**MATERIAŁY XVIII KONFERENCJI SZKOLENIOWEJ
Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ
ZESPOLONEJ**

1997 **Łódź** **str. 45**

EFEKTYWNE TWIERDZENIE O ZERACH

A. Płoski (Kielce)

0. Wstęp

Niech $F = (F_1, \dots, F_m) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ będzie odwzorowaniem wielomianowym. Jeżeli układ równań $F_1 = \ldots = F_m = 0$ nie ma rozwiązań w $\mathbb{C}^n$, to na mocy klasycznego twierdzenia Hilberta o zerach istnieje odwzorowanie wielomianowe $A = (A_1, \dots, A_m) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ takie, że zachodzi "tożsamość Bezouta":

$$A_1F_1 + \cdots + A_mF_m = 1.$$

Twierdzenie powyższe nie jest efektywne a jego rozmaite dowody nie dają wskazówki jak wyznaczać wielomiany $A_1, \dots, A_m$. Jeśli jednak umielibyśmy wskazać efektywne oszacowanie dla $\deg A = \max(\deg A_i)$, to "metodą współczynników nieoznaczonych" problem wyznaczania wielomianów A_i zostałby zredukowany do rozwiązania liniowego układu równań.

Pierwsze oszacowania dla $\deg A$ otrzymała Greta Hermann w pracy [5]; wykazała, że jeśli $\deg F = \max(\deg F_i)$ to wielomiany A_i można dobrać w ten sposób, że $\deg A \leq 2\,(2 \deg F)^{2^{n-1}}$. Praca G. Hermann opublikowana w 1926 roku i cytowana w słynnym podręczniku van der Waerdena nie znalazła prędko kontynuatorów. Dopiero w 1983 roku Masser i Wustholz [7] podali nowy dowód rezultatu Hermann i wskazali na jego zastosowanie w teorii liczb. Wcześniej na pewne luki w [5] zwrócił uwagę Seidenberg. Mimo, że także inni autorzy poprawiali rezultat Hermann otrzymane oceny dla $\deg F$ miały charakter podwójnie wykładniczy ze względu na liczbę zmiennych n. Przełomowe znaczenie miała dopiero praca Brownawella [2], który uzyskał oszacowanie

$$\deg A \leq n \min(m,n)(\deg F)^{\min(m,n)} + \min(m,n) \deg F.$$

Rezultat ten został uzyskany przez połączenie metod analitycznych z konstrukcjami geometrii algebraicznej. Oszacowanie Brownawella zostało wzmocnione przez Kollára [6], który stosując wyrafinowane środki współczesnej geometrii algebraicznej otrzymał niezwykle proste oszacowanie:

$$\deg A \leq (\deg F)^{\min(m,n)}$$

pod warunkiem, że $\deg F_i \neq 2$ dla wszystkich $i = 1, \ldots, m$. Mimo, że warunek ten ma w dowodzie Kollára charakter techniczny do dzisiaj nie roztrzygnięto czy można go pominąć. Obecnie znane są nieco prostsze dowody twierdzenia Kollára (por. artykuły przeglądowe [1] i [10] oraz prace cytowane w [4]). Z omawianym problemem efektywności twierdzenia Hilberta o zerach związane są efektywne wersje nierówności Łojasiewicza w geometrii analitycznej zespolonej. Na przykład, z tożsamości Bezouta wynika łatwo nierówność $|F(z)| \geq \text{const.}\, |z|^{-\deg A}$ dla dużych $|z|$. I odwrotnie: nierówność typu $|F(z)| \geq \text{const.}\, |z|^q$ dla dużych $|z|$ z efektywnie podanym q mają zastosowanie do oszacowań o charakterze czysto algebraicznym. Nie będziemy tutaj podejmowali tego wątku, chcieliśmy tylko zauważyć, że pierwszą efektywną nierówność tego typu uzyskał Chądzyński w 1983 roku w pracy [3].

Celem tego artykułu jest poinformowanie czytelnika o pewnych rezultatach dotyczących twierdzenia Hilberta o zerach. Przytoczone dowody należą do autora, wszystkie potrzebne wiadomości z geometrii analitycznej czytelnik znajdzie w monografii Profesora Łojasiewicza "Wstęp do geometrii analitycznej zespolonej".

1. Twierdzenie Kollára

Niech $F = (F_1, \ldots, F_m) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ będzie odwzorowaniem wielomianowym. Zakładamy, że $d_i = \deg F_i > 0$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$ oraz $d_1 \geq \cdots \geq d_m$.

Twierdzenie Kollára. *Załóżmy, że układ $F_1 = \ldots = F_m = 0$ nie ma rozwiązań w $\mathbb{C}^n$ i że $d_i \neq 2$ dla $i = 1, \ldots, m$. Wtedy istnieje odwzorowanie wielomianowe $A = (A_1, \ldots, A_m) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ takie, że:*

(1) $A_1F_1 + \cdots + A_mF_m = 1$

oraz

(2) *Dla $i = 1, \ldots, m$ jest:* $\deg(A_iF_i) \leq d_1 \cdots d_m$ *jeżeli* $m \leq n$,
$\deg(A_iF_i) \leq d_1 \cdots d_{n-1} d_m$ *jeżeli* $m > n$.

Oczywiście z powyższej wersji twierdzenia wynika oszacowanie $\deg A \leq (\deg F)^{\min(m,n)}$ podane we wstępie. W pracy [5] Kollár udowodnił, że oszacowanie dla stopni $\deg(A_iF_i)$ jest dokładne. Tutaj podamy przykład pokazujący, że dla $m = n$ można tak dobrać F, że $\max(\deg(A_iF_i)) \geq d_1 \cdots d_n$ dla dowolnych A, spełniających warunek (1) twierdzenia Kollára.

Przykład. Niech $F_1(Z) = Z_1^{d_1}$, $F_n(Z) = Z_{n-1}Z_n^{d_n-1} - 1$ oraz $F_k(Z) = Z_{k-1}Z_n^{d_k-1} - Z_k^{d_k}$ dla $1 < k < n$. Udowodnimy, że jeśli $A_1F_1 + \cdots + A_nF_n = 1$, to $\deg(A_1F_1) \geq d_1 \cdots d_n$.

Przyjmijmy $\varphi_k(T) = T^{-d_{k+1}\cdots d_n+1}$ dla $k = 1, 2, \ldots, n-1$ oraz $\varphi_n(T) = T$. Niech $\varphi(T) = (\varphi_1(T), \ldots, \varphi_n(T))$. Łatwo sprawdzić, że $F_2(\varphi(T)) = \ldots = F_n(\varphi(T)) = 0$ a więc $A_1(\varphi(T))F_1(\varphi(T)) = 1$ w $\mathbb{C}(T)$ a stąd $\deg A_1(\varphi(T)) = -\deg F_1(\varphi(T)) = d_1 \cdots d_n - d_1$ (stopień funkcji wymiernej = stopień licznika − stopień mianownika).

Skoro $\deg A_1(\varphi(T)) = d_1 \cdots d_n - d_1$, to $\deg A_1(Z) \geq d_1 \cdots d_n - d_1$ a więc $\deg A_1(Z)F_1(Z) \geq d_1 \cdots d_n$.

Jak wspomnieliśmy we wstępie, podane dotychczas dowody twierdzenia Kollára wymagają zaawansowanych metod algebry. Tutaj udowodnimy jedynie specjalny przypadek tego twierdzenia.

Twierdzenie Kollára dla pełnych przecięć. *Załóżmy, że układ równań* $F_1 = \cdots = F_m = 0$ *nie ma rozwiązań w* $\mathbb{C}^n$ *a odpowiedni układ jednorodny* $\widetilde{F}_1 = \cdots = \widetilde{F}_m = 0$ *definiuje zbiór algebraiczny wymiaru* $n - m \geq 0$ *w* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

Wtedy istnieje odwzorowanie wielomianowe $A = (A_1, \ldots, A_m)$ *takie, że* $A_1F_1 + \cdots + A_mF_m = 1$ *oraz* $\deg(A_iF_i) \leq d_1 \cdots d_m$ *dla* $i = 1, \ldots, m$.

Dowód. Z założenia o wymiarze zbioru określonego układem równań $\widetilde{F}_1 = \cdots = \widetilde{F}_m = 0$ wynika istnienie form liniowych $\widetilde{F}_{m+1}, \ldots, \widetilde{F}_{n+1}$ takich, że zbiór określony w $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ równaniami $\widetilde{F}_1 = \cdots = \widetilde{F}_{n+1} = 0$ jest pusty. Zatem odwzorowanie $\widetilde{F} = (\widetilde{F}_1, \ldots, \widetilde{F}_{n+1}) : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$ o składowych jednorodnych spełnia warunek $(\widetilde{F})^{-1}(0) = \{0\}$. Wynika stąd, że $\widetilde{F}$ jest właściwe.

Klasyczne twierdzenie Bezouta pozwala stwierdzić, że stopień geometryczny d odwzorowania $\widetilde{F}$ jest równy $d = d_1 \cdots d_m$. Jak wiadomo z teorii nakryć analitycznych dla każdego wielomianu $G : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$ dodatniego stopnia istnieje wielomian $P_G(W, T)$ zmiennych $(W, T) = (W_1, \ldots, W_{n+1}, T)$ postaci $P_G(W, T) = T^d + P_G^{(1)}(W)T^{d-1} + \cdots + P_G^{(d)}(W)$ jednoznacznie scharakteryzowany równością

$$(*) \qquad P_G(w, T) = \prod_z (T - G(z))^{m_z} \qquad \text{dla} \quad w \in \mathbb{C}^{n+1}$$

gdzie m_z jest krotnością $\widetilde{F}$ w punkcie z odwzorowania $\widetilde{F}$ a iloczyn w formule (*) jest rozciągnięty na wszystkie punkty $z \in (\widetilde{F})^{-1}(w)$.

Wielomian P_G nazywamy wielomianem charakterystycznym wielomianu G względem odwzorowania $\widetilde{F}$. Rozważmy teraz wielomian charakterystyczny $P(W, T) = T^d + P_1(W)T^{d-1} + \cdots + P_d(W)$ wielomianu $G = Z_0$. Jest

(i) $Z_0^d + P_1(\widetilde{F}(\widetilde{Z}))Z_0^{d-1} + \cdots + P_d(\widetilde{F}(\widetilde{Z})) = 0$ w $\mathbb{C}[\widetilde{Z}]$,
(ii) $P_j((\widetilde{F}(\widetilde{Z})) \in (\widetilde{F}_1, \ldots, \widetilde{F}_m)\mathbb{C}[\widetilde{Z}]$, $\widetilde{Z} = (Z_0, Z)$.

Własność (i) wynika bezpośrednio z formuły (*). Aby sprawdzić (ii) wystarczy zauważyć, że z (*) wynikają relacje $P_j(0, w_{m+1}, \ldots, w_n) = 0$ $(j = 1, \ldots, d)$ dla dowolnych $w_{m+1}, \dots, w_n \in \mathbb{C}$ gdyż wszystkie rozwiązania układu $\widetilde{F}_1 = \cdots = \widetilde{F}_m = 0$ leżą na hiperpłaszczyźnie $Z_0 = 0$. Jest zatem $P_j(W) \in (W_1, \dots, W_m)\mathbb{C}[Z]$ ($j = 1, \dots, d$) a stąd wynika (ii). Z własności (i), (ii) otrzymujemy relację

$$Z_0^d = \widetilde{A}_1\widetilde{F}_1 + \cdots + \widetilde{A}_m\widetilde{F}_m$$

dla pewnych wielomianów jednorodnych $\widetilde{A}_j$. Możemy założyć, że $\widetilde{A}_j\widetilde{F}_j$ jest stopnia $d = d_1, \cdots, d_m$. Podstawiając 1 na miejsce Z_0 otrzymujemy tezę.

Wniosek. *Jeśli* $\deg F_i = d_i > 0$ *dla* $i = 1, 2$ *oraz układ* $F_1 = F_2 = 0$ *nie ma rozwiązań w* $\mathbb{C}^n$*, to* $A_1F_1 + A_2F_2 = 1$ *dla pewnych wielomianów* A_1, A_2 *takich, że* $\deg(A_iF_i) \leq d_1d_2$ *dla* $i = 1, 2$.

Dowód. Wielomiany F_1, F_2 a wraz z nimi $\widetilde{F}_1, \widetilde{F}_2$ są względnie pierwsze, zatem zbiór rozwiązań układu $\widetilde{F}_1 = \widetilde{F}_2 = 0$ w $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ma wymiar $n - 2$ i możemy zastosować udowodnione twierdzenie.

Uwaga. Twierdzenie Kollára dla pełnych przecięć można dowieść przy założeniu, że układ $\widetilde{F}_1 = \cdots = \widetilde{F}_{m-1} = 0$ definiuje pełne przecięcie w $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Wymaga to pewnej modyfikacji przedstawionego dowodu. Z drugiej strony twierdzenie Kollára (dla $m \leq n$) łatwo sprowadzić do przypadku "afinicznego pełnego przecięcia", tzn. wystarczy je dowieść przy założeniu, że układ $F_1 = \cdots = F_{m-1} = 0$ definiuje zbiór wymiaru $n - m + 1$ w $\mathbb{C}^n$.

2. Twierdzenie Hermann

Tytułowe twierdzenie udowodnimy stosując metodę eliminacji Kroneckera. Niech $X = (X_1, \dots, X_n)$ będzie ciągiem zmiennych a Y jedną zmienną. Rozpocznijmy od lematu o rugowniku zaobserwowanym przez J.Chądzyńskiego (por. dowód twierdzenia w [3]).

Lemat. *Jeśli* $F_i(X, Y) = Y^{d_i} + a_{i1}(X)Y^{d_i-1} + \cdots + a_{id_i}(X)$ $(i = 1, 2)$ *jest wielomianem stopnia* d_i *względem zespołu zmiennych* (X, Y) *oraz jeśli* $R(X)$ *jest* Y*–rugownikiem wielomianów* $F_1(X, Y)$*,* $F_2(X, Y)$ *to*

$$R(X) = A_1(X, Y)F_1(X, Y) + A_2(X, Y)F_2(X, Y)$$

w $\mathbb{C}[X, Y]$ *przy czym* $\deg(A_iF_i) \leq d_1d_2$ *dla* $i = 1, 2$.

Dowód lematu. Rozważmy wielomiany $\mathcal{F}_i(A_i, Y) = Y^{d_i} + A_{i1}Y^{d_i-1} + \cdots + A_{id_i}$ o ogólnych współczynnikach $A_i = (A_{i1}, \dots, A_{id_i})$ $(i = 1, 2)$ oraz ich Y–rugownik $R(A_1, A_2)$. Jeżeli przyjjmiemy waga $A_{ij} = j$, waga $Y = 1$ to $\mathcal{F}_i(A_i, Y)$ są izobaryczne wagi d_i. Co więcej wiadomo, że rugownik $R(A_1, A_2)$ jest izobaryczny wagi d_1d_2 i należy do ideału generowanego przez $\mathcal{F}_i(A_i, Y)$ w $\mathbb{Z}[A_1, A_2, Y]$. Z tych dwóch faktów wynika łatwo, że

$$R(A_1, A_2) = \sum \mathcal{A}_i(A_1, A_2, Y)\mathcal{F}_i(A_i, Y)$$

gdzie $\mathcal{A}_i$ są izobaryczne i waga $\mathcal{A}_i = d_1d_2 - d_i$. Podstawiając na miejsce zmiennych A_{ij} wielomiany $a_{ij}(X)$ otrzymujemy poszukiwaną relację.

Twierdzenie Kroneckera o eliminacji. *Niech* $F_i(X,Y) = Y^{d_i} + a_{i1}(X)Y^{d_i-1} + \cdots + a_{id_i}(X)$, $i = 1,\ldots,m$ *będzie ciągiem wielomianów unormowanych względem* Y *stopni* $d_i > 0$*. Zakładamy, że* $F_i(X,Y)$ *jest stopnia* d_i *względem zespołu zmiennych* (X,Y)*. Przyjmijmy, że* $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_m$*. Wówczas istnieje ciąg wielomianów* $R_j(X)$, $j = 1,\ldots,l = (m-2)d_m + 1$ *taki, że*

(i) $R_j(X) = \sum_{i=1}^m A_{ij}(X,Y)F_i(X,Y)$ *w* $\mathbb{C}[X,Y]$, $\deg(A_{ij}F_i) \leq d_1 d_m$

oraz

(ii) *dla każdego* $x_0 \in \mathbb{C}^n$*:* $R_1(x_0) = \cdots = R_l(x_0) = 0$ *wtedy i tylko wtedy, gdy układ równań* $F_1(x_0,Y) = \cdots = F_m(x_0,Y) = 0$ *ma rozwiązanie w* $\mathbb{C}$*.*

Dowód. Niech T będzie nową zmienną i rozważmy $R(X,T) = Y$–rugownik wielomianów $\sum_{i=1}^{m-1} F_i(X,Y)T^{i-1}$, $F_m(X,Y)$. Zatem $R(X,T)$ jest względem zmiennej T wielomianem stopnia co najwyżej $(m-2)d_m$, oznaczmy $l = (m-2)d_m + 1$ i obierzmy $t_1,\ldots,t_l \in \mathbf{C}$ parami różne i takie, że $\sum_i F_i(X,Y)t_k^{i-1}$ jest stopnia d_1 względem Y dla $k = 1,\ldots,l$. Niech $R_k(X) = R(X,t_k)$. Własność (i) wynika łatwo z udowodnionego wyżej lematu. Niech $x_0 \in \mathbb{C}^n$ będzie taki, że układ $F_1(x_0,Y) = \cdots = F_m(x_0,Y) = 0$ ma rozwiązanie $y_0 \in \mathbb{C}$. Podstawiając (x_0,y_0) na miejsce X,Y w tożsamości (i) stwierdzamy, że $R_j(x_0) = 0$ dla $j = 1,\ldots,l$. Załóżmy, że $R_1(x_0) = \cdots = R_l(x_0) = 0$ dla pewnego $x_0 \in \mathbb{C}^n$. Zatem $R(x_0,t_k) = 0$ dla $k = 1,\ldots,l$ a więc $R(x_0,T) = 0$ w $\mathbb{C}[T]$ bo $R(x_0,T)$ jest wielomianem stopnia $< l$. Na mocy podstawowej własności rugownika wielomiany $\sum F_i(x_0,Y)T^{i-1}$ oraz $F_m(x_0,Y)$ mają wspólny podzielnik w $\mathbb{C}[T][Y]$ stopnia > 0. Nie zależy on od T bo dzieli $F_m(x_0,Y) \in \mathbb{C}[Y]$. Jego pierwiastek y_0 jest wspólnym rozwiązaniem równań $F_1(x_0,Y) = \cdots = F_m(x_0,Y) = 0$.

Z podanego wyżej twierdzenia o eliminacji wyprowadzimy łatwo

Twierdzenie Hermann. *Niech ciąg wielomianów* $F = (F_1,\ldots,F_m)$ *nie ma wspólnego zera w* $\mathbb{C}^n$*.*

Wtedy istnieje ciąg wielomianów $A = (A_1,\ldots,A_m)$ *taki, że*

$$\sum_{i=1}^m A_i F_i \equiv 1 \quad \textit{oraz} \quad \deg A \leq (n+1)(\deg F)^{2^{n-1}}$$

Dowód (indukcyjny względem liczby n zmiennych). Dla $n = 1$ sprawdzenie pozostawiamy czytelnikowi. Niech więc $n > 1$ i załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla $n-1$ zmiennych. Ewentualnie zmieniając liniowo zmienne od których zależą wielomiany F_i oraz opuszczając wielomiany stałe możemy założyć, że F_i zależą od zmiennych $(X,Y) = (X_1,\ldots,X_{n-1},Y)$ i są unormowane stopnia $d_i = \deg F_i$ względem zmiennej Y. Rozważmy układ wielomianów $R_j(X)$ takich jak w twierdzeniu Kroneckera o eliminacji. Z własności (ii) wynika, że do układu $R_1 = \cdots = R_l = 0$ w $\mathbb{C}^{n-1}$ stosuje się założenie indukcyjne. Istnieją więc wielomiany $S_1,\ldots,S_l$ takie, że

$$\sum_j S_j(X)R_j(X) \equiv 1 \quad \text{oraz} \quad \deg S_j \leq n(\deg R)^{2^{n-2}}$$

gdzie $\deg R = \max(\deg R_k)$. Oznaczmy $D = \deg F$. Jest więc $\deg R \leq D^2$ na mocy (i) a więc

$$\deg S = \max(\deg S_j) \leq n(D^2)^{2^{n-2}} = nD^{2^{n-1}}$$

Z tożsamości (i) wynika, że $\sum A_i F_i \equiv 1$ gdzie $A_i = \sum S_j A_{ij}$ a więc $\deg A = \max(\deg A_i) \leq \max(\deg S_j A_{ij}) \leq nD^{2^{n-1}} + D^2 \leq nD^{2^{n-1}} + D^{2^{n-1}} = (n+1)D^{2^{n-1}}$.

3. Pewna własność wielomianów na zbiorach algebraicznych

Gdy $V \subset \mathbb{C}^n$ jest niepustym zbiorem algebraicznym, $V = \cup_{i=1}^{s} V_i$ jego rozkładem na komponenty nierozkładalne, to przyjmujemy z definicji $\deg V = \sum_{i=1}^{s} \deg V_i$.

Naszym celem jest

Twierdzenie. *Niech $V \subset \mathbb{C}^n$ będzie niepustym zbiorem algebraicznym, a $P : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ niezerowym wielomianem takim, że $P(z) \neq 0$ dla $z \in V$. Wtedy istnieje wielomian $Q : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ taki, że $P(z)Q(z) = 1$ dla $z \in V$ oraz $\deg(PQ) \leq (\deg P)(\deg V)$.*

Dowód. Załóżmy najpierw, że V jest nierozkładalny. Gdy V jest jednopunktowy lub $= \mathbb{C}^n$, to twierdzenie jest oczywiste. Załóżmy więc, że $k = \dim V > 0$ oraz $k < n$. Oznaczmy $d = \deg V$. Istnieje rozkład $\mathbb{C}^n$ na sumę prostą $= \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{n-k}$ taki, że

(i) rzut $\pi : V \to \mathbb{C}^k$ dany wzorem $\pi(x, y) = x$ jest stopnia d,

(ii) jeśli $(x, y) \in V$, $(x, y) \to \infty$ to $|y| \leq c|x|$ dla pewnej stałej $c > 0$ ("warunek Sadulajewa").

Niech $W(X, T) = T^d + W_1(X)T^{d-1} + \ldots + W_d(X)$ będzie wielomianem charakterystycznym wielomianu P względem rzutu π. Jest on scharakteryzowany równością

$$W(x, T) = \prod_{\pi(x,y)=x} \big(T - P(x, y)\big)^{\mathrm{mult}_{(x,y)}\pi}$$

Ponieważ $|P(x, y)| \leq \text{const.} \max(|x|, |y|)^{\deg P} \leq \text{const.}|x|^{\deg P}$ dla $(x, y) \in V$, $(x, y) \to \infty$ zatem współczynniki $W_j(x)$ jako wielomiany symetryczne liczb $P(x, y^{(1)}), \ldots, P(x, y^{(d)})$ gdzie $(x, y^{(1)}), \ldots, (x, y^{(d)})$ jest ciągiem elementów $\pi^{-1}(x)$ spełniają nierówności $|W_j(x)| \leq \text{const.}|x|^{j \deg P}$ dla $x \to \infty$ (por.[8]). Wynika stąd, że $\deg W_j \leq j \deg P$ dla $j = 1, \ldots, d$. Z relacji $W_d(x) = \pm P(x, y^{(1)}) \cdots P(x, y^{(d)}) \neq 0$ dla $x \in \mathbf{C}^k$ wynika, że wielomian $W_d(x)$ jest stały. Możemy założyć bez zmniejszania ogólności, że wielomian $-W_d(x) \equiv 1$.

Ponieważ $W(x, P(x, y)) = 0$ dla $(x, y) \in V$ zatem

$$P(x, y)\big(P(x, y)^{d-1} + W_1(x)P(x, y)^{d-2} + \cdots + W_{d-1}(x)\big) = 1$$

jeśli $(x, y) \in V$. Połóżmy $Q = P^{d-1} + W_1 F^{d-2} + \cdots + W_{d-1}$. Jest więc $P(x, y)Q(x, y) = 1$ dla $(x, y) \in V$ oraz $\deg Q \leq \max\big((d-1)\deg P, \deg W_1 + (d-2)\deg P, \ldots, \deg W_{d-1}\big) \leq (d-1)(\deg P)$, tzn. $\deg QP \leq d \deg P = (\deg V)(\deg P)$. To kończy dowód twierdzenia w przypadku zbioru nierozkładalnego V.

Jeśli teraz V jest dowolnym zbiorem algebraicznym to przedstawiamy go jako sumę komponent nierozkładalnych V_j: $V = \cup_j V_j$. Jeżeli P nie zeruje się na V to tym bardziej na V_j i na mocy udowodnionego już przypadku istnieje wielomian Q_j taki, że $P(z)Q_j(z) = 1$ dla $z \in V_j$; $\deg(PQ_j) \leq (\deg P)(\deg V_j)$. Jest więc $\prod_j(1 - P(z)Q_j(z)) = 0$ dla $z \in V$ i jak łatwo sprawdzić wystarczy przyjąć $Q = (Q_1 + Q_2 + \cdots) - P(Q_1Q_2 + \cdots) + \cdots + (-1)^{s+1}P^{s-1}(Q_1 \ldots Q_s)$.

Z udowodnionego twierdzenia wynika łatwo

Słaba wersja twierdzenia Kollára. *Niech układ równań wielomianowych* $F_1 = \cdots = F_m = 0$ $(m \leq n)$ *będzie sprzeczny i załóżmy, że każdy ze zbiorów* V_i *określonych równaniami* $F_1 = \cdots = F_{i-1} = F_{i+1} = \cdots = F_m = 0$ *jest niepusty. Wtedy istnieje ciąg wielomianów* $A_1, \ldots, A_m$ *taki, że* $\sum A_i(z)F_i(z) = 1$ *dla* $z \in V_i$ *oraz* $\deg(A_iF_i) \leq d_1 \cdots d_m$.

SPIS LITERATURY

[1] C. A. Berenstein, A. Yger, *Bounds for the degrees in polynomial equations*, Proc. of Symp. in Pure Math. **52** (1991), Part I, 23–28.

[2] W. D. Brownawell, *Bounds for the degrees in the Nullstelensatz*, Ann. Math. **126** (1987), 577–591.

[3] J. Chądzyński, *On Proper Polynomial Mappings*, Bull. Polish. Acad. Sci. Math. **31** (1983), 115–120.

[4] P. Cassou-Nogues, A.Płoski, *Un théorème des zéros effectif*, Bull. Polish. Acad. Sci. Math, **44** (1996), 61–70.

[5] G. Hermann, *Die Frage der endlich vielen Schritte in der Theorie der Polynomideale*, Ann. Math **95** (1926), 736–788.

[6] J. Kollár, *Sharp effective Nullstellensatz*, Journal AMS **1(4)** (1988), 963–974.

[7] D. W. Masser, C. Wustholz, *Fields of large transcendence degree generated by values of elliptic functions*, Jnvent. Math. **72** (1983), 407–464.

[8] A. Strzeboński, *The growth of regular functions on algebraic sets*, Ann. Polon. Math. **55** (1991,), 330–341.

[9] B. Sturmfels, *Computing final polynomials and final syzygies using Buchberger's Gröbner basesmethod*, Results Math. **15** (1989), 351–360.

[10] B. Teissier, *Resultats recents d'algèbre commutative effective*, Sém. Bourbaki (1989/90). Asterisque **189–190**, 107–131.

Effective zero-points theorems

Summary. The paper is a survey of results about Nullstellensatz degree estimates due to Hermann, Brouwnawell and Kollar.

Bronisławów, 13–17 stycznia, 1997 r.