 0\}$.
c) Kres dolny w definicji wykładnika Łojasiewicza jest osiągnięty dla $\alpha = \pounds_0(f)$.

W przypadku, gdy f jest osobliwością dwóch zmiennych z_1, z_2 oznaczamy przez I_f zbiór odcinków należących do $\Gamma(f)$ i wyjątkowych względem osi Ox_1 lub Ox_2. A. Lenarcik podał w swojej pracy [L] wzór na wykładnik Łojasiewicza osobliwości dwóch zmiennych, niezdegenerowanej w sensie Kusznirenki , w terminach diagramu Newtona. Mówi o tym następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1 [L] *Niech $f : (\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ będzie osobliwością izolowaną i niezdegenerowaną w sensie Kusznirenki oraz niech $\Gamma(f) \setminus I_f \neq \emptyset$. Wówczas*

$$\pounds_0(f) = \max_{S\in\Gamma(f)\setminus I_f}\{x_1(S), x_2(S)\} - 1.$$

Uwaga. Dla osobliwości izolowanych takich, że $\Gamma(f)\setminus I_f = \emptyset$, tzn. dla których brzeg diagramu Newtona składa się tylko z odcinków wyjątkowych, mamy $\pounds_0(f) = 1$.

W przypadku wielowymiarowym znane jest oszacowanie podane w 1991 r. przez Fukui.

Twierdzenie 2 [F] *Niech $f : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ będzie osobliwością izolowaną i niezdegenerowaną w sensie Kusznirenki. Wówczas*

$$\pounds_0(f) \leqslant m_0(f) - 1.$$

Główne rezultaty

Podamy teraz dwa lematy potrzebne w dowodzie głównego twierdzenia.

Lemat 1 [P1, Lemat 1.4] *Niech $f = (f_1, \ldots, f_n)$, $g = (g_1, \ldots, g_n) : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ będą odwzorowaniami holomorficznymi w pewnym otoczeniu zera i niech f posiada izolowane zero. Jeśli $\mathrm{ord}(g - f) > l_0(f)$, to g posiada izolowane zero oraz $l_0(g) = l_0(f)$.*

Lemat 2 *Niech* $f : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ *będzie osobliwością izolowaną i niezdegenerowaną w sensie Kusznirenki oraz* $\operatorname{ord} f(0, \ldots, 0, z_n) = m_0(f)$. *Jeśli* $g(z_1, \ldots, z_n) := f(z_1, \ldots, z_n) - f(0, \ldots, 0, z_n)$ *nie jest osobliwością izolowaną, to* $\pounds_0(f) = m_0(f) - 1$.

Dowód: Ponieważ g nie jest osobliwością izolowaną, to istnieje niezerowa parametryzacja $\Phi(t) = (\phi_1(t), \ldots, \phi_n(t))$, $\phi_i \in \mathbb{C}\{t\}$ taka, że $\nabla g \circ \Phi = 0$. Zauważmy, że $g'_{z_i} = f'_{z_i}$, $i = 1, \ldots, n-1$ oraz $f'_{z_n} = g'_{z_n} + f'_{z_n}(0, \ldots, 0, z_n)$. Stąd wynika, że $\phi_n \neq 0$. Istotnie, gdyby $\phi_n = 0$, to ∇f nie miałby izolowanego zera, co jest sprzeczne z założeniem. Z własności b) wykładnika Łojasiewicza mamy

$$\begin{aligned} \pounds_0(f) &\geqslant \frac{\operatorname{ord}(\nabla f \circ \Phi)}{\operatorname{ord} \Phi} = \frac{\operatorname{ord} f'_{z_n}(0, \ldots, 0, \phi_n(t))}{\operatorname{ord} \Phi} = \frac{(m_0(f) - 1) \operatorname{ord} \phi_n}{\operatorname{ord} \Phi} \geqslant \\ &\geqslant \frac{(m_0(f) - 1) \operatorname{ord} \phi_n}{\operatorname{ord} \phi_n} = m_0(f) - 1. \end{aligned}$$

A zatem $\pounds_0(f) \geqslant m_0(f) - 1$. Z drugiej strony z tw. 2 wynika, że $\pounds_0(f) \leqslant m_0(f) - 1$. Reasumując $\pounds_0(f) = m_0(f) - 1$, co kończy dowód lematu. □

Podamy teraz główne wyniki pracy.

Twierdzenie 3 *Niech* $f : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ *będzie osobliwością izolowaną i niezdegenerowaną w sensie Kusznirenki oraz* $S \in \Gamma(f)$ *będzie ścianą wyjątkową względem osi* Ox_n. *Określmy* $g(z_1, \ldots, z_n) := f(z_1, \ldots, z_n) - f(0, \ldots, 0, z_n)$ *i załóżmy, że* $m_0(g) < m_0(f) = x_n(S)$. *Wówczas*

a) Jeśli g *jest osobliwością izolowaną, to*

$$\pounds_0(f) = \pounds_0(g) \leqslant m_0(g) - 1.$$

b) Jeśli g *nie jest osobliwością izolowaną, to*

$$\pounds_0(f) = m_0(f) - 1.$$

Dowód: a) Z określenia fukcji g mamy, że $\Gamma(g) = \Gamma(f) \setminus S$, czyli $\Gamma(g)$ składa się ze wszystkich ścian $\Gamma(f)$ z wyjątkiem ściany wyjątkowej S. Stąd z niedegeneracji f wynika niedegeneracja g. Zatem z tw. 2 mamy, że $\pounds_0(g) \leqslant m_0(g) - 1$. Mamy dalej $g'_{z_i} = f'_{z_i}$, $i = 1, \ldots, n-1$ oraz $g'_{z_n} = f'_{z_n} - f'_{z_n}(0, \ldots, 0, z_n)$. Zauważmy ponadto, że $\operatorname{ord} f(0, \ldots, 0, z_n) = x_n(S)$. Stąd

$$\begin{aligned} \operatorname{ord}(\nabla g - \nabla f) &= \min_{i=1}^{n}[\operatorname{ord}(g'_{z_i} - f'_{z_i})] = \operatorname{ord}(g'_{z_n} - f'_{z_n}) = \operatorname{ord} f'_{z_n}(0, \ldots, 0, z_n) = \\ &= x_n(S) - 1 = m_0(f) - 1 > m_0(g) - 1 \geqslant \pounds_0(g), \end{aligned}$$

czyli $\operatorname{ord}(\nabla g - \nabla f) > \pounds_0(g)$. Zatem z lematu 1 otrzymujemy, że $\pounds_0(f) = \pounds_0(g)$. Reasumując $\pounds_0(f) = \pounds_0(g) \leqslant m_0(g) - 1$, co kończy dowód części a).

b) Jak już zauważyliśmy w dowodzie części a) $\operatorname{ord} f(0, \ldots, 0, z_n) = x_n(S) = m_0(f)$, więc spełnione są założenia lematu 2. Stąd $\pounds_0(f) = m_0(f) - 1$, co kończy dowód części b) i całego twierdenia. □

Twierdzenie to można uogólnić na przypadek, gdy do brzegu diagramu Newtona $\Gamma(f)$ należy więcej niż jedna ściana wyjątkowa.

Twierdzenie 4 *Niech $f : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ będzie osobliwością izolowaną i niezdegenerowaną w sensie Kusznirenki oraz $S_1, \ldots, S_i \in \Gamma(f)$ będą ścianami wyjątkowymi odpowiednio względem osi $Ox_1, \ldots, Ox_i$ dla pewnego $i \leqslant n$. Określmy $g(z_1, \ldots, z_n) := f(z_1, \ldots, z_n) - \sum_{k=1}^{i} f(0, \ldots, z_k, \ldots, 0)$ i załóżmy, że $m_0(g) < \min_{k=1}^{i} x_k(S_k)$. Wówczas*

a) Jeśli g jest osobliwością izolowaną, to

$$\pounds_0(f) = \pounds_0(g) \leqslant m_0(g) - 1.$$

b) Jeśli g nie jest osobliwością izolowaną, to

$$\min_{k=1}^{i} x_k(S_k) - 1 \leqslant \pounds_0(f) \leqslant m_0(f) - 1.$$

Dowód części a) powyższego twierdzenia przebiega anologicznie jak w twierdzeniu 3, dowód pkt b) przebiega podobnie jak dowód lematu 2.

Uwaga. Łatwo zauważyć, że twierdzenie 4 jest prawdziwe dla dowolnego układu ścian $S_{k_1}, \ldots, S_{k_i}$ wyjątkowych względem odpowiednio osi $Ox_{k_1}, \ldots, Ox_{k_i}$, $k_1, \ldots, k_i \in \{1, \ldots, n\}$, $i \leqslant n$.

Przykład. Niech $f(z_1, z_2, z_3) := z_3^{20} + z_1^2 + z_2^2 + z_3^4 z_1 + z_3^4 z_2$. Łatwo sprawdzić, że jest to osobliwość izolowana i niezdegenerowana w sensie Kusznirenki. Zauważmy, że ściana $S \in \Gamma(f)$, $S = \operatorname{conv}\{(1, 0, 4), (0, 1, 4), (0, 0, 20)\}$ jest wyjątkowa względem osi Ox_3 oraz $m_0(f) = x_3(S) = 20$. Z nierówności Fukui (tw.2) mamy $\pounds_0(f) \leqslant m_0(f) - 1 = 20 - 1 = 19$. Określmy funkcję $g(z_1, z_2, z_3) := f(z_1, z_2, z_3) - z_3^{20}$. Łatwo sprawdzamy, że g jest osobliwością izolowaną oraz $m_0(g) = 8 < x_3(S) = m_0(f)$. Wówczas z twierdzenia 3 mamy $\pounds_0(f) = \pounds_0(g) \leqslant m_0(g) - 1 = 8 - 1 = 7$, czyli to oszacowanie jest istotnie lepsze niż wynikające z nierówności Fukui. Ponieważ g jest osobliwością quasijednorodną, to na mocy wyników pracy [KOP] mamy, że $\pounds_0(f) = 7$, czyli uzyskane przez nas oszacowanie jest optymalne.

Wyprowadzimy z tw. 4 pewien wniosek dla $n = 2$ będący de facto nierównością w "jedną stronę" w tw. 1.

Wniosek 1 *Niech $f : (\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ będzie osobliwością izolowaną i niezdegenerowaną w sensie Kusznirenki oraz niech $\Gamma(f) \setminus I_f \neq \emptyset$. Wówczas*

$$\pounds_0(f) \leqslant \max_{S \in \Gamma(f) \setminus I_f} \{x_1(S), x_2(S)\} - 1.$$

Dowód: Jeśli $I_f = \emptyset$, to teza wynika wprost z tw. 2 dla $n = 2$. Załóżmy więc w dalszym ciągu, że $I_f \neq \emptyset$. Zauważmy na początku, że dla odcinka $S_i \in \Gamma(f)$ wyjątkowego względem osi Ox_i $\max\{x_1(S_i), x_2(S_i)\} = x_i(S_i)$, $i = 1, 2$. Rozważmy przypadki:

I. I_f składa się z dwóch odcinków wyjątkowych S_1, S_2 względem odpowiednio osi Ox_1, Ox_2. Określamy wówczas funkcję $g(z_1, z_2) := f(z_1, z_2) - f(z_1, 0) - f(0, z_2)$. Zauważmy, że $\Gamma(g) = \Gamma(f) \setminus \{S_1, S_2\}$ i $m_0(g) < m_0(f)$. Zatem z niedegeneracji f wynika niedegeneracja g i z własności 1 otrzymujemy, że g jest osobliwością izolowaną. Rozważmy podprzypadki:

(i) $m_0(g) < \min\{x_1(S_1), x_2(S_2)\}$. Wówczas spełnione są założenia twierdzenia 4 w części a). Zatem

$$Ł_0(f) = Ł_0(g) \leqslant m_0(g) - 1 = \max_{S \in \Gamma(f) \setminus I_f} \{x_1(S), x_2(S)\} - 1,$$

co kończy dowód w tym przypadku.

(ii) $m_0(g) \geqslant \min\{x_1(S_1), x_2(S_2)\}$. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że $m_0(g) \geqslant x_1(S_1)$. Wtedy $x_1(S_1) < x_2(S_2)$. Istotnie, w przeciwnym wypadku $m_0(g) \geqslant \max\{x_1(S_1), x_2(S_2)\} = m_0(f)$, co jest sprzeczne z określeniem g. Określmy wówczas funkcję $g_1(z_1, z_2) := f(z_1, z_2) - f(0, z_2)$. Zauważmy, że wtedy $\Gamma(g_1) = \Gamma(f) \setminus \{S_2\}$ oraz $m_0(g_1) < x_2(S_2)$. Stąd z niedegenaracji f wynika niedegeneracja g_1 i z własności 1 mamy, że g_1 jest osobliwością izolowaną. Zauważmy ponadto, że $m_0(g_1) \geqslant m_0(g) \geqslant x_1(S_1)$. Stąd stosując ponownie tw. 4 dostajemy, że

$$\begin{aligned} Ł_0(f) &= Ł_0(g_1) \leqslant m_0(g_1) - 1 = \max_{S \in \Gamma(f) \setminus \{S_2\}} \{x_1(S), x_2(S)\} - 1 = \\ &= \max_{S \in \Gamma(f) \setminus I_f} \{x_1(S), x_2(S)\} - 1, \end{aligned}$$

co kończy dowód w tym przypadku.

II. I_f składa się z jednego odcinka wyjątkowego. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że jest nim odcinek S_1 wyjątkowy względem osi Ox_1. Określamy wówczas funkcję $g(z_1, z_2) := f(z_1, z_2) - f(z_1, 0)$. Zauważmy, że $\Gamma(g) = \Gamma(f) \setminus \{S_1\}$. Zatem z niedegeneracji f wynika niedegeneracja g i z własności 1 otrzymujemy, że g jest osobliwością izolowaną. Rozważmy podprzypadki:

(i) $m_0(g) < x_1(S_1)$. Dowód przebiega anologicznie jak w I (i)

(ii) $m_0(g) \geqslant x_1(S_1)$. Wówczas $m_0(g) = m_0(f)$ i z twierdzenia 2 mamy

$$Ł_0(f) \leqslant m_0(f) - 1 = m_0(g) - 1 = \max_{S \in \Gamma(f) \setminus I_f} \{x_1(S), x_2(S)\},$$

co kończy dowód w tym przypadku. □

Problem 1 Czy wniosek 1 jest prawdziwy dla osobliwości n zmiennych, $n > 2$?

Problem 2 Czy własność 1 jest prawdziwa dla osobliwości n zmiennych, $n > 2$?

Literatura

[F] T. Fukui, *Łojasiewicz type inequalities and Newton Diagrams,* Proc. Amer. Math. Soc. 112(1991), 1169-1183.

[KOP] T. Krasiński, G. Oleksik, A. Płoski, *The Łojasiewicz exponent of an isolated weighted homogeneous surface singularity,* Proc. Amer. Math. Soc. (przyjęte do druku).

[L] A. Lenarcik, *On the Łojasiewicz exponent of the gradient of a holomorphic function,* Banach Center Publications 44(1998), 149-166.

[L-J] M. Lejeune-Jalabert, B. Teissier, *Clôture intégrale des idéaux et équisingularité,* Centre de Mathématiques, École Polytechnique, 1974.

[Ł] S. Łojasiewicz, *Wstęp do geometrii analitycznej*, PWN, Warszawa 1980.

[P1] A. Płoski, *Sur l'exposant d'une application analytique II,* Bulletin of the Polish Academy of Sciences Mathematics, 32,3-4(1985), 123-127.

[P2] A. Płoski, *Szeregi Puiseux, diagramy Newtona i odwzorowania holomorficzne płaszczyzny* $\mathbb{C}^2$, Materiały X Konferencji Szkoleniowej z Teorii Zagadnień ekstremalnych, Łódź(1989), 74-99.

The Łojasiewicz exponent of nondegenarate singularities

Summary. In the article we give some estimations of the Łojasiewicz exponent of the Kusznirenko non-degenerate singularity in terms of its Newton diagram. The results are stronger than Fukui inequality [F] in the case Newton diagram contains exceptional faces. It is also a multidimensional generalization of the Lenarcik theorem [L].

Łódź, 12 – 16 stycznia 2009 r.