O krotności niewłaściwej

Grzegorz Oleksik, Adam Różycki,

Instytut Matematyki Politechniki Poznańskiej,

Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego

Krotność niewłaściwa

(R.Achilles, P.Tworzewski, T.Winiarski, 1990)

$V, Z \subset \mathbb{C}^m$ - zbiory analityczne, $\dim V = q$, $\dim Z = r$, $q + r < m$.

Krotność niewłaściwego przecięcia izolowanego: zbioru V z podrozmaitością Z w punkcie $p \in V \cap Z$, to liczba

$$i(V \cdot Z; p) := \min\{i(V \cdot W; p) \colon W \in \mathcal{F}_p(V, Z)\}.$$

$i(V \cdot W; p) -$ krotność Drapera.
$\mathcal{F}_p(V, Z)$ - rodzina zbiorów $W \subset \mathbb{C}^m$ spełniających warunki:

- $\dim W = m - q$ $(= \operatorname{codim} V)$,

O krotności niewłaściwej

Krotność niewłaściwa

(R.Achilles, P.Tworzewski, T.Winiarski, 1990)

$V, Z \subset \mathbb{C}^m$ - zbiory analityczne, $\dim V = q$, $\dim Z = r$, $q + r < m$.

Krotność niewłaściwego przecięcia izolowanego: zbioru V z podrozmaitością Z w punkcie $p \in V \cap Z$, to liczba

$$i(V \cdot Z; p) := \min\{i(V \cdot W; p) \colon W \in \mathcal{F}_p(V, Z)\}.$$

$i(V \cdot W; p) -$ krotność Drapera.
$\mathcal{F}_p(V, Z)$ - rodzina zbiorów $W \subset \mathbb{C}^m$ spełniających warunki:

- $\dim W = m - q$ $(= \operatorname{codim} V)$,
- $Z_p \subset W_p$,

Krotność niewłaściwa

(R.Achilles, P.Tworzewski, T.Winiarski, 1990)

$V, Z \subset \mathbb{C}^m$ - zbiory analityczne, $\dim V = q$, $\dim Z = r$, $q + r < m$.

Krotność niewłaściwego przecięcia izolowanego: zbioru V z podrozmaitością Z w punkcie $p \in V \cap Z$, to liczba

$$i(V \cdot Z; p) := \min\{i(V \cdot W; p) \colon W \in \mathcal{F}_p(V, Z)\}.$$

$i(V \cdot W; p) -$ krotność Drapera.
$\mathcal{F}_p(V, Z)$ - rodzina zbiorów $W \subset \mathbb{C}^m$ spełniających warunki:

- $\dim W = m - q$ $(= \operatorname{codim} V)$,
- $Z_p \subset W_p$,
- p - punkt izolowany $V \cap W$.

O krotności niewłaściwej

$f : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^m, 0)$, $m > n$ - kiełek w 0 odwz. nadokreślonego o izolowanym zerze.

Krotność niewłaściwa

Krotność odwzorowania f w punkcie 0 to krotność przecięcia niewłaściwego:

$$i_0(f) := i(\operatorname{graph} f \cdot (\mathbb{C}^n \times \{0\}); (0,0)).$$

Krotność niewłaściwa

Twierdzenie (S.Spodzieja, 2000). Dla generycznego odwzorowania liniowego $L\colon \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^n$ takiego, że 0 jest zerem izolowanym $L \circ f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ mamy

$$i_0(f) = m_0(L \circ f) - \text{ krotnośc nakryciowa.}$$

O krotności niewłaściwej

Przykład

Niech

$$f\colon (\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$$

dane wzorem

$$f(x, y) = (x^2, xy, y^2).$$

Oczywiście

$$f^{-1}(0) = \{0\}.$$

Połóżmy

$$L(u, v, w) = (u + v + w, 2u - 3v + 5w).$$

Mamy

$$i_0(f) = m_0(L \circ f) = m_0(x^2 + xy + y^2, 2x^2 - 3xy + 5y^2) = 2 \cdot 2 = 4.$$

Diagramy Newtona

Twierdzenie (L.A.Ajzenberg, A.P.Yuzhakow, 2000).

Niech $f = (f_1, \ldots, f_n)\colon (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ będzie niezdegerowana w sensie Mondala oraz

$$\Gamma = ND(f_1) = \cdots = ND(f_n), \quad \Gamma - \text{ dogodny }.$$

Wówczas

$$m_0(f) = n! \cdot V_n^-(\Gamma).$$

$V_n^-(\Gamma) -$ objętość stożka o środku w 0 rozpiętego na Γ.

Diagramy Newtona

Układ $(f_1, \dots, f_m)$ jest niezdegenerowany w zerze, gdy dla każdego wektora $v = (v_1, \dots, v_n)$, v_i - całkowite dodatnie,

$$\mathrm{In}_v\, f_1 = \cdots = \mathrm{In}_v\, f_m = 0$$

nie posiada rozwiązań w $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$

Diagramy Newtona

Układ $(f_1, \ldots, f_m)$ jest niezdegenerowany w zerze w sensie Mondala, gdy

$$(f_1|_{\mathbb{C}^J}, \ldots, f_m|_{\mathbb{C}^J})$$

jest niezdegenerowany w zerze dla każdego $J \subset \{1, \ldots, n\}$.

$\mathbb{C}^J = \{z \in \mathbb{C}^n \colon z_i = 0,\ i \notin J\}$

$f = (f_1, \ldots, f_m) \colon (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^m, 0)$, $m > n$, $f^{-1}(0) = \{0\}$.

$\Gamma = ND(\,\mathrm{supp}\, f_1 \cup \cdots \cup \mathrm{supp}\, f_m\,)$ - dogodny diagram Newtona f.

Twierdzenie

Jeśli f_j są jednomianami, to

$$i_0(f) = n! \cdot V_n^-(\Gamma).$$

O krotności niewłaściwej

$f = (f_1, \dots, f_m)\colon (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^m, 0),\ m > n,\ f^{-1}(0) = \{0\}.$

$\Gamma = ND(\ \mathrm{supp}\, f_1 \cup \dots \cup \mathrm{supp}\, f_m\ )$ - dogodny diagram Newtona f.

Hipoteza

Jeśli f jest niezdegenerowany w zerze w sensie Mondala, to

$$i_0(f) = n! \cdot V_n^-(\Gamma).$$

O krotności niewłaściwej

Dziękuję za uwagę!