MATERIAŁY XV KONFERENCJI SZKOLENIOWEJ
Z ANALIZY I GEOMETRII ZESPOLONEJ

1994 Łódź str. 51

TWIERDZENIA PODSTAWOWE O PIERWIASTKACH APROKSYMATYWNYCH WIELOMIANÓW

A. Płoski (Kielce)

0. Wstęp

Niniejszy artykuł jest kontynuacją pracy [6], w której przedstawiłem podstawowe pojęcia i twierdzenia teorii Abhyankara i Moha oraz ich zastosowania do automorfizmów wielomianowych. Jednocześnie T. Krasiński w artykule [4] podał inne zastosowanie pierwiastków aproksymatywnych. Celem tego opracowania są dowody podstawowych twierdzeń teorii uzyskane ostatnio przez J. Gwoździewicza i autora w pracy [3]. Starałem się uczynić tekst niezależnym, jednak aby mieć motywację do studiowania przedstawionych dowodów, Czytelnik powinien przejrzeć prace [6] i [4] z poprzedniej konferencji. Szczegółowe uwagi bibliograficzne znajdują się na końcu artykułu. W uzupełnieniu do literatury cytowanej w [6] zwrócimy jeszcze uwagę na pracę Ming – Chang Kanga [5], który dowiódł nierówności Abhyankara – Moha ([6], lemat 3.1) nie odwołując się do rozwinięć Puiseux.

Miło jest mi skorzystać z okazji aby podziękować Profesorowi Jackowi Chądzyńskiemu, który zachęcił mnie po paroletniej przerwie spowodowanej różnymi wypadkami życiowymi do ponownego podjęcia studiów nad teorią pierwiastków aproksymatywnych.

1. Rozwinięcia g–adyczne, operator Tschirnhausena, pierwiastki aproksymatywne wielomianów.

Niech A będzie pierścieniem przemiennym z jedynką, bez dzielników zera. Stopień $\deg_Y f$ wielomianu $f \in A[Y]$ jednej zmiennej Y oznaczamy krótko

$\deg f$. Przyjmujemy $\deg 0 = -\infty$ ze zwykłymi konwencjami odnośnie symbolu $-\infty$. Do wielomianów z $A[Y]$ stosuje się dzielenie z resztą: jeżeli $f, g \in A[Y]$ i g jest unitarny, to istnieje jedyna para $q, r \in A[Y]$ taka, że $f = qg + r$ i $\deg r < \deg g$.

Lemat 1.1. *Niech $g \in A[Y]$ będzie wielomianem unitarnym dodatniego stopnia. Wtedy dla każdego $f \in A[Y]$ istnieje jedyny ciąg c_0, c_1, ... , $c_l \in A[Y]$ ($l \geq 0$) taki, że*

(i) $$f = c_0 g^l + c_1 g^{l-1} + \cdots + c_l$$

(ii) $$c_0 \neq 0, \quad \deg c_i < \deg g \quad \textit{dla } i = 0, 1, \ldots, l$$

Gdy stopień g dzieli stopień f i f jest unitarny, to $l = \deg f / \deg g$ oraz $c_0 = 1$.

Dowód lematu 1.1 oparty na dzieleniu z resztą pozostawiamy Czytelnikowi. Relację (i) nazywamy rozwinięciem g–adycznym wielomianu f.

Uwaga 1.2. W oznaczeniach lematu 1.1: jeżeli $c_i, c_j \neq 0$ dla i, j takich, że $1 \leq i < j \leq l$ to $\deg c_i g^{l-i} > \deg c_j g^{l-j}$. W szczególności, jeśli $c_1 \neq 0$ to $\deg c_1 g^{l-1} = \deg(f - c_0 g^l)$.

Ustalmy wielomian unitarny $f \in A[Y]$ stopnia $n > 0$ i niech d będzie dzielnikiem liczby n. Zakładamy, że d jest elementem odwracalnym pierścienia A. Będziemy rozważać rozwinięcia g–adyczne f względem wielomianów unitarnych g stopnia n/d. Takie rozwinięcie ma postać

(*) $$f = g^d + c_1 g^{d-1} + \cdots + c_d, \qquad \deg c_i < \deg g$$

Dla danego rozwinięcia (*) wielomian $\bar{g} = g + \frac{1}{d} c_1$ jest unitarny stopnia n/d a więc rozwinięcie $\bar{g}$–adyczne ma postać

(**) $$f = \bar{g}^d + \bar{c}_1 \bar{g}^{d-1} + \cdots + \bar{c}_d, \qquad \deg \bar{c}_i < \deg \bar{g} = \deg g$$

Lemat 1.3. *Jeżeli $\bar{c}_1 \neq 0$, to $\deg \bar{c}_1 < \deg c_1$.*

Dowód. Załóżmy, że $\bar{c}_1 \neq 0$. Zatem także $c_1 \neq 0$. Na mocy uwagi 1.2 jest $\deg \bar{c}_1 \bar{g}^{d-1} = \deg(f - \bar{g}^d)$, a więc $\deg \bar{c}_1 = \deg(f - \bar{g}^d) - \deg \bar{g}^{d-1} = \deg(f - \bar{g}^d) - \deg g^{d-1}$ ponieważ $\deg \bar{g}^{d-1} = (d-1) \deg \bar{g} = (d-1) \deg g = \deg g^{d-1}$. Z drugiej strony $f - \bar{g}^d = f - (g + \frac{1}{d} c_1)^d = (g^d + c_1 g^{d-1} + \cdots + c_d) - (g^d + c_1 g^{d-1} + \ldots) =$ wielomian stopnia $< \deg c_1 g^{d-1}$ a więc $\deg \bar{c}_1 < \deg c_1$.

Lemat 1.4. *W rozwinięciu (*) jest $c_1 = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\deg(f - g^d) < \deg f - \deg g$.*

Dowód. Jeżeli $c_1 = 0$ to $f = g^d + c_2 g^{d-2} + \cdots + c_d$ a więc $\deg(f - g^d) \leq$ $\leq \max_{k=2}^{d} (\deg c_k g^{d-k}) < \deg f - \deg g$ ponieważ dla $k \geq 2$ jest $\deg c_k g^{d-k} = \deg c_k + (d-k) \deg g < \deg g + (d-k) \deg g \leq (d-1) \deg g = \deg g^d - \deg g = \deg f - \deg g$.

Jeżeli $c_1 \neq 0$ to na mocy 1.2 mamy $\deg c_1 g^{d-1} = \deg(f - g^d)$ a więc $\deg(f - g^d) = \deg c_1 + \deg g^{d-1} \geq \deg g^{d-1} = (d-1) \deg g = \deg f - \deg g$.

Definicja 1.5. Niech $f \in A[Y]$ będzie unitarny stopnia $n > 0$ i niech d będzie dzielnikiem n odwracalnym w A. Pierwiastkiem aproksymatywnym wielomianu f stopnia d nazywamy jedyny wielomian unitarny $\sqrt[d]{f}$ taki, że

$$\deg(f - (\sqrt[d]{f})^d) < \deg f - \deg \sqrt[d]{f}$$

Z definicji wynika, że $\deg f = \deg(\sqrt[d]{f})^d$ a więc $\deg \sqrt[d]{f} = \deg f/d = n/d$. Bezpośredni dowód istnienia i jednoznaczności pierwiastka aproksymatywnego podaliśmy w [6]. Niżej naszkicujemy inny dowód tych faktów, należący do Abhyankara i Moha.

Definicja 1.6. Przy oznaczeniach i założeniach definicji 1.5 dla każdego wielomianu unitarnego g stopnia n/d przyjmujemy $\tau_f(g) = g + \frac{1}{d}c_1$ gdzie c_1 jest "współczynnikiem Tschirnhausena" g–adycznego rozwinięcia f określonego formułą (*).

Twierdzenie 1.7. *Przy wprowadzonych oznaczeniach i założeniach istnieje dokładnie jeden pierwiastek aproksymatywny $\sqrt[d]{f}$. Zachodzi formuła*

$$\sqrt[d]{f} = \underbrace{\tau_f \circ \tau_f \circ \cdots \circ \tau_f}_{n/d \text{ razy}}(g)$$

dla dowolnego wielomianu unitarnego g stopnia n/d.

Dowód. Łatwy dowód jedyności pierwiastka pozostawiamy Czytelnikowi. Aby wykazać istnienie pierwiastka a zarazem zapowiedzianą formułę, ustalmy wielomian unitarny g stopnia n/d. Z lematu 1.3 bezpośrednio wynika, że rozwinięcie $\tau_f(g)$–adyczne wielomianu f ma współczynnik Tschirnhausena niższego stopnia niż współczynnik Tschirnhausena rozwinięcia g–adycznego.

Stosując operator τ_f n/d razy otrzymamy rozwinięcie $\tau_f \circ \tau_f \circ \cdots \circ \tau_f(g)$–adyczne o zerowym współczynniku Tschirnhausena. Stąd, na mocy lematu 1.4 wynika istnienie pierwiastka aproksymatywnego, a na mocy jednoznaczności także podana wyżej formuła.

Własność 1.8. *Niech liczby całkowite $d, e > 0$ będą dzielnikami n odwracalnymi w pierścieniu A. Wtedy $\sqrt[e]{\sqrt[d]{f}} = \sqrt[ed]{f}$*

Dowód. Oznaczamy $h = \sqrt[e]{\sqrt[d]{f}}$. Zatem h jest unitarny stopnia $\frac{n}{de}$. Mamy $\sqrt[d]{f} = h^e + R$ gdzie $\deg R < \frac{n}{d} - \frac{n}{de}$ oraz $f = (\sqrt[d]{f})^d + S$, $\deg S < n - \frac{n}{d} \leq n - \frac{n}{de}$. Łącząc obie równości otrzymujemy $f = (h^e + R)^d + S = h^{ed} + T$ gdzie $T = \sum_{i=1}^{d} \binom{d}{i}(h^e)^{d-i}R^i + S$. Ponieważ $\deg(\binom{d}{i}(h^e)^{d-i}R^i) < (ed - ei)\frac{n}{de} + i(\frac{n}{d} - \frac{n}{de}) = n - i\frac{n}{de} \leq n - \frac{n}{de}$ zatem $\deg T < n - \frac{n}{de}$. Stąd i z równości $f = h^{ed} + T$ wynika, że $h = \sqrt[ed]{f}$.

2. Twierdzenia podstawowe

Oznaczenia i założenia opisane poniżej będą obowiązywały w całym artykule. Będziemy rozważali *nierozkładalny* wielomian wyróżniony

$$f(x, y) = y^n + a_1(x)y^{n-1} + \cdots + a_n(x), \qquad n \geq 1,$$

którego współczynniki leżą w pierścieniu szeregów zbieżnych $\mathbb{C}\{x\}$ jednej zmiennej x.

Takie wielomiany mają dość szczególną strukturę rozwiązań opisaną przez

Twierdzenie 2.1 (Newtona–Puiseux). *Istnieje szereg $y(t) \in \mathbb{C}\{t\}$ (t jedna zmienna) taki, że*

$$f(t^n, y) = \prod_{\epsilon^n=1} (y - y(\epsilon t))$$

Co więcej, stopień n wielomianu f jest najmniejszą liczbą całkowitą $n' \geq 1$ taką, że równanie $f(t^{n'}, y) = 0$ ma rozwiązanie w $\mathbb{C}\{t\}$.

Twierdzenie Newtona–Puiseux obok twierdzenia przygotowawczego i twierdzenia o funkcjach uwikłanych należy do podstawowych faktów geometrii analitycznej i posiada kilka dowodów zarówno algebraicznych jak analitycznych (por. [1] i literatura cytowana w pracy [6]). Dalej istotna jest następująca

Uwaga do twierdzenia Newtona–Puiseux. Niech $y(t) = \sum a_j t^j$ oraz $\operatorname{supp} y(t) = \{j \in \mathbb{N} : a_j \neq 0\}$. Wówczas liczby zbioru $\{n\} \cup \operatorname{supp} y(t)$ mają największy wspólny dzielnik równy 1 (gdyby miały wspólny dzielnik $d > 1$ to równanie $f(t^{n'}, y) = 0$, $n' = n/d$ miałoby rozwiązanie w $\mathbb{C}\{t\}$, co jest sprzeczne z drugą częścią twierdzenia 2.1). Jest oczywiście $\operatorname{supp} y(t) = \operatorname{supp} y(\epsilon t)$ a więc zbiór $S(f) = \operatorname{supp} y(t)$ nie zależy od wyboru rozwiązania równania $f(t^n, y) = 0$.

W rozwinięciu $y(t) = \sum a_j t^j$ specjalną rolę odgrywają pewne wskaźniki j. Mianowicie *charakterystyką* wielomianu wyróżnionego i nierozkładalnego f nazywamy ciąg liczb całkowitych $b_0, b_1, \dots, b_h$ spełniających warunki

(i) $b_0 = n$.
(ii) Jeżeli $1 \leq k \leq h$, to b_k jest najmniejszym elementem zbioru $S(f) = \{j \in \mathbb{N} : a_j \neq 0\}$ niepodzielnym przez $NWP(b_0, \dots, b_{k-1})$
(iii) $NWP(b_0, \dots, b_h) = 1$

Łatwo zauważyć, że ciąg $b_1, \dots, b_h$ jest silnie rosnący. Gdy $n = 1$ to $h = 0$ i charakterystyka redukuje się do jednego wyrazu $b_0 = 1$. Istnienie charakterystyki wynika z uwagi do twierdzenia Newtona–Puiseux. Oznaczmy $B_k = NWP(b_0, \dots, b_k)$ dla $k = 0, 1, \dots, h$. Zatem $B_0 = n, B_1, \dots, B_{h-1}, B_h = 1$ jest ściśle malejącym, na mocy warunku (ii), ciągiem dzielników liczby n. Stąd $n \geq 2^h$.

Niech $u(n)$ będzie zbiorem rozwiązań równania $\epsilon^n = 1$.

Lemat 2.2. *Jeżeli $\epsilon \in u(B_{k-1}) \setminus u(B_k) \quad (1 \leq k \leq h)$, to $\operatorname{ord}(y(t) - y(\epsilon t)) = b_k$.*

Dowód. Ustalmy wskaźnik k i napiszmy
$y(t) =$ (suma jednomianów $a_j t^j$ stopnia $< b_k$)$+ a_{b_k} t^{b_k} + \dots = Y(t^{B_{k-1}}) + a_{b_k} t^{b_k} + \dots$
Ostatnia równość wynika z faktu, że jeśli $a_j \neq 0$ oraz $j < b_k$ to j jest podzielne przez $NWP(b_0, \dots, b_{k-1}) = B_{k-1}$. Jeżeli teraz $\epsilon \in u(B_{k-1}) \setminus u(B_k)$, to $\epsilon^{B_{k-1}} = 1$ oraz $\epsilon^{b_k} \neq 1$ bo $B_k = NWP(B_{k-1}, b_k)$ a więc $y(t) - y(\epsilon t) = a_{b_k}(1 - \epsilon^{b_k}) t^{b_k} + \dots$ jest rzędu b_k.

Udowodniony lemat dostarcza pewnej motywacji dla pojęcia charakterystyki oraz jest punktem wyjścia do otrzymania rozmaitych formuł zawierających wykładniki charakterystyczne $b_0, b_1, \dots, b_h$.

Uwaga o parach charakterystycznych. Wielu autorów rozważa pary charakterystyczne $(m_k, n_k) \quad (k = 1, \dots, h)$ określone wzorami

$$m_k = \frac{b_k}{B_k}, \quad n_k = \frac{B_{k-1}}{B_k}$$

Ponieważ $NWP(B_{k-1}, b_k) = B_k$, więc elementy pary charakterystycznej są liczbami względnie pierwszymi. Pary charakterystyczne i liczba n określają charakterystykę:

$$b_k = \frac{m_k}{n_1 \dots n_k} n, \quad B_k = \frac{n}{n_1 \dots n_k}$$

Dla dowolnego szeregu $g = g(x, y)$ dwóch zmiennych x, y definiujemy krotność przecięcia $(f, g)_0$ krzywych $f = 0$, $g = 0$ przyjmując

$$(f, g)_0 = \operatorname{ord} g(t^n, y(t)).$$

Oczywiście podana definicja nie zależy od wyboru rozwiązania $y(t)$ równania $f(t^n, y) = 0$. Jest $(f, g)_0 < +\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy g jest niepodzielne przez f.

Odnotujmy dwie własności krotności wynikające bezpośrednio z podanej definicji:

(*) dla dowolnej skończonej rodziny szeregów $(g_i)_{i \in I}$ jest $(f, \sum_i g_i)_0 \geq \min_i (f, g_i)_0$. Jeżeli minimum jest osiągnięte dla dokładnie jednego wskaźnika, to zachodzi równość.

(**) $(f, \prod_i g_i)_0 = \sum_i (f, g_i)_0$

Zbiór $\Gamma(f)$ wszystkich liczb postaci $(f, g)_0$ gdzie g jest szeregiem niepodzielnym przez f nazywamy półgrupą krzywej f. Zbiór ten jest istotnie półgrupą bo zawiera 0 i jest zamknięty względem dodawania. Gdy $n = 1$ to $\Gamma(f) = \mathbb{N}$, gdy $n > 1$ to $\Gamma(f) \subsetneq \mathbb{N}$ i półgrupa $\Gamma(f)$ daje informację o osobliwości krzywej $f = 0$. Celowe jest zdefiniowanie ciągu $\bar{b}_0, \dots, \bar{b}_h$ przez przyjęcie

$$\bar{b}_0 = b_0, \quad \bar{b}_k = b_k + \frac{1}{B_{k-1}} \sum_{i=1}^{k-1} (B_{i-1} - B_i) b_i \quad \text{dla } k = 1, \dots, h.$$

Jest więc $\bar{b}_1 = b_1$. Łatwo sprawdzić, że $NWP(\bar{b}_0, \dots, \bar{b}_k) = B_k$ dla $0 \leq k \leq h$ oraz

$$b_0 = \bar{b}_0, \quad b_k = \bar{b}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{B_{i-1}}{B_i} - 1\right) \bar{b}_i \quad \text{dla } k = 1, \dots, h.$$

Zatem znając ciąg $\bar{b}_0, \dots, \bar{b}_h$ możemy odtworzyć charakterystykę $b_0, \dots, b_h$.

Twierdzenie 2.3 (o strukturze półgrupy). *Jest* $\Gamma(f) = \mathbb{N}\bar{b}_0 + \dots + \mathbb{N}\bar{b}_h$. *Dla każdego* k, $1 \leq k \leq h$ *liczba* $\bar{b}_k$ *jest najmniejszym elementem półgrupy* $\Gamma(f)$ *nie leżącym w półgrupie* $\mathbb{N}\bar{b}_0 + \dots + \mathbb{N}\bar{b}_{k-1}$.

Powyższe twierdzenie pokazuje, że ciąg $\bar{b}_0, \dots, \bar{b}_h$ (a więc także charakterystyka $b_0, \dots, b_h$) jest wyznaczony przez element $\bar{b}_0 = n$ oraz półgrupę $\Gamma(f)$. Twierdzenie 2.3 odgrywa podstawową rolę w teorii osobliwości krzywych [7], jego dowód podamy w §4 tej pracy. Niech teraz Γ będzie podpółgrupą półgrupy $(\mathbb{N}, +)$ i niech $n \geq 1$ będzie daną liczbą całkowitą. Ciąg $g_0, g_1, \dots, g_h$ nazywamy n–minimalnym ciągiem generatorów półgrupy Γ gdy

(α) $g_0 = n$,

(β) $g_k \in \Gamma$ jest najmniejszym elementem Γ nie leżącym w $\mathbb{N}g_0 + \dots + \mathbb{N}g_{k-1}$ $(1 \leq k \leq h)$,

(γ) $\Gamma = \mathbb{N}g_0 + \dots + \mathbb{N}g_h$.

Oczywiście n–minimalny ciąg generatorów półgrupy Γ jest wynaczony jednoznacznie przez Γ i n. Półgrupę nazywamy n–planarną gdy ma n–minimalny ciąg generatorów g_0, g_1, ... , g_h spełniający warunki

(δ) $G_k = NWP(g_0, \ldots, g_k)$ $(0 \leq k \leq h)$ jest silnie malejący i $G_h = 1$,

(ϵ) $G_{k-1}g_k < G_k g_{k+1}$ dla $k = 1, \ldots, h-1$.

Z twierdzenia 2.3 wynika, że $\bar{b}_0$, ... , $\bar{b}_h$ jest n–minimalnym ciągiem generatorów półgrupy $\Gamma(f)$. Ponadto spełnione są warunki (δ) i (ϵ) bo ciąg B_k silnie maleje i $B_h = 1$ oraz $\bar{b}_{k+1} - \frac{B_{k-1}}{B_k}\bar{b}_k = b_{k+1} - b_k > 0$ dla $k = 0, 1, \ldots, h-1$.

Zatem mamy

Wniosek z twierdzenia o strukturze półgrupy. Półgrupa $\Gamma(f)$ nierozkładalnego wielomianu wyróżnionego f stopnia n jest n–planarna.

Można udowodnić twierdzenie odwrotne: jeżeli $\Gamma \subset \mathbb{N}$ jest półgrupą n–planarną, to istnieje nierozkładalny wyróżniony wielomian f stopnia n taki, że $\Gamma(f) = \Gamma$ (por. [2]).

Twierdzenie 2.4 (podstawowe o pierwiastkach aproksymatywnych). *Przy założeniach i oznaczeniach przyjętych na początku tego paragrafu:*

$$(f, \sqrt[B_{k-1}]{f})_0 = \bar{b}_k \qquad \textit{dla } k = 1, 2, \ldots, h.$$

Dowód powyższego twierdzenia podajemy w §5 tego artykułu.

Twierdzenie 2.5 (o nierozkładalności pierwiastków aproksymatywnych). *Wielomiany* $\sqrt[B_{k-1}]{f}$ $(1 \leq k \leq h)$ *są nierozkładalne w pierścieniu* $\mathbb{C}\{x\}[y]$.

Dowód twierdzenia 2.5 opiera się na twierdzeniu 2.4 i kryterium nierozkładalności, które podajemy w §6 tego artykułu. Łatwo sprawdzić, że pierwiastek aproksymatywny wielomianu wyróżnionego jest wielomianem wyróżnionym. Wynika stąd, że w twierdzeniu 2.5 nierozkładalność w $\mathbb{C}\{x\}[y]$ można zastąpić nierozkładalnością w $\mathbb{C}\{x, y\}$.

3. Lematy przygotowawcze

Przyjmujemy założenia i oznaczenia z §2. Wszystkie trzy twierdzenia przedstawione wyżej opierają się na dwóch lematach, które dla naszych celów nazwaliśmy lematami przygotowawczymi.

Lemat 3.1. *Dla każdego* $k = 0, 1, \ldots, h-1$ *istnieje wielomian unitarny* $f_k \in \mathbb{C}\{x\}[y]$ *stopnia* n/B_k *taki, że* $(f, f_k)_0 = \bar{b}_{k+1}$.

Dowód. Niech $y(t) = \sum a_j t^j$ oraz $y_k(t) = \sum\limits_{j<b_{k+1}} a_j t^j$, zatem z definicji charakterystyki wynika, że $y_k(t) = Y_k(t^{B_k})$ gdzie $Y_k(s)$ jest szeregiem jednej zmiennej takim, że elementy zbioru $\{n/B_k\} \cup \operatorname{supp} Y_k(s)$ mają największy wspólny podzielnik równy 1. Istnieje wielomian $f_k(x, y) \in \mathbb{C}\{x\}[y]$ taki, że

$$f_k(s^{n/B_k}, y) = \prod_{\mu \in u(n/B_k)} (y - Y_k(\mu s))$$

Wynika to z faktu, że iloczyn po prawej stronie nie zmienia się gdy zastąpimy s przez θs gdzie $\theta s \in u(n/B_k)$. Mamy

$$(f, f_k)_0 = \operatorname{ord} f_k(t^n, y(t)) = \operatorname{ord} \prod_{\mu} (y(t) - Y_k(\mu t^{B_k})) =$$

$$= \sum \operatorname{ord}(y(t) - Y_k(\mu t^{B_k})) = b_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{B_{i-1}}{B_k} - \frac{B_i}{B_k} \right) b_i = \bar{b}_{k+1}$$

ponieważ $\operatorname{ord}(y(t) - Y_k(t^{B_k})) = \operatorname{ord}(y(t) - y_k(t)) = b_{k+1}$ oraz $\operatorname{ord}(y(t) - Y_k(\mu t^{B_k})) = \operatorname{ord}(Y_k(t^{B_k}) - Y_k(\mu t^{B_k})) = B_k \operatorname{ord}(Y_k(s) - Y_k(\mu s)) = B_k \frac{b_i}{B_k}$ dla $\mu \in u(\frac{B_{i-1}}{B_k}) \setminus u(\frac{B_i}{B_k})$.

Lemat 3.2. *Niech* $0 \le k \le h$. *Jeżeli* $\psi(x,y) \in \mathbb{C}\{x\}[y]$ *jest niezerowy oraz* $\deg_y \psi < n/B_k$ *to* $(f,\psi)_0 \in \mathbb{N}\bar{b}_0 + \cdots + \mathbb{N}\bar{b}_k$.

Dowód. Indukcja względem k. Dla $k = 0$ lemat jest trywialny, załóżmy więc, że $1 \le k \le h$ i że lemat jest prawdziwy dla wielomianów stopnia $< n/B_{k-1}$.

Ustalmy wielomian niezerowy $\psi = \psi(x,y) \in \mathbb{C}\{x\}[y]$ taki, że $\deg_y \psi < n/B_k$ i rozważmy rozwinięcie f_{k-1}–adyczne wielomianu ψ:

(1) $\psi = \psi_0 f_{k-1}^s + \psi_1 f_{k-1}^{s-1} + \cdots + \psi_s, \qquad \psi_0 \neq 0, \quad \deg_y \psi_i < \deg_y f_{k-1} = n/B_{k-1}$

Jest $s \le \deg \psi / \deg f_{k-1} < n_k = B_{k-1}/B_k$. Niech I będzie zbiorem wskaźników $i \in \{0, \ldots, s\}$ takich, że $\psi_i \neq 0$. Ponieważ $\deg_y \psi_i < n/B_{i-1}$ więc z założenia indukcyjnego otrzymujemy $(f,\psi_i)_0 \in \mathbb{N}\bar{b}_0 + \cdots + \mathbb{N}\bar{b}_{k-1}$ a więc

(2) $$(f,\psi_i)_0 \equiv 0 \mod B_{k-1} \qquad \text{dla } i \in I$$

Udowodnimy, że

(3) $$(f, \psi_i f_{k-1}^{s-i})_0 \neq (f, \psi_j f_{k-1}^{s-j})_0 \qquad \text{dla } i \neq j \in I$$

Przypuśćmy, że relacja (3) nie jest prawdziwa. Istnieją więc wskaźniki $i, j \in I$, $i < j$ takie, że $(f, \psi_i f_{k-1}^{s-i})_0 = (f, \psi_j f_{k-1}^{s-j})_0$. Z ostatniej równości wynika, że $(f,\psi_i)_0 + (s-i)\bar{b}_k = (f,\psi_j)_0 + (s-j)\bar{b}_k$ a stąd $(j-i)\bar{b}_k = (f,\psi_j)_0 - (f,\psi_i)_0 \equiv 0 \mod B_{k-1}$ na podstawie (2). Mamy więc $(j-i)\frac{\bar{b}_k}{B_k} \equiv 0 \mod n_k$ a więc $j - i \equiv 0 \mod n_k$ ponieważ $\bar{b}_k/B_k$ oraz n_k są względnie pierwsze. Kongruencja $j-i \equiv 0 \mod n_k$ jest niemożliwa bo $0 < j - i < n_k$ a więc przypuszczenie, że (3) nie jest prawdziwe prowadzi do sprzeczności.

Z relacji (1) i (3) otrzymujemy $(f,\psi)_0 = \min_{i=0}^{s} (f, \psi_i f_{k-1}^{s-i})_0 = (f, \psi_i f_{k-1}^{s-i})_0 = (f,\psi_i)_0 + (s-i)(f, f_{k-1})_0 = (f,\psi_i)_0 + (s-i)\bar{b}_k \in \mathbb{N}\bar{b}_0 + \cdots + \mathbb{N}\bar{b}_k$ co kończy dowód indukcyjny lematu.

4. Dowód twierdzenia o strukturze półgrupy

Z lematu 3.1 bezpośrednio wynika, że $\bar{b}_0, \ldots, \bar{b}_h \in \Gamma(f)$ a stąd $\mathbb{N}\bar{b}_0 + \cdots + \mathbb{N}\bar{b}_h \subset \Gamma(f)$. Z twierdzenia o dzieleniu z resztą szeregów potęgowych i definicji półgrupy $\Gamma(f)$ wynika, że każdy element $\Gamma(f)$ ma postać $(f,\psi)_0$, gdzie $\psi \in \mathbb{C}\{x\}[y]$, $\deg_y \psi < n = n/B_h$. Zatem lemat 3.2 implikuje: $\mathbb{N}\bar{b}_0 + \cdots + \mathbb{N}\bar{b}_h = \Gamma(f)$.

Rozważmy teraz element $\bar{b} \in \Gamma(f)$ taki, że $\bar{b} \notin \mathbb{N}\bar{b}_0 + \cdots + \mathbb{N}\bar{b}_{k-1}$. Jest więc $\bar{b} = a_0\bar{b}_0 + \cdots + a_{k-1}\bar{b}_{k-1} + a_k\bar{b}_k + \cdots + a_h\bar{b}_h$ gdzie $a_0, \ldots, a_h$ są liczbami całkowitymi nieujemnymi przy czym nie wszystkie liczby $a_k, \ldots, a_h$ są równe zeru. Jeżeli $a_l \neq 0$, $l \ge k$ to $\bar{b} \ge \bar{b}_l \ge \bar{b}_k$ a więc $\bar{b} \ge \bar{b}_k$ czyli $\bar{b}_k$ jest najmniejszym elementem półgrupy $\Gamma(f)$ nie leżącym w $\mathbb{N}\bar{b}_0 + \cdots + \mathbb{N}\bar{b}_{k-1}$.

5. Dowód twierdzenia podstawowego

Udowodnimy najpierw

Twierdzenie 5.1. *Niech $g(x,y) \in \mathbb{C}\{x\}[y]$ będzie wielomianem unitarnym stopnia n/B_k. Załóżmy, że $(f,g)_0 > n_k\bar{b}_k$ (przypominamy, że $n_k = B_{k-1}/B_k$). Wtedy $(f, \sqrt[n_k]{g})_0 = \bar{b}_k$.*

Dowód. Wystarczy sprawdzić następującą implikację:

(*) jeżeli $h(x,y) \in \mathbb{C}\{x\}[y]$ jest wielomianem unitarnym stopnia n/B_{k-1} takim, że $(f,h)_0 = \bar{b}_k$, to $(f, \tau_g(h))_0 = \bar{b}_k$

Istotnie, z (*) wynika, że zbiór wielomianów $h(x,y)$ spełniających warunki $\deg_y h = n/B_{k-1}$, $(f,h)_0 = \bar{b}_k$ jest zamknięty ze względu na operację τ_g. Zbiór ten jest niepusty bo zawiera wielomian f_{k-1} skonstruowany w lemacie 3.1. Do rozważanego zbioru należy też (na mocy 1.7)

$$\sqrt[n_k]{g} = \underbrace{\tau_g \circ \tau_g \circ \cdots \circ \tau_g}_{n/d \text{ razy}}(f_{k-1})$$

a więc $(f, \sqrt[n_k]{g})_0 = \bar{b}_k$.

Aby udowodnić (*) ustalmy wielomian $h(x,y)$ unitarny stopnia n/B_{k-1} taki, że $(f,h)_0 = \bar{b}_k$ i rozważmy h–adyczne rozwinięcie wielomianu g:

$$g = h^{n_k} + a_1 h^{n_k-1} + \cdots + a_{n_k}, \qquad \deg_y a_i < n/B_{k-1} \tag{1}$$

Niech I będzie zbiorem takich wskaźników $i \in \{1, \ldots, n_k\}$ że $a_i \neq 0$. Zatem $(f,a_i)_0 < +\infty$ dla $i \in I$ i na podstawie lematu 3.2 otrzymujemy $(f,a_i)_0 \in \mathbb{N}\bar{b}_0 + \cdots + \mathbb{N}\bar{b}_{k-1}$. Jest więc $(f,a_i)_0 \equiv 0 \mod B_{k-1}$ dla $i \in I$. Twierdzimy że

$$(f, a_i h^{n_k-i})_0 \neq (f, a_j h^{n_k-j})_0 \qquad \text{dla } i \neq j \in I \tag{2}$$

Gdyby $(f, a_i h^{n_k-i})_0 = (f, a_j h^{n_k-j})_0$ dla $i < j$ to podobnie jak w dowodzie lematu 3.2 otrzymalibyśmy kongruencję $(j-i)\frac{\bar{b}_k}{B_k} \equiv 0 \mod n_k$ która prowadzi do sprzeczności, gdyż $0 < j-i < n_k$.

Z relacji (1) i (2) otrzymujemy

$$(f, g - h^{n_k})_0 = \min_{i=1}^{n_k} (f, a_i h^{n_k-i})_0 \tag{3}$$

Z założenia $(f,g)_0 > n_k\bar{b}_k = (f, h^{n_k})_0$ a więc $(f, g-h^{n_k})_0 = n_k\bar{b}_k$ i z (3) wynika, że $n_k\bar{b}_k \leq (f, a_i h^{n_k-i})_0 = (f,a_i)_0 + (n_k - i)(f,h)_0 = (f,a_i)_0 + (n_k-i)\bar{b}_k$ dla $i = 1, \ldots, n_k$. Stąd

$$(f,a_i)_0 \geq i\bar{b}_k \qquad \text{dla } i = 1, \ldots, n_k \tag{4}$$

Ponadto zachodzi

$$\text{jeżeli} \quad (f,a_i)_0 = i\bar{b}_k, \quad 1 \leq i \leq n_k \qquad \text{to} \quad i = n_k. \tag{5}$$

Rzeczywiście, z równości $(f,a_i)_0 = i\bar{b}_k$ wynika $i\bar{b}_k \equiv 0 \mod B_{k-1}$ bo jak stwierdziliśmy wcześniej $(f,a_i)_0$ jest liczbą podzielną przez B_{k-1}. Jest więc

$i\frac{\bar{b}_k}{B_k} \equiv 0 \mod n_k$ a stąd $i = n_k$ bo $1 \leq i \leq n_k$ a liczby $\bar{b}_k/B_k$ oraz n_k są względnie pierwsze.

Z (5) otrzymujemy ($n_k > 1!$):

$$(6) \qquad (f, a_1)_0 > \bar{b}_k$$

Dlatego $(f, \tau_g(h))_0 = (f, h + \frac{1}{n_k}a_1)_0 = (f, h)_0 = \bar{b}_k$ co dowodzi implikacji (*) a więc także twierdzenia 5.1.

Pokażemy teraz jak z twierdzenia 5.1 wynika twierdzenie podstawowe 2.4. Rozważmy przypadek $k = h$. Wówczas $B_h = 1$, $n_h = B_{h-1}$ i twierdzenie 5.1 redukuje się do następującego faktu:

jeżeli $g(x, y) \in \mathbb{C}\{x\}[y]$ jest wielomianem unitarnym stopnia n takim, że $(f, g)_0 > B_{h-1}\bar{b}_h$ to $(f, \sqrt[B_{h-1}]{g})_0 = \bar{b}_h$.

W szczególności wielomian f w oczywisty sposób spełnia założenia powyższej implikacji co pozwala stwierdzić, że $(f, \sqrt[B_{h-1}]{f})_0 = \bar{b}_h$. Twierdzenie podstawowe jest więc prawdziwe dla $k = h$.

Załóżmy, że twierdzenie podstawowe jest prawdziwe dla pewnego $1 \leq k \leq h$ tzn. $(f, \sqrt[B_{k-1}]{f})_0 = \bar{b}_k$. Sprawdzimy, że jest prawdziwe dla $k - 1$.

Wielomian $\sqrt[B_{k-1}]{f}$ jest unitarny stopnia n/B_{k-1} oraz $(f, \sqrt[B_{k-1}]{f})_0 = \bar{b}_k > n_{k-1}\bar{b}_{k-1}$ możemy więc zastosować twierdzenie 5.1 do $g = \sqrt[B_{k-1}]{f}$. Otrzymujemy $(f, \sqrt[n_{k-1}]{g})_0 = \bar{b}_{k-1}$ a więc $(f, \sqrt[B_{k-2}]{f})_0 = \bar{b}_{k-1}$ bo $\sqrt[n_{k-1}]{g} = \sqrt[B_{k-2}]{f}$ na mocy własności 1.8.

W ten sposób udowodniliśmy twierdzenie podstawowe przez indukcję zstępującą względem k.

6. Kryterium nierozkładalności

Nierozkładalność pierwiastków aproksymatywnych (twierdzenie 2.5) wynika bezpośrednio z twierdzenia podstawowego 2.4 oraz z następującego kryterium nierozkładalności

Twierdzenie 6.1. *Niech $g = g(x, y) \in \mathbb{C}\{x\}[y]$ będzie wielomianem unitarnym stopnia n/B_{k-1}. Wówczas $(f, g)_0 \leq \bar{b}_k$. Jeżeli $(f, g)_0 = \bar{b}_k$, to wielomian g jest nierozkładalny.*

Dowód. Niech $f_{k-1} \in \mathbb{C}\{x\}[y]$ będzie wielomianem skonstruowanym w lemacie 3.1. Zatem f_{k-1} jest unitarny, stopnia n/B_{k-1} i taki, że $(f, f_{k-1})_0 = \bar{b}_k$. Wielomian $g - f_{k-1}$ jest więc stopnia $< n/B_{k-1}$, a więc z lematu 3.2 wynika, że
$(f, g - f_{k-1})_0 \in \mathbb{N}\bar{b}_0 + \cdots + \mathbb{N}\bar{b}_{k-1}$, a więc $(f, g - f_{k-1})_0 \equiv 0 \mod B_{k-1}$. Jest więc $(f, f_{k-1})_0 = \bar{b}_k \neq (f, g - f_{k-1})_0$, gdyż $\bar{b}_k$ nie dzieli sie przez B_{k-1}, zatem $(f, g)_0 = \min\{(f, f_{k-1})_0, (f, g - f_{k-1})_0\} \leq (f, f_{k-1})_0 = \bar{b}_k$.

Załóżmy, że $(f, g)_0 = \bar{b}_k$ i przypuśćmy, że g nie jest nierozkładalny. Istnieją wtedy wielomiany unitarne g_1, $g_2 \in \mathbb{C}\{x\}[y]$ dodatnich stopni takie, że $g = g_1 g_2$. Jest więc $\deg_y g_1$, $\deg_y g_2 < \deg_y g = n/B_{k-1}$, a więc $(f, g_1)_0$, $(f, g_2)_0 \in \mathbb{N}\bar{b}_0 + \cdots + \mathbb{N}\bar{b}_{k-1}$ na mocy lematu 3.2. Prowadzi to do sprzeczności z założeniem $(f, g)_0 = \bar{b}_k$ ponieważ $(f, g)_0 = (f, g_1 g_2)_0 = (f, g_1)_0 + (f, g_2)_0 \in \mathbb{N}\bar{b}_0 + \cdots + \mathbb{N}\bar{b}_{k-1}$ jest liczbą podzielną przez B_{k-1}.

7. Uwagi bibliograficzne

Rozwinięcia g–adyczne wielomianów i "przekształcenie Tschirnhausena"

$$Y^n + a_1 Y^{n-1} + \cdots + a_n = (Y + \frac{a_1}{n})^n + \tilde{a}_2 (Y + \frac{a_1}{n})^{n-2} + \cdots + \tilde{a}_n$$

należą do repertuaru algebry klasycznej.

Pojęcia: pierwiastka aproksymatywnego i operatora Tschirnhausena τ_f zostały wprowadzone przez Abhyankara i Moha w 1973 roku (por. praca tych autorów cytowana w [6]). Formuła $\sqrt[ed]{f} = \sqrt[e]{\sqrt[d]{f}}$ została podana w pracy [3]. Twierdzenie Newtona–Puiseux i pojęcie "parametrycznej" krotności przecięcia krzywych pojawiły się w literaturze matematycznej drugiej połowy XIX wieku, wykładniki charakterystyczne wprowadzili, niezależnie od siebie, Halphen i Smith w końcu minionego stulecia. W latach 30–tych XX wieku podano interpretację topologiczną par charakterystycznych. Pojęcie półgrupy osobliwości wprowadził Apéry w pracy z 1946 roku (por. literatura cytowana w [2]). Twierdzenie o strukturze półgrupy pojawiło się w latach 60–tych i związane jest z nazwiskami Azevedo, Abhyankara i Zariskiego. Twierdzenie podstawowe o pierwiastkach aproksymatywnych i nierozkładalność pierwiastków są głównymi wynikami teorii Abhyankara i Moha. W formie podanej przez nas wystarczają we wszystkich zastosowaniach: oryginalne twierdzenia dotyczą ogólniejszego przypadku wielomianów o współczynnikach meromorficznych. Lematy nazwane przez nas "przygotowawczymi" pochodzą od Zariskiego [7] który przeprowadza rachunki "w generycznym układzie współrzędnych". Wielomiany skonstruowane w lemacie 3.1 Abhyankar nazywa "pseudopierwiastkami aproksymatywnymi", konstrukcja ta pojawia się w literaturze przed ukazaniem się pracy Abhyankara i Moha.

Dowód twierdzenia podstawowego został podany w pracy [3] J. Gwoździewicza i autora. Inne dowody tego twierdzenia wykorzystują technikę "deformacji" (por. [1] "The why of deformations" p. 365). Kryterium nierozkładalności oraz dowód twierdzenia o nierozkładalności pierwiastków aproksymatywnych również pochodzi z pracy [3]. Z kryterium nierozkładalności Abhyankara i Moha Czytelnik może się zapoznać w pracy [4], a z uogólnieniami również w [3].

SPIS LITERATURY

[1] S. S. Abhhyankar, *On the semigroup of a meromorphic curve*, Int. Symp. on Algebraic Geometry (1977), Kyoto, 249–414.

[2] G. Angermüller, *Die Wertehalbgruppe einer ebenen irrudizibilen algebraiden Kurve*, Math. Zeit. **153** (1977), 267–282.

[3] J. Gwoździewicz and A. Płoski, *On the approximate roots of polynomials* (to appear).

[4] T. Krasiński, *Twierdzenie Moha*, Materiały XIV Konferencji Szkoleniowej z Teorii Zagadnień Ekstremalnych (1993), Łódź, 31–38.

[5] Ming – Chang Kang, *On Abhyankar–Moh's epimorphism theorem*, Amer. J. Math. **113** (1991), 399–421.

[6] A. Płoski, *Pierwiastki aproksymatywne wielomianów według S. S. Abhyankara i T. T. Moha*, Materiały XIV Konferencji Szkoleniowej z Teorii Zagadnień Ekstremalnych (1993), Łódź, 45–52.

[7] O. Zariski, *Sur le probleme des modules pour les branches planes*, Centre de Mathematiques de l'Ecole Polytechnique, 1973.

Fundamental Theorems on the approximate roots of polynomials

Summary. We present a simplified approach due to J. Gwoździewicz and the author to the Abhyankar–Moh theory of approximate roots.

Bronisławów, 11–15 stycznia, 1993 r.