**MATERIAŁY XIV KONFERENCJI SZKOLENIOWEJ
Z TEORII ZAGADNIEŃ EKSTREMALNYCH**

1993 Łódź str. 45

PIERWIASTKI APROKSYMATYWNE WIELOMIANÓW WEDŁUG S.S. ABHYANKARA I T.T. MOHA

A. Płoski (Kielce)

0. Wstęp

Teoria pierwiastków aproksymatywnych wielomianów została rozwinięta przez S.S. Abhyankara i T.T. Moha w pracy [3]. Jej pierwszym zastosowaniem był dowód następującego faktu:

Twierdzenie 0.1 (cf. [4]). *Załóżmy, że wielomiany $P(T)$, $Q(T)$ o współczynnikach zespolonych są takie, że zmienna T da się przedstawić jako "wielomian od $P(T)$ i $Q(T)$":*

$$T = W(P(T), Q(T)), \qquad W = W(X, Y) \text{ - wielomian dwóch zmiennych.}$$

Wówczas $\deg P$ *dzieli* $\deg Q$ *lub* $\deg Q$ *dzieli* $\deg P$.

Historia powyższego twierdzenia i jego zastosowania są opisane w pracy [4]. Istnieją obecnie dowody twierdzenia 0.1 nie odwołujące się do pierwiastków aproksymatywnych (cf. [9], [10]).

Odwzorowanie wielomianowe $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$ nazywamy *zanurzeniem regularnym* (prostej $\mathbb{C}$ w płaszczyznę $\mathbb{C}^2$), jeżeli jego składowe spełniają założenie twierdzenia 0.1. Można sprawdzić, że odwzorowanie wielomianowe $F : \mathbb{C} \to$

$\mathbb{C}^2$ jest zanurzeniem regularnym wtedy i tylko wtedy, gdy (i) F jest injekcją, (ii) pochodna F' nie zeruje się w żadnym punkcie $\mathbb{C}$.

Twierdzenie 0.1 ma następującą wersję geometryczną

Twierdzenie 0.2. *Niech $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ będzie krzywą nierozkładalną, wymierną o dokładnie jednym punkcie osobliwym $0 \in C$. Zakładamy,że C jest analitycznie nierozkładalna w 0 i że jedyna styczna do C w 0 przecina C tylko w tym punkcie. Wtedy $\deg C - \operatorname{mult}_0 C$ dzieli degC.*

Analityczna nierozkładalność C w punkcie 0 oznacza, że kiełek $(C, 0)$ jest analitycznie nierozkładalny. Symbolem $\operatorname{mult}_0 C$ oznaczyliśmy *krotność* C w 0, tzn. krotność przecięcia C z prostą przechodzącą przez 0, różną od stycznej do C w 0.

Pokażemy teraz, że twierdzenie 0.2 implikuje 0.1. Istotnie, niech $t \to (P(t), Q(t))$ będzie zanurzeniem regularnym $\mathbb{C}$ w $\mathbb{C}^2$. Oznaczmy $m = \deg P$, $n = \deg Q$. Możemy założyć, że $0 < m < n$. Płaszczyznę rzutową $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ utożsamiamy z płaszczyzną $\mathbb{C}^2$ z dołączoną prostą w nieskończoności. Obraz $\mathbb{C}$ poprzez zanurzenie $t \to (P(t), Q(t))$ jest krzywą afiniczną; niech C będzie jej domknięciem w $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

Krzywa C ma jedyny punkt w nieskończoności $0 \in C$, jest to jedyny jej punkt osobliwy. Ponadto łatwo sprawdzić, że $\deg C = n$, $\operatorname{mult}_0 C = n - m$. Założenie twierdzenia 0.2 są spełnione, a więc $m = \deg C - \operatorname{mult}_0 C$ dzieli $n = \deg C$.

Celem tego artykułu jest przedstawienie podstawowych pojęć i twierdzeń wprowadzonych przez S.S. Abhyankara i T.T. Moha w [3]. Jako zastosowanie podamy dowód twierdzenia 0.2 - jest on pewną modyfikacją dowodu podanego przez S.S. Abhyankara w wykładach [1]. Potrzebne do lektury wiadomości z lokalnej teorii krzywych algebraicznych Czytelnik znajdzie w artykułach [7] i [8].

1. Pojęcie pierwiastka aproksymatywnego

Niech A będzie pierścieniem przemiennym z 1 zawierającym ciało liczb wymiernych jako podpierścień.

Twierdzenie 1.1. *Niech $F(Y) = Y^n + a_1 Y^{n-1} + \cdots + a_n \in A[Y]$ będzie wielomianem unormowanym stopnia $n \geq 1$ i niech będzie dany dzielnik d liczby n. Wtedy istnieje dokładnie jeden wielomian $G(Y) \in A[Y]$ taki, że*

(i) *$G(Y)$ jest unormowany stopnia $\frac{n}{d}$.*
(ii) $\deg(F(Y) - G(Y)^d) < n - \frac{n}{d}$.

Co więcej, $G(Y) = Y^{\frac{n}{d}} + b_1 Y^{\frac{n}{d}-1} + \cdots + b_{\frac{n}{d}}$, gdzie

$$b_\nu = \frac{1}{d} a_\nu + \sum^{\star} \beta_{i_1,\dots,i_{\nu-1}} a_1^{i_1} \cdots a_{\nu-1}^{i_{\nu-1}}, \qquad \nu = 1, \dots, \frac{n}{d}.$$

Znak $\sum^\star$ oznacza sumowanie po wskaźnikach $i_1, \dots, i_{\nu-1}$ spełniających warunek $i_1 + 2i_2 + \cdots + (\nu - 1)i_{\nu-1} = \nu$. Współczynniki $\beta_{i_1,\dots,i_{\nu-1}}$ są liczbami wymiernymi, zależnymi wyłącznie od d i n.

Dowód. Warunek (i) oznacza, że należy szukać wielomianu $G(Y)$ w postaci $G(Y) = Y^{\frac{n}{d}} + b_1 Y^{\frac{n}{d}-1} + \cdots + b_{\frac{n}{d}}$, natomiast warunek (ii) oznacza, że

$$(1) \qquad G(Y)^d = Y^n + a_1 Y^{n-1} + \cdots + a_{\frac{n}{d}} Y^{n-\frac{n}{d}} + \text{wyrazy stopnia } < n - \frac{n}{d}.$$

Obliczając $G(Y)^d$ według wzoru wielomianowego Newtona stwierdzamy, że dla $\nu = 1, \dots, \frac{n}{d}$:

(2) współczynnik przy potędze $Y^{n-\nu}$wielomianu $G(Y)^d$ równa się

$$db_\nu + \sum^{\star} \alpha_{i_1,\dots,i_{\nu-1}} b_1^{i_1} \cdots b_{\nu-1}^{i_{\nu-1}},$$

gdzie

$$\alpha_{i_1,\dots,i_{\nu-1}} = \binom{d}{i_1 + \cdots + i_{\nu-1}} \frac{(i_1 + \cdots + i_{\nu-1})!}{i_1! \cdots i_{\nu-1}!}.$$

Wobec równości (1) warunek (ii) jest, na mocy (2) równoważny układowi równań

$$(3) \qquad a_\nu = db_\nu + \sum^{\star} \alpha_{i_1,\dots,i_{\nu-1}} b_1^{i_1} \cdots b_{\nu-1}^{i_{\nu-1}}.$$

Jest to układ $\frac{n}{d}$ równań ($\nu = 1, \dots, \frac{n}{d}$) o $\frac{n}{d}$ niewiadomych $b_1, \dots, b_{\frac{n}{d}}$, który ma dokładnie jedno rozwiązanie w $A^{\frac{n}{d}}$. Jest ono postaci

$$b_\nu = \frac{1}{d} a_\nu + \sum^{\star} \beta_{i_1,\dots,i_{\nu-1}} a_1^{i_1} \cdots a_{\nu-1}^{i_{\nu-1}},$$

o czym łatwo się przekonać stosując indukcję.

Definicja 1.2. Przy oznaczeniach i założeniach twierdzenia 1.1 wielomian $G(Y)$ nazywamy *pierwiastkiem aproksymatywnym* (stopnia d) *wielomianu* $F(Y)$ i oznaczamy $G(Y) = \sqrt[d]{F(Y)}$.

Przypomnijmy, że $\sqrt[d]{F(Y)}$ jest określony, gdy $F(Y)$ jest wielomianem unormowanym i gdy d dzieli stopień $F(Y)$. Łatwo zauważyć, że $\sqrt[n]{F(Y)} = Y + \frac{1}{n} a_1$, $\sqrt[1]{F(Y)} = F(Y)$, $\sqrt[d]{G(Y)^d} = G(Y)$. Ponadto $\sqrt[d]{F(Y)}$ jest określony jednoznacznie przez współczynniki $a_1, \dots, a_{\frac{n}{d}}$ wielomianu $F(Y) = Y^n + a_1 Y^{n-1} + \cdots + a_{\frac{n}{d}} Y^{n-\frac{n}{d}} + \cdots + a_n$.

Przykład 1.3. $\sqrt[d]{Y^n + a_{\frac{n}{d}} Y^{n-\frac{n}{d}} + \cdots + a_n} = Y^{\frac{n}{d}} + \frac{1}{d} a_{\frac{n}{d}}$.

W dalszym ciągu użyteczny jest

Wniosek 1.4. *Niech* $F(X, Y) = Y^n + a_1(X) Y^{n-1} + \cdots + a_n(X) \in \mathbb{C}[X, Y]$ *będzie wielomianem stopnia* n *względem zespołu zmiennych* (X, Y). *Wówczas* $\sqrt[d]{F(X, Y)}$ *jest wielomianem stopnia* $\frac{n}{d}$ *względem tych zmiennych.*

Dowód. Wielomian $F(X, Y)$ jest stopnia n względem (X, Y), gdy $\deg a_i(X) \leq i$ dla $i = 1, \dots, n$. Wniosek wynika więc ze wzorów dla współczynników pierwiastka aproksymatywnego.

2. Twierdzenia podstawowe o pierwiastkach aproksymatywnych

Podstawowe twierdzenia, o których mowa w tytule dotyczą pierwiastków aproksymatywnych wielomianów o współczynnikach leżących w pierścieniu szeregów jednej zmiennej. Aby je przedstawić przypominamy fakty z teorii osobliwości krzywych.

Niech $f(x,y) = y^n + a_1(x)y^{n-1} + \cdots + a_n(x)$ będzie wielomianem wyróżnionym (tzn. $a_1(0) = \cdots = a_n(0) = 0$) o współczynnikach w pierścieniu $\mathbb{C}\{x\}$ zbieżnych szeregów potęgowych. Załóżmy, że $f = f(x,y)$ jest nierozkładalny w $\mathbb{C}\{x\}[y]$, co jest równoważne nierozkładalności w pierścieniu $\mathbb{C}\{x,y\}$. Wówczas rozwiązania równania $f(x,y) = 0$ w pierścieniu szeregów Puiseux $\mathbb{C}\{x\}^\star$ tworzą cykl

$$\sum_j a_j \varepsilon^j x^{\frac{j}{n}}, \qquad \varepsilon^n = 1.$$

Fakt ten pozwala zdefiniować *charakterystykę* $(b_0, \ldots, b_h)$ szeregu f przy pomocy następujących warunków:

(i) $b_0 = n$,
(ii) $b_{i+1} = \inf\{j : a_j \neq 0,\ NWP(b_0, \ldots, b_{i,j}) < NWP(b_0, \ldots, b_i)\}$,
(iii) $h = \inf\{i : NWP(b_0, \ldots, b_i) = 1\}$.

Przyjmujemy tutaj zwykłe oznaczenia i konwencje: NWP = największy wspólny dzielnik, $\inf \emptyset = +\infty$, każda liczba dzieli $+\infty$.

Charakterystyka $(b_0, \ldots, b_h)$ jest więc rosnącym ciągiem liczb naturalnych. Oznaczamy $B_i = NWP(b_0, \ldots, b_i)$. Jest więc $B_0 = b_0, \ldots, B_h = 1$ malejącym ciągiem dzielników liczby $b_0 = n$. Charakterystykę można zdefiniować dla dowolnego nierozkładalnego szeregu $f = f(x,y)$, y-regularnego (tzn. takiego, że $n = \operatorname{ord} f(0,y) < +\infty$) przyjmując: charakterystyka f = charakterystyka wielomianu wyróżnionego stowarzyszonego z f. Charakterystyka f obliczona w generycznym układzie współrzędnych (takim, że $\operatorname{ord} f(0,y) = \operatorname{ord} f$) jest niezmiennikiem topologicznym krzywej nierozkładalnej $f = 0$. Dla dowolnych $f, g \in \mathbb{C}\{x,y\}$ symbolem $(f,g)_0$ oznaczamy krotność przecięcia krzywych $f = 0$, $g = 0$. Przypomnijmy formułę dla liczby Milnora:

Twierdzenie 2.1. $(f_x, f_y)_0 = \sum_{i=1}^h (B_{i-1} - B_i) b_i - b_0 + 1$.

W artykule [7] podane jest bezpośrednie wyprowadzenie powyższej formuły w oparciu o lemat Tessiera, przy czym zakłada się, że $\operatorname{ord} f(0,y) = \operatorname{ord} f$, co nie jest istotne dla rachunku.

Uwaga 2.2. Jeżeli $f(x,y) = y^n + a_1(x)y^{n-1} + \cdots + a_n(x)$ jest nierozkładalnym wielomianem wyróżnionym o charakterystyce $(b_0, b_1, \ldots, b_h)$ oraz jeśli $\operatorname{ord} a_n(x) \not\equiv 0 \bmod n$, to $b_1 = \operatorname{ord} a_n(x)$.

Ponieważ liczby B_{k-1} $(k = 1, 2, \ldots, h)$ są dzielnikami liczby $n = b_0$, zatem można utworzyć pierwiastki aproksymatywne $\sqrt[B_{k-1}]{f}$. Oto podstawowe twierdzenia o nich

Twierdzenie 2.3. $(f, \sqrt[B_{k-1}]{f})_0 = \frac{1}{B_{k-1}} \sum_{i=1}^{k-1} (B_{i-1} - B_i)\, b_i + b_k$.

Twierdzenie 2.4. *Pierwiastek aproksymatywny* $\sqrt[B_{k-1}]{f}$ *jest nierozkładalny w* $\mathbb{C}\{x\}[y]$.

Oba twierdzenia są banalne, gdy $k = 1$: wtedy $B_0 = n$, a więc $\sqrt[n]{f} = y + \frac{1}{n} a_1(x)$. Gdy $k > 1$ ich dowód (szczególnie pierwszego twierdzenia) jest długi i techniczny. Oryginalny dowód S.S. Abhyankara i T.T. Moha został opublikowany w dwuczęściowej, ponad 60 stronicowej pracy [3]. Pierwszy autor opublikował następnie uproszczoną wersję w [2], drugi podał dwa dowody podstawowych twierdzeń oparte na innych ideach [5] i [6].

Zarówno pojęcie charakterystyki jak i podstawowe twierdzenia o pierwiastkach aproksymatywnych przenoszą się na przypadek wielomianów o współczynnikach meromorficznych, tzn. leżących w ciele ułamków pierścienia $\mathbb{C}\{x\}$. Szeregi zbieżne można również zastąpić przez dowolne szeregi formalne.

W związku z twierdzeniem 2.3 rozważmy ciąg $(\bar{b}_0, \bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_h)$ zdefiniowany wzorami

$$\bar{b}_0 = b_0, \qquad \bar{b}_k = \frac{1}{B_{k-1}} \sum_{i=1}^{k-1} (B_{i-1} - B_i) b_i + b_k, \qquad k = 1, \ldots, h.$$

Zgodnie z konwencją, że suma rozciągnięta na pusty zbiór wskaźników jest równa zeru, jest $\bar{b}_1 = b_1$. Czytelnik łatwo sprawdzi

Własność 2.5. $\bar{b}_{k+1} - \frac{B_{k-1}}{B_k}\bar{b}_k = b_{k+1} - b_k$ *dla* $k = 0, 1, \ldots, h-1$.

Własność 2.6. $b_{k+1} = \bar{b}_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} (\frac{B_{i-1}}{B_i} - 1)\bar{b}_i$ *dla* $k = 0, 1, \ldots, h-1$.

Z (2.5) wynika, że ciąg $(\bar{b}_k)$ jest rosnący, z własności 2.6 łatwo wnioskujemy, że $NWP(\bar{b}_0, \ldots, \bar{b}_k) = NWP(b_0, \ldots, b_k) = B_k$ dla $k = 0, 1, \ldots, h$, a znając ciąg $(\bar{b}_k)$ można wyznaczyć charakterystykę (b_k). W szczególności liczbę Milnora można łatwo wyznaczyć w terminach $(\bar{b}_k)$, bo zachodzi

Własność 2.7. $\sum_{i=1}^{h} (B_{i-1} - B_i) b_i = \sum_{i=1}^{h} (\frac{B_{i-1}}{B_i} - 1)\bar{b}_i$.

Liczby $(\bar{b}_k)$ pojawiają się w naturalny sposób w opisie półgrupy związanej z krzywą $f = 0$, nad czym się tutaj nie zatrzymujemy. Ciągi $(B_0, \ldots, B_h)$ oraz $(\bar{b}_0, \ldots, \bar{b}_h)$ związane z charakterystyką $(b_0, \ldots, b_h)$ pozwalają zwięźle zapisać wszystkie ważniejsze wzory z teorii osobliwości krzywych; używane przez wielu autorów czterech lub pięciu pomocniczych ciągów zmniejsza czytelność formuł.

3. Dowód twierdzenia o podzielności stopni

Jako zastosowanie pierwiastków aproksymatywnych podamy tutaj dowód twierdzenia 0.2. W tym celu oznaczmy $n = \deg C$, $m = \deg C - \operatorname{mult}_0 C$, a więc $\operatorname{mult}_0 C = n - m$. Obierzmy afiniczny układ współrzędnych x, y tak, że:

(a) prosta w nieskończoności nie przechohdzi przez 0,
(b) punkt 0 jest początkiem układu współrzędnych afinicznych, a oś $x = 0$ jest jedyną styczną do krzywej C w tym punkcie.

Niech $f(x, y) = 0$ będzie równaniem nierozkładalnym krzywej C. Ponieważ prosta $x = 0$ nie przecina krzywej w punktach w nieskończoności, więc możemy założyć, że

$$f(x, y) = y^n + a_1(x)\, y^{n-1} + \cdots + a_n(x), \qquad \deg a_i(x) \le i \quad \text{dla} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Punkt 0 jest jedynym punktem przecięcia krzywej C i prostej $x = 0$, ich krotność przecięcia jest więc równa $\deg C = n$, stąd

$$a_1(0) = \cdots = a_n(0) = 0.$$

Z analitycznej nierozkładalności krzywej C w 0 wnioskujemy, że $f(x, y)$ jest nierozkładalny w $\mathbb{C}\{x, y\}$, a więc jest określona jego charakterystyka $(b_0, b_1, \ldots, b_h)$.

Lemat 3.1. $\sum_{i=1}^{h-1}(B_{i-1} - B_i)\, b_i + B_{n-1} b_n \leq n^2$.

Dowód. Pierwiastek aproksymatywny $\sqrt[B_{h-1}]{f}$ jest wielomianem stopnia n/B_{h-1} (por. wniosek 1.4) względnie pierwszym z f (bo f jest nierozkładalny stopnia n), a więc z twierdzenia Bezouta:

$$(f, \sqrt[\frac{n}{B_{h-1}}]{f})_0 \leq \deg f \deg \sqrt[B_{h-1}]{f} = n\, \frac{n}{B_{h-1}}.$$

Z drugiej strony, na mocy twierdzenia 2.3

$$(f, \sqrt[\frac{n}{B_{h-1}}]{f})_0 = \frac{1}{B_{h-1}} \sum_{i=1}^{h-1} (B_{i-1} - B_i)\, b_i + b_h.$$

Łącząc te dwa fakty dostajemy tezę lematu.

Lemat 3.2. $\sum_{i=1}^{h}(B_{i-1} - B_i)\, b_i = (n-1)^2$.

Dowód. Krzywa C jest wymierna, ma rodzaj zero, stąd wobec formuły Maxa Noethera

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} - \delta_0(C) = 0 \qquad \text{(cf. [7])}.$$

Zatem $\mu_0(C)$ (liczba Milnora krzywej C w 0) $= 2\delta_0(C) = (n-1)(n-2)$. Wystarczy teraz dla zakończenia dowodu lematu skorzystać z twierdzenia 2.1.

Lemat 3.3. $b_h \leq 2n - 1$.

Dowód. Z lematu 3.2 wynika, że

$$\sum_{i=1}^{h-1} (B_{i-1} - B_i)\, b_i = (n-1)^2 - (B_{h-1} - B_h)\, b_h.$$

Stosując lemat 3.1 otrzymujemy

$$(n-1)^2 - (B_{h-1} - 1)\, b_h \leq n^2 - B_{h-1}\, b_h,$$

a po łatwych przeróbkach: $b_h \leq 2n - 1$.

Dalej będziemy korzystać z ostatnich dwóch lematów. Zauważmy najpierw, że $b_1 = n - m$. Istotnie, ponieważ prosta $y = 0$ nie jest styczna do C w 0 i przecina C z krotnością $\operatorname{mult}_0 C = n - m$, z drugiej strony krotność przecięcia C i $y = 0$ w zerze jest równa $\operatorname{ord} a_n$, jest więc $\operatorname{ord} a_n = n - m$. Stąd

$b_1 = \operatorname{ord} a_n = n - m$ na podstawie uwagi 2.2. Oznaczmy $d = NWP(m, n)$, zatem $B_1 = NWP(b_0, b_1) = NWP(n, n-m) = d$. Formułę lematu 2.3 można przepisać następująco

$$b_1(B_0 - B_1) + \sum_{i=2}^{h} b_i(B_{i-1} - B_i) = (n-1)^2$$

lub równoważnie

$$(*) \qquad (n-m)(n-d) + \sum_{i=2}^{h} b_i(B_{i-1} - B_i) = (n-1)^2.$$

Ciąg $b_0, \dots, b_h$ jest rosnący, a więc

$$\begin{aligned}\sum_{i=2}^{h} b_i(B_{i-1} - B_i) &\leq b_h \sum_{i=2}^{h} b_i(B_{i-1} - B_i) \\ &= b_h(B_1 - 1) \leq (2n-1)(d-1) \qquad \text{na mocy lematu 3.3.}\end{aligned}$$

Łącząc równość $(*)$ z powyższym oszacowaniem dostajemy

$$(n-1)^2 - (n-m)(n-d) \leq (2n-1)(d-1),$$

a stąd po łatwych przeróbkach

$$mn - md - nd \leq -d.$$

Dzieląc ostatnią nierówność przez d^2 dostajemy

$$\frac{m}{d}\frac{n}{d} - \frac{m}{d} - \frac{n}{d} \leq -\frac{1}{d},$$

a więc

$$(\frac{m}{d} - 1)(\frac{n}{d} - 1) \leq 1 - \frac{1}{d}.$$

Zatem $\frac{m}{d} - 1 = 0$ lub $\frac{n}{d} - 1 = 0$. Jest więc $m = d$, bo $d \leq m \leq n$, co kończy dowód twierdzenia 0.2.

SPIS LITERATURY

1. S.S. Abhyankar, *Lectures in Algebraic Geometry*, (Notes by Chris Christensen) (1974).
2. ———, *Expansion Techniques in Algebraic Geometry*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1977.
3. S.S. Abhyankar and T.T. Moh, *Newton-Puiseux expansion and generalized Tschirnhausen transformation*, J. reine angew. Math. **260** (1973), 47–83 and **261** (1973), 29–54.
4. ———, *Embeddings of the line in the plane*, ibid. **276** (1975), 148–166.
5. T.T. Moh, *On the concept of approximate roots for algebra*, J. of Algebra **65** (1980), 347–360.
6. ———, *On two fundamental theorems for the concept of approximate roots*, J. Math. Soc. Japan **34** (1982), no. 4.
7. A. Płoski, *O niezmiennikach osobliwości krzywych analitycznych*, VII Konferencja Szkoleniowa z Teorii Zagadnień Ekstremalnych, Łódź 1985.
8. ———, *Szeregi Puiseux, diagramy Newtona i odwzorowania holomorficzne płaszczyzny* $\mathbb{C}^2$, X Konferencja Szkoleniowa z Teorii Zagadnień Ekstremalnych, Łódź 1989.
9. D.R. Richman, *On the computation of minimal polynomials*, J. of Algebra **103** (1986), 1–17.
10. L. Rudolph, *Embeddings of the line in the plane*, J. reine angew. Math. **337** (1982), 113–118.

Approximate roots of polynomials by S.S. Abhyankar and T.T. Moh

Summary. In the paper, the definition and fundamental properties of approximate roots introduced by S.S. Abhyankar and T.T. Moh are presented. As an application, the proof of the Abhyankar-Moh theorem on embeddings of the line in the plane is given.

Bronisławów, 11–15 stycznia, 1993 r.