MATERIAŁY VII KONFERENCJI SZKOLENIOWEJ
Z TEORII ZAGADNIEŃ EKSTREMALNYCH

1986 Łódź s. 80

O NIEZMIENNIKACH OSOBLIWOŚCI KRZYWYCH ANALITYCZNYCH

A. Płoski (Kielce)

0. WSTĘP. W artykule przedstawiono fragment teorii osobliwości krzywych analitycznych, koncentrując uwagę na zagadnieniach związanych z liczbą Milnora. Teoria krzywych jest najstarszym działem geometrii algebraicznej i jednym ze starszych działów nowożytnej matematyki. Nie zamieszczone w tym artykule wiadomości historyczne Czytelnik znajdzie w [1], [2], [4] i [5]. O uogólnieniach przedstawionej teorii na przypadek osobliwości izolowanych hiperpowierzchni można się dowiedzieć z prac [9] i [13]. W opracowaniu części artykułu o podstawowych własnościach liczby Milnora najbardziej użyteczny był dodatek do pracy F. Phama [10] i praca J. Rislera [12]. Czytelnik może porównać przedstawione ujęcie zagadnienia z odpowiednim fragmentem wykładu J. Milnora [9].

Autor korzysta z okazji, aby serdecznie podziękować Pani Zofii Denkowskiej, która podarowała mu trudno dostępne wykłady O. Zariskiego [14].

1. PIERŚCIENIE SZEREGÓW POTĘGOWYCH. Rozpoczniemy od przypomnienia podstawowych faktów dotyczących szeregów potęgowych ograniczając się dla ustalenia uwagi do najbardziej nas interesującego przypadku szeregów dwóch zmiennych o współczynnikach zespolonych. Systematyczny wykład zagadnień tu przedstawionych można znaleźć w monografii [6].

Pierścień zbieżnych szeregów potęgowych $\mathbb{C}\{x,y\}$ składa się z szeregów postaci

$$\sum_{i,j\geq 0} a_{ij}x^i y^j$$

zbieżnych w (zależnym od szeregu) otoczeniu zera przestrzeni $\mathbb{C}^2$. Dodawanie i mnożenie szeregów, różniczkowanie a także podstawienie w szeregu na miejsce zmiennych innych szeregów definiujemy formalnie, nie odwołując się do pojęcia zbieżności, podobnie jak w wykładzie algebry wprowadza się odpowiednie działania dla wielomianów. Wypisany wyżej szereg oznaczamy również

$f(x,y)$ lub krótko f, notujemy wtedy $f(0,0) = a_{oo}$, a szeregi spełniające warunek $f(0,0) = 0$ nazywamy szeregami bez stałego wyrazu. Jeśli szereg f jest niezerowy, to istnieje liczba naturalna k taka, że $a_{ij} = 0$ dla $i + j < k$ oraz $a_{ij} \neq 0$ dla pewnych i,j spełniających warunek $i + j = k$. Liczbę k oznaczamy ord f i nazywamy rzędem szeregu f natomiast formę jednorodną będącą sumą wszystkich jednomianów stopnia ord f występujących w szeregu f i oznaczamy in f. W odniesieniu do pierścienia $\mathbb{C}\{x,y\}$ będziemy używać pojęć teorii podzielności. Pierścień $\mathbb{C}\{x,y\}$ nie ma nietrywialnych dzielników zera, szereg $u = u(x,y)$ jest dzielnikiem jedynki wtedy i tylko wtedy, gdy $u(0,0) \neq 0$. Dalej piszemy $f \sim g$, jeśli $f = ug$ dla pewnego dzielnika jedynki u.

Pierścienie szeregów potęgowych są pierścieniami z jednoznacznością rozkładu na czynniki, dowód tego faktu podobnie jak innych głębszych własności opiera się na twierdzeniu przygotowawczym Weierstrassa, które przypominamy niżej.

TWIERDZENIE 1.1. Jeśli szereg $f(x,y)$ spełnia warunek $f(0,y) \sim y^n$ w $\mathbb{C}\{y\}$ dla pewnego $n > 0$, to $f(x,y) \sim y^n + a_1(x)y^{n-1} + \ldots + a_n(x)$ w $\mathbb{C}\{x,y\}$, przy czym $a_1(x),\ldots,a_n(x) \in \mathbb{C}\{x\}$ są szeregami bez stałych wyrazów jednoznacznie wyznaczonymi przez f.

Stosując ewentualnie liniową zmianę zmiennych można zawsze uzyskać spełnienie warunku $f(0,y) \sim y^n$, gdzie $n = \text{ord } f$, jeśli tylko szereg f jest niezerowy i nie ma stałego wyrazu. Wielomian (względem zmiennej y) występujący w tezie twierdzenia przygotowawczego nazywamy wielomianem wyróżnionym. Ograniczenie do liczby dwóch zmiennych w (1,1) jest nieistotne, w sformułowaniu twierdzenia x może być skończonym ciągiem zmiennych.

Drugim podstawowym faktem, na który będziemy się dalej powoływać jest następujące twierdzenie Newtona-Puiseux.

TWIERDZENIE 1.2. Niech $f(x,y) = y^n + a_1(x)y^{n-1} + \ldots + a_n(x)$ będzie wielomianem wyróżnionym, nierozkładalnym w $\mathbb{C}\{x,y\}$. Wówczas istnieje szereg $\varphi(t) \in \mathbb{C}\{t\}$ jednej zmiennej t taki, że

$$f(t^n,y) = \prod_{k=0}^{n-1} (y - \varphi(w^k t)),$$

gdzie w jest pierwiastkiem pierwotnym stopnia n z jedynki.

Dowód (1.2) a także opis diagramu Newtona dostarczającego efektywnej metody wyznaczenia szeregu Puiseux $\varphi(x^{1/n})$ można znaleźć w [2], [4].

W dalszym ciągu będziemy systematycznie używali języka szeregów potęgowych, trudno jednak nie wspomnieć o związku z funkcjami holomorficznymi i zbiorami ich zer.

Niech D_f będzie obszarem zbieżności szeregu $f \in \mathbb{C}\{x,y\}$ (zatem D_f jest otwartym i spójnym otoczeniem żera) i dla każdego $(a,b) \in D_f$ oznaczmy $f(a,b)$ sumę szeregu f w punkcie (a,b). Kiełek w $0 \in \mathbb{C}^2$ funkcji holomorficznej $D_f \ni (a,b) \to f(a,b)$ jest jednoznacznie wyznaczony przez szereg f, oznaczmy go $\hat{f}$. Łatwo spostrzec, że odwzorowanie $f \to \hat{f}$ jest izomorfizmem pierścienia $\mathbb{C}\{x,y\}$ i pierścienia kiełków funkcji holomorficznych w otoczeniach punktu $0 \in \mathbb{C}^2$. Dla każdego szeregu f definiujemy $Z_f = \{(a,b) \in D_f : f(a,b) = 0\}$. Gdy f nie ma stałego wyrazu i jest niezerowy, to Z_f jest niepustym nigdziegęstym podzbiorem D_f. Oznaczamy $(Z_f,0)$ kiełek zbioru Z_f w punkcie $0 \in \mathbb{C}^2$. Można sprawdzić, że:

a) dla każdego szeregu f istnieje szereg $\bar{f}$ bez czynników wielokrotnych taki, że $(Z_f,0) = (Z_{\bar{f}},0)$.

b) Jeśli szeregi f,g nie mają czynników wielokrotnych, to $(Z_f,0) = (Z_g,0)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f \sim g$.

Uwagi a) i b) powinny dostarczyć motywacji dla nieco formalnych definicji: szereg f niezerowy, bez stałego wyrazu (bez czynników wielokrotnych, nierozkładalny) nazywamy krzywą analityczną (zredukowaną, nierozkładalną) o równaniu $f = 0$ (dalej piszemy też: krzywa $f = 0$). Gdy $f = f_1^{k_1} \dots f_r^{k_r}$ jest rozkładem szeregu f na czynniki nierozkładalne (zakładamy, że jeżeli $f_i \sim f_j$, to $i = j$), to krzywe nierozkładalne $f_i = 0$ nazywamy komponentami (lub gałęziami) krzywej $f = 0$ przy czym liczbę naturalną k_i nazywamy krotnością komponenty $f_i = 0$. Rząd $\operatorname{ord} f$ szeregu f nazywamy krotnością krzywej $f = 0$, a krzywą $\operatorname{in} f = 0$ stożkiem stycznym krzywej $f = 0$.

2. RÓWNOWAŻNOŚĆ ANALITYCZNA, LOKALNY σ-PROCES, KROTNOŚĆ PRZECIĘCIA. W tej części artykułu przypominamy kilka pojęć i faktów z lokalnej teorii krzywych. Szczegóły Czytelnik znajdzie w [2], [3], [4] i [11]. Naszym zamiarem jest studiowanie tych własności krzywych, które "nie zależą od równania krzywej i układu współrzędnych".

Aby podać ścisłą definicję wprowadzamy najpierw pojęcie izomorfizmu analitycznego. Izomorfizmem analitycznym nazywamy parę szeregów $h = (h_1,h_2) \in \mathbb{C}\{x,y\}^2$ spełniającą warunki: $h(0,0) = (h_1(0,0),h_2(0,0)) = (0,0)$ oraz $\frac{\partial(h_1,h_2)}{\partial(x,y)}(0,0) \neq 0$. Tak zdefiniowany izomorfizm analityczny wyznacza auto-

morfizm pierścienia $\mathbb{C}\{x,y\}$ dany przez podstawienie $f \to f \circ h$ i odwrotnie: każdy automorfizm $\mathbb{C}\{x,y\}$ stały na $\mathbb{C}$ jest tej postaci.

DEFINICJA 2.1. Krzywe zredukowane $f = 0$ i $g = 0$ są równoważne analitycznie wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje izomorfizm analityczny h taki, że $f \circ h \sim g$.

Krzywą $f = 0$ nazywamy nieosobliwą, jeśli ma krotność 1, co można też wyrazić następująco: $f(0,0) = 0$ i $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \neq 0$ lub $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \neq 0$. Z klasycznego twierdzenia o funkcjach uwikłanych wynika, że wszystkie krzywe nieosobliwe są równoważne prostej, np. $y = 0$. Krzywe osobliwe (lub krótko: osobliwości), to krzywe zredukowane krotności > 1, tworzą one ogromną rozmaitość form. W ich opisie użyteczne jest następujące pojęcie:

DEFINICJA 2.2. Niezmiennikiem osobliwości nazywamy funkcję liczbową określoną na zbiorze krzywych zredukowanych, stałą na klasach abstrakcji relacji równoważności analitycznej.

Już teraz możemy podać przykłady niezmienników: liczba $r(f)$ komponent nierozkładalnych krzywej zredukowanej $f = 0$ jest niezmiennikiem analitycznym, podobnie krotność krzywej zredukowanej. Krzywe krotności 2 łatwo opisać: stosując twierdzenie przygotowawcze można sprawdzić, że każda krzywa zredukowana krotności 2 jest analitycznie równoważna krzywej $y^2 - x^m = 0$ ($m \geq 2$ liczba całkowita). Opis krzywych krotności 3 jest już znacznie bardziej złożony, nawet jeśli ograniczymy się do krzywych nierozkładalnych (por. [14]).

Opiszemy teraz przekształcenie znane w literaturze jako lokalny σ-proces. Niech $f = 0$ będzie krzywą nierozkładalną krotności > 1. Można dowieść, że forma początkowa $\operatorname{in} f$ jest wtedy potęgą formy liniowej; stosując więc ewentualnie liniową zamianę zmiennych można założyć, że $\operatorname{in} f = y^n$, gdzie $n = \operatorname{ord} f$. Niech u będzie nową zmienną, łatwo zauważyć, że szereg $f(x,xu) \in \mathbb{C}\{x,u\}$ jest podzielny przez x^n, a więc istnieje jedyny szereg $\tilde{f}(x,u) \in \mathbb{C}\{x,u\}$ taki, że $f(x,xu) = x^n \tilde{f}(x,u)$. Krzywą $\tilde{f} = 0$ nazywamy obrazem właściwym krzywej $f = 0$ poprzez lokalny σ-proces. Obraz właściwy $\tilde{f} = 0$ jest krzywą nierozkładalną, pozwala to powtórzyć postępowanie, jeśli $\operatorname{ord} \tilde{f} > 1$.

Aby opisać pojęcie krotności przecięcia dwóch krzywych, które będzie

miało dla nas podstawowe znaczenie musimy przypomnieć pojęcie parametryzacji krzywej.

Parę szeregów jednej zmiennej $z(t) = (x(t),y(t)) \in \mathbb{C}\{t\}^2$, $z(t) \neq (0,0)$, bez stałych wyrazów, nazywamy parametryzacją. Parametryzacja $z(t) \in \mathbb{C}\{t\}^2$ jest właściwa, gdy nie może być zapisana w postaci $z(t) = z_1(u(t))$, gdzie $u(t) \in \mathbb{C}\{t\}$, $\mathrm{ord}_t\, u(t) > 1$ oraz $z_1(u) \in \mathbb{C}\{u\}^2$. Dwie parametryzacje są równoważne, gdy jedna powstaje z drugiej przez zmianę parametru określoną szeregiem rzędu 1. Parametryzację $z(t) \in \mathbb{C}\{t\}^2$ nazywamy parametryzacją krzywej nierozkładalnej $f = 0$, gdy $f(z(t)) = 0$ w $\mathbb{C}\{t\}$. W oznaczeniach twierdzenia Newtona-Puiseux para $(t^n, \varphi(t))$ jest parametryzacją właściwą krzywej określonej przez nierozkładalny wielomian wyróżniony $f = 0$. Dalej będziemy ją nazywać parametryzacją Puiseux.

Stosując twierdzenia (1.1) i (1.2) łatwo sprawdzić następujące:

TWIERDZENIE 2.3. Każda krzywa nierozkładalna ma parametryzację właściwą. Dwie parametryzacje właściwe tej samej krzywej nierozkładalnej są równoważne.

Powyższe twierdzenie pozwala zdefiniować pojęcie krotności przecięcia dwóch krzywych.

DEFINICJA 2.4. Niech $f,g \in \mathbb{C}\{x,y\}$ będą niezerowymi względnie pierwszymi szeregami bez stałych wyrazów i niech $f = f_1 \ldots f_m$ będzie rozkładem szeregu f na czynniki nierozkładalne (niektóre czynniki mogą się powtarzać). Niech $z_i(t) \in \mathbb{C}\{t\}^2$ będzie parametryzacją właściwą krzywej $f_i = 0$. Krotnością przecięcia krzywych $f = 0$ i $g = 0$ nazywamy liczbę

$$(f,g)_o = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{ord}_t\, g(z_i(t)).$$

Definicję $(f,g)_o$ rozszerzamy na przypadek, gdy $f(0,0) \neq 0$ lub $g(0,0) \neq 0$ przyjmując, że wtedy $(f,g)_o = 0$. Ponadto piszemy $(f,g)_o = +\infty$, jeśli f,g mają wspólny podzielnik rzędu > 0.

Dalej często korzystamy z następujących własności krotności przecięcia:

(i) krotność $(f,g)_o$ zależy wyłącznie od ideału pierścienia $\mathbb{C}\{x,y\}$ generowanego przez szeregi f,g. W szczególności $(f,g)_o = (g,f)_o$ oraz $(f,g + hf)_o = (f,g)_o$ dla dowolnego $h \in \mathbb{C}\{x,y\}$.

(ii) $(f,g_1g_2)_o = (f,g_1)_o + (f,g_2)_o$.

(iii) Jeżeli h jest izomorfizmem lokalnym, to $(f \circ h, g \circ h)_o = (f,g)_o$.

3. LICZBA MILNORA. Wiele ważnych niezmienników analitycznych osobliwości (także w przypadku osobliwości hiperpowierzchni por. [13]) konstruujemy używając pojęcia krotności przecięcia. Należy do nich liczba Milnora.

DEFINICJA 3.1. Liczbą Milnora krzywej zredukowanej $f = 0$ nazywamy liczbę $\mu_o(f) = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})_o$.

Można sprawdzić, że krzywa $f = 0$ jest zredukowana wtedy i tylko wtedy, gdy pochodne cząstkowe szeregu f są względnie pierwsze. Stąd wynika, że $\mu_o(f) < +\infty$, przy czym $\mu_o(f) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy krzywa $f = 0$ jest nieosobliwa. Wszystkie własności liczby Milnora otrzymamy stosując lemat należący do B. Teissiera (por. [13], gdzie rozważany jest przypadek ogólny izolowanej osobliwości hiperpowierzchni).

LEMAT 3.2. Jeżeli $f \in \mathbb{C}\{x,y\}$, $f(0,0) = 0$, jest szeregiem bez czynników wielokrotnych i jeśli $f(0,y) \neq 0$ w $\mathbb{C}\{y\}$, to:

$$(f, \frac{\partial f}{\partial y})_o = \mu_o(f) + (f,x)_o - 1.$$

Dowód. Niech $z_i(t) = (x_i(t), y_i(t))$ będzie ciągiem właściwych parametryzacji komponent krzywej $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ (każdą parametryzację wypisujemy tyle razy ile wynosi krotność odpowiedniej komponenty). Ponieważ $\frac{\partial f}{\partial y}(z_i(t)) = 0$ w $\mathbb{C}\{t\}$, zatem $\frac{d}{dt} f(z_i(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_i(t)) \frac{dx_i}{dt}(t)$, a stąd $\mathrm{ord}_t\, f(z_i(t)) = \mathrm{ord}_t \frac{\partial f}{\partial x}(z_i(t)) + \mathrm{ord}_t\, x_i(t)$. Sumując otrzymane równości i stosując definicję krotności przecięcia otrzymujemy: $(\frac{\partial f}{\partial y}, f)_o = (\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x})_o + (\frac{\partial f}{\partial y}, x)_o$. Uwzględniając następnie własność (i) krotności i rachunek: $(\frac{\partial f}{\partial y}, x)_o = \mathrm{ord}_y (\frac{\partial f}{\partial y}(0,y)) = \mathrm{ord}_y (f(0,y)) - 1 = (f,x)_o - 1$ dostajemy tezę lematu.

TWIERDZENIE 3.3. Liczba Milnora jest niezmiennikiem analitycznym, tzn.

(a) jeśli h jest izomorfizmem lokalnym, to $\mu_o(f \circ h) = \mu_o(f)$;

(b) jeśli $g \sim f$, to $\mu_o(g) = \mu_o(f)$.

Dowód. Własność (a) wynika łatwo z podanych własności krotności przecięcia i definicji liczby Milnora. Aby sprawdzić (b) możemy założyć, że $f(0,y) \neq 0$ w $\mathbb{C}\{y\}$ (po ewentualnej liniowej zmianie zmiennych). Z zało-

żenia $g = uf$, gdzie $u(0,0) \neq 0$, zatem:

$$(\frac{\partial g}{\partial y}, g)_o = (\frac{\partial g}{\partial y}, f)_o = (\frac{\partial u}{\partial y} f + u\frac{\partial f}{\partial y}, f)_o = (\frac{\partial f}{\partial y}, f)_o.$$

Z drugiej strony $(x,f)_o = \mathrm{ord}_y\,(f(0,y)) = \mathrm{ord}_y\,(g(0,y)) = (x,g)_o$. Równość $\mu_o(g) = \mu_o(f)$ wynika teraz z lematu Teissiera.

TWIERDZENIE 3.4. Niech $f = f_1 \ldots f_r$ będzie rozkładem szeregu zredukowanego f na czynniki względnie pierwszę. Wtedy:

$$\mu_o(f) + r - 1 = \sum_{i=1}^{r} \mu_o(f_i) + 2\sum_{1\le i<j\le r} (f_i, f_j)_o$$

Dowód. Załóżmy, że $r = 2$, trzeba więc sprawdzić, że $\mu_o(f) + 1 = \mu_o(f_1) + \mu_o(f_2) + 2(f_1,f_2)_o$. Łatwy rachunek oparty na podanych własnościach krotności przecięcia pokazuje, że:

$$(f_1 f_2, \frac{\partial}{\partial y}(f_1 f_2))_o = (f_1, \frac{\partial f_1}{\partial y})_o + (f_2, \frac{\partial f_2}{\partial y})_o + 2(f_1, f_2)_o.$$

Wstawiając do powyższego wzoru krotności przecięcia obliczone przy pomocy lematu Teissiera otrzymujemy po łatwych przekształceniach twierdzenie 3.4 dla przypadku $r = 2$. Przypadek ogólny dowodzimy indukcyjnie względem r.

TWIERDZENIE 3.5. Niech $f = 0$ będzie krzywą nierozkładalną, osobliwą a $\tilde{f} = 0$ jej obrazem właściwym poprzez lokalny σ-proces. Wtedy $\mu_o(f) = (\mathrm{ord}\, f)(\mathrm{ord}\, f - 1) + \mu_o(\tilde{f})$.

Dowód. Możemy założyć, że $\mathrm{in}\, f = y^n$, gdzie $n = \mathrm{ord}\, f > 1$ oraz, że σ-proces dany jest przez podstawienie $y = xu$. Z definicji obrazu właściwego wynika, że $n = \mathrm{ord}(f(0,y)) = \mathrm{ord}(\tilde{f}(0,u))$, a więc $(x,f)_o = (x,\tilde{f})_o = n$. Oznaczmy $z(t) = (x(t),y(t))$ parametryzację właściwą krzywej $f = 0$, z warunku $\mathrm{in}\, f = y^n$ łatwo wynika, że $n = \mathrm{ord}_t\, x(t) < \mathrm{ord}_t\, y(t)$, co pozwala nam napisać $y(t) = x(t)u(t)$, gdzie $u(t) \in \mathbb{C}\{t\}$, $u(0) = 0$. Para $\tilde{z}(t) = (x(t),u(t))$ jest parametryzacją właściwą krzywej $\tilde{f} = 0$, a więc

$$(\tilde{f}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u})_o = \mathrm{ord}_t \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}(\tilde{z}(t)) \text{ oraz oczywiście } (f, \frac{\partial f}{\partial y})_o =$$

$= \mathrm{ord}_t \frac{\partial f}{\partial y}(z(t))$. Ze związku $f(x,xu) = x^n \tilde{f}(x,u)$ wynika relacja $\frac{\partial f}{\partial y}(x,xu) = x^{n-1}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}(x,u)$. Stąd mamy $\frac{\partial f}{\partial y}(z(t)) = x(t)^{n-1}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}(\tilde{z}(t))$ a więc

$(f,\frac{\partial f}{\partial y})_o = n(n-1) + (\tilde{f},\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u})_o$. Stąd na mocy lematu Teissiera otrzymujemy tezę twierdzenia.

Z udowodnionego twierdzenia wynika, że liczby Milnora krzywych otrzymanych jako ciąg kolejnych obrazów właściwych poprzez stosowanie lokalnych σ-procesów tworzą ciąg silnie malejący a więc skończony, co oznacza, że dojdziemy w końcu do krzywej nieosobliwej. Pozwala to obliczyć $\mu_o(f)$ przez wielokrotne zastosowanie udowodnionej formuły. Reasumując, mamy

WNIOSEK 3.6. Dla każdej krzywej nierozkładalnej osobliwej $f = 0$ istnieje ciąg krzywych nierozkładalnych $f_i = 0$ $(i = 0,1,\ldots,s)$ taki, że

a) $f_o = f$, $f_{i+1} = 0$ jest obrazem właściwym $f_i = 0$ dla $i < s$;

b) krzywa $f_s = 0$ jest nieosobliwa. Ponadto $\mu_o(f) = \sum_{i=0}^{s} (\text{ord } f_i)(\text{ord } f_i - 1)$.

Wzór otrzymany w ostatnim wniosku pokazuje, że liczba Milnora krzywej nierozkładalnej jest sumą liczb parzystych, mamy zatem

WNIOSEK 3.7. Liczba Milnora krzywej nierozkładalnej jest liczbą parzystą.

DEFINICJA 3.8. Dla każdej krzywej zredukowanej $f = 0$ definiujemy

$$\delta_o(f) = \frac{1}{2}(\mu_o(f) + r(f) - 1).$$

Oczywiście δ_o jest niezmiennikiem analitycznym, bo liczba Milnora i liczba r komponent nierozkładalnych są niezmiennikami.

Liczba $\delta_o(f)$ jest całkowita: dla f nierozkładalnych $r(f) = 1$, a więc $\delta_o(f) = \frac{1}{2}\mu_o(f)$ jest liczbą całkowitą na mocy (3.7). W przypadku ogólnym całkowitość $\delta_o(f)$ wynika z (3.4) i (3.7).

Z udowodnionych własności liczby Milnora wynikają łatwo następujące własności niezmiennika δ_o:

(i) jeśli $\text{ord } f = 1$, to $\delta_o(f) = 0$.

(ii) Jeśli f jest nierozkładalny rzędu > 1, a $\tilde{f} = 0$ jest obrazem właściwym $f = 0$ poprzez lokalny σ-proces, to

$$\delta_o(f) = \frac{1}{2}(\text{ord } f)(\text{ord } f - 1) + \delta_o(\tilde{f}).$$

(iii) Gdy $f = f_1 \cdots f_r$ jest rozkładem szeregu f na czynniki nierozkładalne, to

$$\delta_o(f) = \sum_{i=1}^{r} \delta_o(f_i) + \sum_{1 \le i < j \le r} (f_i, f_j)_o .$$

Oczywiście własności (i), (ii) oraz (iii) charakteryzują jednoznacznie δ_o. Niezmiennik δ_o został wprowadzony (na innej drodze) przez H.Hironakę w pracy [8], formułę $2\delta_o = \mu_o + r - 1$ (którą przyjęliśmy jako definicję δ_o) udowodnił J. Milnor w [9]. Hironaka definiuje $\delta_o = \dim_{\mathbb{C}} (\mathcal{O}/\overline{\mathcal{O}})$ gdzie $\mathcal{O} = \mathbb{C}\{x,y\}/(f)$ jest pierścieniem lokalnym krzywej zredukowanej $f = 0$, a $\overline{\mathcal{O}}$ domknięciem całkowitym $\mathcal{O}$ w jego pełnym pierścieniu ułamków (por. dodatek do książki [6] w sprawie potrzebnych pojęć algebraicznych). Następnie dowodzi, że tak zdefiniowany niezmiennik ma własności (i), (ii), (iii), stąd wynika równoważność obu definicji.

4. O FORMULE M. NOETHERA. Niezmienniki analityczne można zdefiniować w każdym punkcie krzywej rzutowej płaskiej (tzn. krzywej opisanej w płaszczyźnie rzutowej zespolonej $\mathbb{P}^2$ przez równanie jednorodne). Aby zdefiniować $\delta_p(C)$ w punkcie p krzywej rzutowej C obieramy tak układ współrzędnych rzutowych, że p ma współrzędne $(0 : 0 : 1)$ i definiujemy $\delta_p(C) = \delta_o(f)$, gdzie $f(x,y) = 0$ jest równaniem afinicznym (minimalnego stopnia) rozważanej krzywej. Z niezmienniczości δ_o wynika, że $\delta_p(C)$ nie zależy od wyboru pomocniczego układu współrzędnych.

Punkty osobliwe krzywej C są scharakteryzowane nierównością $\delta_p(C) > 0$ (wynika to z własności (i), (ii), (iii) niezmiennika δ), tworzą one jej podzbiór skończony. Krzywa rzutowa bez punktów osobliwych jest zwartą powierzchnią Riemanna (zwartą i spójną rozmaitością holomorficzną zespolonego wymiaru 1).

Gdy $C \subset \mathbb{P}^2$ jest krzywą rzutową nierozkładalną (tzn. krzywą o równaniu minimalnym nierozkładalnym) o zbiorze punktów osobliwych $S \subset C$, to istnieje zwarta powierzchnia Riemanna $\tilde{C}$ i surjekcja holomorficzna $\pi: \tilde{C} \to C$ o skończonych włóknach taka, że odwzorowanie indukowane $\tilde{C} \setminus \pi^{-1}(S) \to C \setminus S$ jest biholomorfizmem. Powierzchnię Riemanna $\tilde{C}$ konstruujemy stosując lokalne parametryzacje (por. [7] rozdział IV), jest ona wraz z odwzorowaniem π wyznaczona jednoznacznie przez C z dokładnością do biholomorfizmu. Powierzchnia Riemanna $\tilde{C}$ jest nazywana normalizacją krzywej C, jej rodzaj g (topologicznie $\tilde{C}$ jest sferą z doklejonymi g "uchami") jest określony jednoznacznie przez krzywą C. Okazuje się, że dla wyznaczenia rodzaju g wystarczy znajomość stopnia krzywej C (por. [4]) i informacja o jej oso-

bliwościach. Mówi o tym twierdzenie M. Noethera, które przedstawiamy tutaj w wersji podanej przez H. Hironakę:

TWIERDZENIE 4.1. Jeśli $C \subset P^2$ jest nierozkładalną krzywą rzutową stopnia n, to rodzaj g jej normalizacji jest dany wzorem:

$$g = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \sum_{p \in C} \delta_p(C).$$

Suma występująca w powyższym wzorze jest skończona, bo faktycznie rozciąga się na punkty osobliwe. Gdy krzywa C jest nieosobliwa, to jej rodzaj dany jest wzorem $g = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$. Dowód tego wzoru oparty na twierdzeniu Riemanna-Hurwitza podany w [7] (rozdział II) można łatwo przenieść na sytuację opisaną w twierdzeniu 4.1 posługując się podaną definicją niezmiennika δ_o.

5. WYKŁADNIKI CHARAKTERYSTYCZNE PUISEUX. Niech $f(x,y) = y^n + a_1(x)y^{n-1} + \ldots + a_n(x)$, $n = \operatorname{ord} f$ będzie nierozkładalnym wielomianem wyróżnionym. Naszym celem jest obliczenie liczby Milnora krzywej $f(x,y) = 0$ w terminach jej parametryzacji Puiseux $(t^n, \varphi(t))$. Okazuje się, że istotną rolę w tym obliczeniu mają jedynie niektóre wyrazy szeregu $\varphi(t)$.

Nośnikiem szeregu $\varphi(t) = \sum_{k \geq 0} a_k t^k$ nazywamy zbiór $\operatorname{supp}(\varphi) = \{k \geq 0 : a_k \neq 0\}$. Szeregi $\varphi(w^l t)$ ($l = 0,1,\ldots,n-1$; w pierwiastek pierwotny z 1 stopnia n) mają oczywiście ten sam nośnik, a więc z twierdzenia 1.2 wynika, że definicja $\operatorname{supp}(f) = \operatorname{supp}(\varphi)$ jest poprawna. Nośnik $\operatorname{supp}(f)$ wielomianu wyróżnionego f jest zawarty w zbiorze liczb naturalnych $\geq n$, bo warunek $\operatorname{ord} f = n$ implikuje $\operatorname{ord}_t \varphi(t) \geq n$, ponadto można sprawdzić opierając się na nierozkładalności f, że liczby zbioru $\operatorname{supp}(f) \cup \{n\}$ nie mają wspólnego podzielnika > 1.

DEFINICJA 5.1. Charakterystyką nierozkładalnego wielomianu wyróżnionego $f(x,y) = y^n + a_1(x)y^{n-1} + \ldots + a_n(x)$, $n = \operatorname{ord} f$ o nośniku $\Delta = \operatorname{supp}(f)$ nazywamy ciąg liczb naturalnych $(\beta_o, \beta_1, \ldots, \beta_g)$ jednoznacznie określony przez następujące warunki:

(i) $\beta_o = n$,

(ii) dla każdego $i \in \{1,2,\ldots,g\}$ liczba β_i jest najmniejszą liczbą naturalną β taką, że $\beta > \beta_{i-1}$, $\beta \in \Delta$ oraz $\beta \not\equiv 0 \pmod{\operatorname{NWP}(\beta_o,\ldots,\beta_{i-1})}$,

(iii) $\operatorname{NWP}(\beta_o, \beta_1, \ldots, \beta_g) = 1$.

W powyższej definicji skrót NWP oznacza "największy wspólny podzielnik". Liczby $\beta_o,\dots,\beta_g$ nazywamy wykładnikami charakterystycznymi Puiseux, dogodnie jest oznaczyć $e_i = \mathrm{NWP}\,(\beta_o,\dots,\beta_i)$ dla $i = 0,1,\dots,g$. Zatem $e_o = n, e_1,\dots,e_{g-1}, e_g = 1$ jest ściśle malejącym ciągiem dzielników liczby n. Zgodnie z definicją charakterystyki elementy zbioru $\{n\} \cup \Delta$ wypisane w porządku rosnącym tworzą ciąg następujący: $\beta_o = n$, liczby podzielne przez $e_o = n$, β_1, liczby podzielne przez $e_1 = \mathrm{NWP}\,(n,\beta_1)$, $\beta_2,\dots,\beta_{g-1}$, liczby podzielnika przez e_{g-1}, $\beta_g,\dots$.

Z powyższego wynika następujące przedstawienie (które nazywamy dalej standartowym) szeregu $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = \varphi_o(t^n) + \varphi_1(t^{e_1}) + \dots + \varphi_{g-1}(t^{e_{g-1}}) + \varphi_g(t),$$

gdzie $\mathrm{ord}_t\, \varphi_i(t^{e_i}) = \beta_i$ dla $i = 0,1,\dots,g$.

TWIERDZENIE 5.2. Przy oznaczeniach wprowadzonych w definicji 5.1 zachodzi wzór

$$\mu_o(f) = \sum_{q=1}^{g} \beta_q(e_{q-1} - e_q) - n + 1.$$

Dowód. Niech $(t^n,\varphi(t))$ będzie parametryzacją Puiseux krzywej $f(x,y) = 0$. Z lematu Teissiera wynika, że wystarczy obliczyć $(f, \frac{\partial f}{\partial y})_o = \mathrm{ord}_t \frac{\partial f}{\partial y}(t^n,\varphi(t)) = \sum_{l=1}^{n-1} \mathrm{ord}_t\,(\varphi(t) - \varphi(w^l t))$. Oznaczmy przez $I_q = \{l \in \{1,2,\dots,n-1\} : le_q \equiv 0 \pmod n\}$ dla $q = 0,1,\dots,g$. Łatwo zauważyć, że zbiory I_q tworzą ciąg zstępujący oraz $\mathrm{card}\, I_q = e_q - 1$, w szczególności $I_o = \{1,2,\dots,n-1\}$, $I_g = \emptyset$. Mamy zatem $I_o = \bigcup_{q=1}^{g} (I_{q-1} \setminus I_q)$.

LEMAT 5.3. Jeżeli $l \in I_{q-1} \setminus I_q$, to $\mathrm{ord}_t\,(\varphi(t) - \varphi(w^l t)) = \beta_q$.

Dowód lematu. Z przedstawienia standartowego szeregu $\varphi(t)$ wynika, że

$$\varphi(w^l t) = \varphi_o(w^{ln}t^n) + \varphi_1(w^{le_1}t^{e_1}) + \dots + \varphi_{q-1}(w^{le_{q-1}}t^{e_{q-1}}) +$$

$$+ \varphi_q(w^{le_q}t^{e_q}) + \dots$$

Gdy $l \in I_{q-1}$, to $le_{q-1} \equiv 0 \pmod n$, a tym bardziej $le_{q-2},\dots,le_o \equiv$ $\equiv 0 \pmod n$, zatem $w^{ln} = w^{le_1} = \dots = w^{le_{q-1}} = 1$ i mamy:

$$\varphi(t) - \varphi(w^l t) = (\varphi_q(t^{e_q}) + \dots) - (\varphi_q(w^{le_q} t^{e_q}) + \dots) =$$

$$= (ct^{\beta_q} + \dots) - (cw^{l\beta_q} t^{\beta_q} + \dots) = c(1 - w^{l\beta_q}) t^{\beta_q} +$$

$$+ \text{ wyrazy rzędu} > \beta_q.$$

W powyższym wzorze c oznacza stałą różną od zera.

Dla zakończenia dowodu lematu wystarczy więc sprawdzić, że $w^{l\beta_q} \neq 1$ tzn. że $l\beta_q \not\equiv 0 \pmod n$. Istotnie, $e_q = \mathrm{NWP}\,(e_{q-1}, \beta_q)$, więc $le_q =$ $= \mathrm{NWP}\,(le_{q-1}, l\beta_q)$, a stąd i z warunku $l \in I_{q-1} \setminus I_q$ wynika, że $l\beta_q \not\equiv$ $\not\equiv 0 \pmod n$.

Możemy teraz kontynuować obliczenie:

$$\left(f, \frac{\partial f}{\partial y}\right)_o = \sum_{l \in I_o} \mathrm{ord}_t\,(\varphi(t) - \varphi(w^l t)) =$$

$$= \sum_{q=1}^{g} \sum_{l \in I_{q-1} \setminus I_q} \mathrm{ord}_t\,(\varphi(t) - \varphi(w^l t)) =$$

$$= \sum_{q=1}^{g} \beta_q \,\mathrm{card}\,(I_{q-1} \setminus I_q) = \sum_{q=1}^{g} \beta_q (e_{q-1} - e_q)$$

ponieważ

$$\mathrm{card}\,(I_{q-1} \setminus I_q) = \mathrm{card}\,(I_{q-1}) - \mathrm{card}\,(I_q) = (e_{q-1} - 1) - (e_q - 1) =$$

$$= e_{q-1} - e_q.$$

Teza twierdzenia wynika z otrzymanej formuły i lematu Teissiera.

Wykładniki charakterystyczne krzywej nierozkładalnej $f = 0$ definiujemy jako wykładniki charakterystyczne wielomianu wyróżnionego stowarzyszonego z szeregiem f w układzie współrzędnych, w którym jedyna styczna do krzywej ma równanie $y = 0$. Elementarny, ale dość długi rachunek pokazuje, że tak zdefiniowane wykładniki charakterystyczne są niezmiennikami analitycznymi. Aby przedstawić znacznie mocniejszy rezultat wprowadzamy definicję: krzywe nierozkładalne $f = 0$ i $g = 0$ są topologicznie równoważne, gdy istnieją otoczenia otwarte $U, V \subset \mathbb{C}^2$ początku układu i homeomorfizm

$T : U \to V$, $T(0) = 0$ taki, że $T(U \cup Z_f) = V \cap Z_g$. Zachodzi następujące:

TWIERDZENIE 5.4 (por. [11]). Dwie krzywe nierozkładalne są topologicznie równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy mają taką samą charakterystykę.

Z powyższego twierdzenia i formuły (5.2) wynika, że liczba Milnora jest również niezmiennikiem topologicznym (por. [9], [13]). Twierdzenie 5.4 mówi, że wykładniki charakterystyczne tworzą pełny układ niezmienników topologicznych, nie istnieje natomiast taki układ dla równoważności analitycznej. Prowadzi to w lokalnej teorii osobliwości do problemu modułów analogicznego do problemu o tej samej nazwie w teorii zwartych powierzchni Riemanna.

Zainteresowanego tymi zagadnieniami Czytelnika odsyłamy do wykładów O. Zariskiego [14].

SPIS LITERATURY

[1] S.S. Abhyankar, *Historical Ramblings in Algebraic Geometry and Related Algebra*, The Amer. Math. Monthly, 1976, p.409-448.

[2] E. Brieskorn, H. Knörrer, *Ebene algebraische Kurven*, Birkhäuser, Boston, 1981.

[3] J. Chądzyński, T. Krasiński and W. Kryszewski, *On the parametric and algebraic multiplicities of an isolated zero of a holomorphic mapping*, Proc. of the Conf. on Analytic Functions, Błażejewko 1982, Lecture Notes in Math., 1039.

[4] J.L. Coolidge, *A Treatise on Algebraic Plane Curves*, Oxford, 1931.

[5] J. Dieudonné, *Cours de géométrie algébrique 1*, Press Universitaires de France, 1974.

[6] H. Grauert, R. Remmert, *Analytische Stellenalgebren*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.

[7] P. Griffiths, J. Harris, *Principles of Algebraic-Geometry*, A Wiley-Interscience Publication, 1978.

[8] H. Hironaka, *On the arithmetic genera and the effective genera of algebraic curves*, Mem. Kyoto 30 (1957), p.177-195.

[9] J. Milnor, *Singular points of complex hypersurfaces*, Princeton University Press, 1968.

[10] F. Pham, *Courbes discriminantes des singularités planes d'ordre 3*, Astérisque 7 et 8 (1973), p.363-391.

[11] F. Pham, *Singularités des courbes planes: Une introduction à la géométrie analytique complexe. Cours de 3e cycle*, Faculté de sciences.

[12] J.J. Risler, *Sur l'idéal jacobian d'une courbe plane*, Bull. Soc. Math. Fr. 99 (4), 1971, p.305-311.

[13] B. Teissier, *Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney* Singularités à Cargèse 1972, Astérisque No 7-8, Soc. Math. Fr. (1973).

[14] O. Zariski, *Le problème des modules pour les branches planes*, Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique 1973.

Sielpia, 14-19 stycznia 1985