**MATERIAŁY XXII KONFERENCJI SZKOLENIOWEJ
Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ
ZESPOLONEJ**

2001 Łódź str. 13

O OSOBLIWOŚCIACH W NIESKOŃCZONOŚCI PĘKU KRZYWYCH AFINICZNYCH

Arkadiusz Płoski (Kielce)

Wstęp

Wraz z rozwojem teorii osobliwości na przełomie lat 60-tych i 70-tych mijającego stulecia wprowadzono rozmaite niezmienniki topologiczne. Obok liczby Milnora pojawiły się niezmienniki polarne, których badanie zapoczątkowali Lê Dung Trang (metodami topologicznymi) i Teissier (metodami teorii przecięć). Pojęcie niezmiennika (ilorazu) polarnego związane jest ściśle z pojęciem wykładnika Łojasiewicza (formuła Teissiera); wiąże zatem teorie krotności przecięć i separacji regularnej w geometrii analitycznej zespolonej. Celem niniejszego artykułu jest opisanie związku między liczbą Milnora i ilorazami polarnymi "w nieskończoności" pęków krzywych afinicznych $f(X,Y) - t = 0$, $t \in \mathbf{C}$. Problematyka ta wiąże się ściśle z zagadnieniami geometrii afinicznej płaszczyzny $\mathbf{C}^2$ (automorfizmy wielomianowe, hipoteza jakobianowa). Pominięte dowody czytelnik znajdzie w artykule autora [P2].

1 Ilorazy polarne

Będziemy stosowali język klasycznej teorii krzywych algebraicznych (por. [S]). Gałęzią γ na płaszczyźnie rzutowej $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ nazywamy kiełek analityczny nierozkładalny, 1-wymiarowy w danym punkcie $p \in \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ nazywanym także centrum gałęzi. Jeżeli F jest formą jednorodną trzech zmiennych, to symbolem $\mathrm{ord}_\gamma F$ oznaczamy rząd F na gałęzi γ, jest on identyczny z krotnością przecięcia $(F \cdot \gamma)_p$, gdzie p jest centrum γ. Mamy wtedy $0 \le \mathrm{ord}_\gamma F \le +\infty$ przy czym $\mathrm{ord}_\gamma F = 0$, gdy p nie leży na krzywej $F = 0$. Jeżeli $C : F = 0$ jest krzywą zredukowaną (tzn. F nie ma wielokrotnych komponent), to zamiast $\mathrm{ord}_\gamma F$ piszemy także $\mathrm{ord}_\gamma C$. Dla takiej krzywej mamy ważne pojęcie krzywej polarnej ze względu na punkt $p = (a_0 : a_1 : a_2) \notin C$: jest to krzywa $\nabla_p C$ o równaniu $a_0(\partial F/\partial X_0)+a_1(\partial F/\partial X_1)+a_2(\partial F/\partial X_2) = 0$. Oczywiście $\nabla_p C$ może mieć komponenty wielokrotne.

Definicja. Niech C będzie krzywą zredukowaną, L prostą nie będącą komponentą C. Ustalmy $p \in L \setminus C$ i rozważmy $o \in C \cap L$. Ilorazami polarnymi krzywej C względem prostej L w punkcie o nazywamy liczby postaci

$$\frac{\mathrm{ord}_\gamma C}{\mathrm{ord}_\gamma L} ,$$

gdzie γ przebiega gałęzie krzywej polarnej $\nabla_p C$ scentrowane w o.

Gdy $o \in C$ jest punktem regularnym krzywej C a prosta L nie jest styczna do C, zbiór ilorazów polarnych jest pusty. Poza tym przypadkiem ilorazy polarne istnieją i nie zależą od wyboru punktu pomocniczego $p \in L \setminus C$. Przyjmujemy

$$q_o(C, L) = \sup\{q : \ q \text{ jest ilorazem polarnym } C \text{ względem } L \text{ w punkcie } o\} .$$

Jest więc $q_o(C, L) = -\infty$, gdy o jest regularny i L nie jest styczna do C (przyjmujemy konwencję $\sup \emptyset = -\infty$). Jeżeli $q_o(C, L) \neq -\infty$, to $q_o(C, L)$ jest liczbą wymierną (którą można zapisać jako ułamek o mianowniku$<$ $\deg C$), nazywamy ją maksymalnym ilorazem polarnym krzywej C względem L w punkcie o. Jest to niezmiennik topologiczny kiełka $(C \cup L, 0)$ (por. [P1]). Jeżeli $q_o(C, L) \neq -\infty$, to

$$1 \le q_o(C, L) \le \mu_o(C) + 1 ,$$

gdzie $\mu_o(C)$ jest liczbą Milnora. Równość $q_o(C, L) = 1$ ma miejsce, gdy o jest punktem regularnym C oraz L jest styczną do C w o. Natomiast równość $q_o(C, L) = \mu_o(C) + 1$ zachodzi, gdy $(C \cdot L)_o = 2$.

Aby scharakteryzować położenie C względem prostej $L \not\subset C$ oznaczmy

$$q(C, L) = \sup\{q_o(C, L) : \ o \in C \cap L\} .$$

Zatem $q(C, L) = -\infty$, gdy C i L przecinają się transwersalnie. Poza tym wyjątkowym przypadkiem $q(C, L)$ jest liczbą wymierną≥ 1. Jeżeli C nie jest krzywą zredukowaną, to przyjmujemy konwencję $q(C, L) = +\infty$. Można sprawdzić stosując standardowe oszacowania dla liczby Milnora, że jeśli C jest zredukowana stopnia $d > 1$, to

$$q(C, L) \le (d - 1)^2 + 1 .$$

Dalej będziemy rozważać krzywe afiniczne $\Gamma \subset \mathbf{C}^2$. Traktując płaszczyznę rzutową $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ jako płaszczyznę afiniczną z dołączoną prostą w nieskończoności: $\mathbf{P}^2(\mathbf{C}) =$

$\mathbf{C}^2 \cup \mathbf{L}_\infty$, z krzywą afiniczną Γ kojarzymy jej domknięcie rzutowe C. Liczbę $q(C, \mathbf{L}_\infty)$ nazywamy maksymalnym ilorazem polarnym krzywej C (lub krzywej Γ) w nieskończoności. Naturalnie $q(C, \mathbf{L}_\infty)$ nie zależy od współrzędnych afinicznych, ale podobnie jak stopień degΓ zmienia się na ogół jeśli zastąpimy krzywą Γ przez jej obraz poprzez automorfizm wielomianowy.

2 Ekwisingularność w nieskończoności

Rozważmy wielomian $f = f(X,Y) \in \mathbf{C}[X,Y]$ stopnia $d > 1$, zredukowany (bez czynników wielokrotnych) i niech $F = F(X,Y,Z) \in \mathbf{C}[X,Y,Z]$ będzie odpowiadającą mu formą jednorodną. Rozważmy pęk krzywych rzutowych $C^t: \; F(X,Y,Z) - tZ^d = 0$ przechodzących przez zbiór $C_\infty = \{(x:y:0) \in \mathbf{P}^2(\mathbf{C}) : \; F(x,y,0) = 0\}$. Oznaczmy μ_p^t =liczba Milnora krzywej C^t w punkcie p. Krzywa C^t nie zawsze jest zredukowana; jeżeli przez punkt p przechodzi składowa wielokrotna krzywej C^t, to $\mu_p^t = +\infty$. Oznaczmy

$$\mu_p^{min} = \inf\{\mu_p^t : \; t \in \mathbf{C}\} \; .$$

Są to liczby skończone bo krzywa $C^0 = C$ jako zredukowana ma skończoną liczbę Milnora. Definiujemy

$$\Lambda(f) = \{t \in \mathbf{C} : \text{ istnieje } p \in C_\infty \text{ taki, że } \mu_p^t > \mu_p^{min}\} \; .$$

Dowodzi się, że zbiór $\Lambda(f)$ jest skończony i ma mniej niż d elementów (por. [K]). Jeżeli $t \in \mathbf{C}$ jest taką liczbą, że krzywa C^t nie jest zredukowana, to $t \in \Lambda(f)$. Dla dowolnego $t \in \mathbf{C}$ przyjmujemy

$$\lambda^t(f) = \sum_{p \in C_\infty} (\mu_p^t - \mu_p^{min}) \; ,$$

jeżeli C^t jest zredukowana, $\lambda^t(f) = +\infty$ jeżeli C^t nie jest zredukowana.

Zauważmy, że jeżeli C i $\mathbf{L}_\infty$ są transwersalne (ma to miejsce, gdy przecinają się dokładnie w d punktach, a więc gdy forma wiodąca wielomianu f nie ma czynników wielokrotnych), to $\Lambda(f) = \emptyset$ oraz $q(C^t, \mathbf{L}_\infty) \equiv -\infty$. W dalszym ciągu będziemy przyjmować następujące założenia:

- $\star$ f jest zredukowanym wielomianem stopnia $d > 0$,
- $\star\star$ domknięcie rzutowe C krzywej afinicznej $f(X,Y) = 0$ i prosta w nieskończoności $\mathbf{L}_\infty$ nie są transwersalne.

Przyjmijmy teraz dodatkowo, że $\deg_Y f = \deg f = d$ i niech T będzie nową zmienną. Rozważmy $Y-$wyróżnik wielomianu $f(X,Y) - T \in \mathbf{C}[X,T][Y]$:

$$\Delta(X,T) = disc_Y(f(X,Y) - T) \; .$$

Oczywiście $\Delta(X,t) \neq 0$ w $\mathbf{C}[X]$ dokładnie wtedy, gdy wielomian $f(X,Y) - t$ jest zredukowany. Zapiszmy

$$\Delta(X,T) = \Delta_0(T)X^N + \ldots + \Delta_N(T) \; ,$$

gdzie $\Delta_0(T) \neq 0$. Mamy następujące dobrze znane

Twierdzenie 1.

$$\Lambda(f) = \{t \in \mathbf{C} :\ \Delta_0(t) = 0\}\ ,$$
$$\lambda^t(f) = N - \deg \Delta(X, t)\ .$$

Powyższe twierdzenie jest bezpośrednim wnioskiem z formuły Krasińskiego (por. [K], [GP2]).

Możemy teraz przedstawić główny wynik pracy [P2].

Twierdzenie 2. *Przy wprowadzonych oznaczeniach i założeniach mamy:*

$$q(C^t, \mathbf{L}_\infty) = \begin{cases} d - \left(\max\limits_{i=1}^{N} \dfrac{\deg \Delta_i}{i} \right)^{-1} & \text{jeżeli } \Lambda(f) = \emptyset\ , \\ d & \text{jeżeli } \Lambda(f) \neq \emptyset \text{ i } t \notin \Lambda(f)\ , \\ d + \left(\min\limits_{i=0}^{\lambda^t(f)-1} \dfrac{\mathrm{ord}_t \Delta_i}{\lambda^t(f) - i} \right)^{-1} & \text{jeżeli } t \in \Lambda(f) \text{ i } C^t \text{ zredukowama}\ . \end{cases}$$

Dowód twierdzenia 2 Czytelnik znajdzie w pracy [P2]. Tutaj podamy kilka zastosowań.

Wniosek 1. *Niech $f : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}$ spełnia założenia $\star$ oraz $\star\star$. Wówczas:*

(i) *jeżeli $\Lambda(f) = \emptyset$, to $q(C^t, \mathbf{L}_\infty) \equiv q(C, \mathbf{L}_\infty) < d$ dla wszystkich $t \in \mathbf{C}$,*

(ii) *jeżeli $\Lambda(f) \neq \emptyset$, to $q(C^t, \mathbf{L}_\infty) = d$ dla $t \in \mathbf{C} \setminus \Lambda(f)$ oraz $q(C^t, \mathbf{L}_\infty) > d$ dla $t \in \Lambda(f)$.*

Powyższy wniosek pokazuje, że $q(C^t, \mathbf{L}_\infty)$ podobnie jak $\lambda^t(f)$ jest górnie półciągłą funkcją zmiennej t. Odnotujmy również, że z twierdzenia 2 wynika ocena: jeżeli $\Lambda(f) \neq \emptyset$, to

$$d \leq q(C^t, \mathbf{L}_\infty) \leq d + \lambda^t(f) \text{ dla } t \in \mathbf{C}\ .$$

Przypomnijmy, że elementy zbioru $\Lambda(f)$ nazywamy wartościami krytycznymi w nieskończoności wielomianu f, natomiast elementy $\mathbf{C} \setminus \Lambda(f)$ wartościami regularnymi w nieskończoności.

Wniosek 2 (Charakteryzacja wartości regularnych w nieskończoności Neumanna–Hà–Thanha). *Liczba t_0 jest wartością regularną w nieskończoności wielomianu f dokładnie wtedy, gdy $q(C^{t_0}, \mathbf{L}_\infty) \leq d$.*

Cytowani wyżej autorzy podali powyższą charakteryzację stosując metody topologiczne.

Rodzina krzywych afinicznych $f(X, Y) - t = 0$ jest ekwisingularna w nieskończoności, gdy $\Lambda(f) = \emptyset$. W tym przypadku wszystkie wielomiany $f(X, Y) - t$ są zredukowane. Twierdzenie 2 dostarcza następującej charakteryzacji rodzin ekwisingularnych.

Wniosek 3 (Charakteryzacja ekwisingularności w nieskończoności). *Niech $f = f(X,Y)$ będzie wielomianem zredukowanym stopnia $d > 1$. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(i) *rodzina $f(X,Y) - t = 0$ jest ekwisingularna,*

(ii) $q(C, \mathbf{L}_\infty) < d$.

Aby podać zastosowanie wniosku 3 przypomnijmy

Nierówność Abhynkara i Moha. *Niech C będzie zredukowaną krzywą rzutową stopnia $d > 1$. Przypuśćmy, że istnieje punkt $o \in C$ taki, że istnieje dokładnie jedna gałąź C o centrum w o a jedyna styczna L do C w o nie przecina C w punktach różnych od o. Wtedy $q_o(C, L) < d$.*

Oryginalne sformułowanie nierówności Abhyankara-Moha było wypowiedziane w terminach rozwinięć Puiseux. Wersja podana wyżej została podana w [GP1]. Łącząc nierówność Abhyankara-Moha z podaną charakteryzacją ekwisingularności (wniosek 3) otrzymamy:

Twierdzenie Ephraima o ekwisingularności. *Niech $f = f(X,Y)$ będzie zredukowanym wielomianem takim, że domknięcie rzutowe C krzywej afinicznej $f(X,Y) = 0$ ma dokładnie jedną gałąź w nieskończoności. Wtedy rodzina $f(X,Y) - t = 0$ jest ekwisingularna w nieskończoności.*

Oto jeszcze jedno zastosowanie charakteryzacji ekwisingularności:

Wniosek 4. *Niech $f = f(X,Y)$ będzie wielomianem stopnia $d > 1$ o $d-1$ punktach w nieskończoności. Niech o będzie jedynym punktem w nieskończoności krzywej C takim, że $(C \cdot L)_o = 2$. Wówczas rodzina $f(X,Y) - t = 0$ jest ekwisingularna dokładnie wtedy, gdy $\mu_o(C) < d - 1$.*

Dowód. Gdy $(C \cdot L)_o = 2$, to $q_o(C, L) = \mu_o(C) + 1$. Oczywiście $q(C, L) = q_o(C, L)$. Stosujemy wniosek 3.

Niektórzy autorzy nazywają wielomian $f = f(X,Y) \in \mathbf{C}[X,Y]$ wielomianem dobrym, gdy rodzina $f(X,Y) - t = 0$ jest ekwisingularna. Można też powiedzieć, że f jest dobry, gdy odwzorowanie $f : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}$ nie ma wartości krytycznych w nieskończoności. Wniosek 3 możemy wypowiedzieć następująco: wielomian f jest dobry wtedy i tylko wtedy, gdy $q(C, \mathbf{L}_\infty) < d$.

3 Wykładnik Łojasiewicza w nieskończoności

Niech $f : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}$ będzie wielomianem stopnia $d > 0$. Przypomnijmy, że wykładnik Łojasiewicza $\mathcal{L}_\infty(f)$ jest na mocy definicji równy kresowi górnemu zbioru:

$$\{\Theta \in \mathbf{R} : \exists\, C, R > 0\ \forall\, z \in \mathbf{C}^2\ |z| \geq R \Rightarrow |\mathrm{grad}\, f(z)| \geq C|z|^\Theta\},$$

gdzie $|z| = \max(|x|, |y|)$ dla $z = (x, y) \in \mathbf{C}^2$. Łatwo sprawdzamy, że $\mathcal{L}_\infty(f) > -\infty$ dokładnie wtedy, gdy wielomian f ma skończoną liczbę punktów krytycznych tzn.

wtedy, gdy zbiór

$$\{(x,y)\in \mathbf{C}^2:\ (\partial f/\partial X)(x,y)=(\partial f/\partial Y)(x,y)=0\}$$

jest skończony.

W pracy [CN-H] autorzy podali formułę dla $\mathcal{L}_\infty(f)$ w terminach osobliwości w nieskończoności używając w tym celu diagramów Eisenbuda i Neumanna. Wprowadzone wyżej pojęcie ilorazu polarnego w nieskończoności pozwala udowodnić

Twierdzenie 3. *Załóżmy, że $f:\mathbf{C}^2\to\mathbf{C}$ jest wielomianem stopnia $d>1$ o skończonym zbiorze punktów krytycznych. Wtedy*

(i) $\mathcal{L}_\infty(f)=d-1-q(C,\mathbf{L}_\infty)$ *jeżeli* $\Lambda(f)=\emptyset$,

(ii) $\mathcal{L}_\infty(f)=d-1-\max\limits_{t\in\Lambda(f)} q(C^t,\mathbf{L}_\infty)$ *jeżeli* $\Lambda(f)\neq\emptyset$.

Dowód powyższego twierdzenia Czytelnik znajdzie w [P2]. Oto bezpośrednie zastosowania:

Wniosek 1 (Ha, Chądzyński–Krasiński).

$$\mathcal{L}_\infty(f)>-1 \text{ jeżeli } \Lambda(f)=\emptyset\ ,$$
$$\mathcal{L}_\infty(f)<-1 \text{ jeżeli } \Lambda(f)\neq\emptyset\ .$$

Dowód wynika bezpośrednio z twierdzenia 2 i 3.

W pracy [T] Teissier podał formułę dla lokalnego wykładnika Łojasiewicza gradientu kiełka nierozkładalnego. Oto odpowiednik globalny rezultatu Teissiera.

Wniosek 2. *Zakładamy, że f jest zredukowanym wielomianem stopnia $d>1$ takim, że domknięcie rzutowe C krzywej $f(X,Y)=0$ ma jedną gałąź w nieskończoności. Niech $\bar\beta_0,\dots,\bar\beta_g$ będzie minimalnym układem generatorów półgrupy tej gałęzi (por.* [T]*). Wówczas*

$$\mathcal{L}_\infty(f)=d-1-\frac{\mathrm{GCD}\,(\bar\beta_0,\dots,\bar\beta_{g-1})\bar\beta_g}{d}\ .$$

Dowód. Z twierdzenia Ephraima oraz pierwszej części twierdzenia 3 wynika, że $\mathcal{L}_\infty(f)=d-1-q_o(C,\mathbf{L}_\infty)$, gdzie $o\in C$ jest centrum jedynej gałęzi w nieskończoności krzywej C. Wystarczy zastosować formułę dla maksymalnego ilorazu polarnego gałęzi (por. [P1], Proposition 1.1).

Rozważmy jeszcze jeden przypadek, w którym można obliczyć $\mathcal{L}_\infty(f)$.

Wniosek 3 (por. [GP2]). *Niech f będzie wielomianem o skończonej liczbie punktów krytycznych stopnia $d>1$ o $d-1$ punktach w nieskończoności i niech o będzie jedynym punktem w nieskończoności takim, że $(C\cdot\mathbf{L}_\infty)_o=2$. Wówczas:*

$$\mathcal{L}_\infty(f)=d-2-\sup\{\mu_o^t(C):\ t\in\mathbf{C}\}\ .$$

Interesujące zadanie powstaje, gdy chcemy oszacować $\mathcal{L}_\infty(f)$ z dołu w klasie wielomianów stopnia d. W tym celu dla każdej liczby $d > 1$ oznaczmy

$$q(d) = \sup\{q : \ q \text{ jest ilorazem polarnym punktu } o \text{ krzywej } C \text{ stopnia } d\} .$$

Ilorazy polarne punktów osobliwych krzywej stopnia d dają się zapisać w postaci ułamków o mianowniku$<$ d. Zatem zbiór takich ilorazów jest skończony przy ustalonym d, natomiast $q(d)$ jest liczbą wymierną. Z twierdzenia 3 wynika

Wniosek 4. *Jeżeli wielomian stopnia $d > 1$ ma skończoną liczbę punktów krytycznych, to $\mathcal{L}_\infty(f) \geq d - 1 - q(d)$.*

Obliczanie $q(d)$ dla małych d ($d \leq 6$) nie przedstawia trudności. Ponadto

$$\frac{1}{4}d^2 - \frac{1}{4} \leq q(d) \leq d^2 - 2d + 2 .$$

Oszacowania powyższe nie są dokładne. Interesujący (ale jak się zdaje trudny) problem, to obliczenie

$$\limsup_{d \to +\infty} q(d)/d^2 .$$

Bibliografia

[AM] S. S. Abhyankar and T. T. Moh, *Embeddings of the line in the plane*, J. Reine Angew. Math. 276 (1975), 148–166.

[CK] J. Chądzyński and T. Krasiński, *On the Łojasiewicz exponent at infinity for polynomial mappings of $\mathbf{C}^2$ into $\mathbf{C}^2$ and components of polynomial automorphisms of $\mathbf{C}^2$*, Ann. Polon. Math. 57 (1992), 291–302.

[CN-H] P. Cassou-Noguès et Há Huy Vui, *Sur le nombre de Łojasiewicz à l'infini d'un polynôme*, Ann. Polon. Math. 62 (1995), 23–44.

[E] R. Ephraim, *Special polars and curves with one place at infinity*, Proc. of Symp. in Pure Math. vol. 40, Part I, 1983, 353–359.

[GP1] J. Gwoździewicz, A. Płoski, *On the approximate roots of polynomials*, Ann. Polon. Math. LX.3 (1995), 199–210.

[GP2] —, —, *Formulae for the singularities at infinity of plane algebraic curves* (preprint).

[L] Lê Van Thành, *Affine polar quotients and singularity at infinity of an algebraic plane curve*, Singularity Theory (19 August - 6 September 1991), Eds. D. T. Lê, K. Saito, B. Teissier, Word Scientific, 336–344.

[K] T. Krasiński, *The level sets of polynomials in two variables and the Jacobian Conjecture*, Acta Univ. Łodz. UŁ, Łódź (1991) (in Polish)

[P1] A. Płoski, *On the maximal polar quotient of an analytic plane curve*, Kodai Math, J. (to appear)

[P2] —, *Polar quotients and singularities at infinity of plane algebraic curves* (preprint).

[S] A. Seidenberg, *Elements of the theory of Algebraic curves*, Addison-Wesley, 1968.

[T] B. Teissier, *Variétés polaires*, Invent. Math. 40 (1977), 267–292.

ON THE SINGULARITIES AT INFINITY

OF A PENCIL OF AFFINE CURVES

Summary. We use polar quotients to characterize the equisingularity at infinity of the pencil of affine curves $f(X, Y) - t = 0$.

Będlewo, 8 – 12 stycznia 2001 r.