MATERIAŁY NA XXVIII KONFERENCJĘ SZKOLENIOWĄ
Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ
ZESPOLONEJ

2007 Łódź str. 21

WSTĘP DO LOKALNEJ TEORII KRZYWYCH ALGEBRAICZNYCH

Arkadiusz Płoski (Kielce)

Celem tego opracowania jest przedstawienie podstawowych pojęć lokalnej teorii krzywych algebraicznych w sposób ułatwiający studiowanie tekstów bardziej zaawansowanych w rodzaju monografii [Campillo 1980]. Wykład oparty jest na podstawowych własnościach szeregów formalnych wielu zmiennych oraz twierdzeniach będących podstawą lokalnej geometrii algebraicznej takich jak twierdzenie przygotowawcze Weierstrassa, twierdzenie o funkcjach uwikłanych dla szeregów potęgowych i lemat Hensela (por. [Abhyankar 1964] i [Łojasiewicz-Stasica 2005]). Rozważania prowadzone są nad ciałem algebraicznie domkniętym dowolnej charakterystyki. Podstawową techniką są lokalne przekształcenia kwadratowe, które pozwalają wyeliminować klasyczne twierdzenie Puiseux, prawdziwe wyłącznie w charakterystyce zero. Metoda przekształceń kwadratowych opisana jest szczegółowo w [Zariski 1965]. Czytelnik z korzyścią porówna proponowane ujęcie z podejściem opartym na szeregach Puiseux i diagramach Newtona (por. [Walker 1950]). Opracowując niniejszy artykuł korzystałem intensywnie z podręcznika [Seidenberg 1968]. Całość napisana jest w taki sposób aby czytelnik mógł z łatwością przejść do lektury popularnej książki Fultona [Fulton 1969].

W całej pracy $\mathbb{K}$ jest ciałem algebraicznie domkniętym dowolnej charakterystyki. Pierścień formalnych szeregów potęgowych zmiennych x, y o współczynnikach w ciele $\mathbb{K}$ oznaczamy $\mathbb{K}[[x, y]]$ a jego ciało ułamków $\mathbb{K}((x, y))$. Gdy

$f = \sum_{i \geqslant k} f_i$ jest niezerowym szeregiem formalnym przedstawionym jako suma form jednorodnych f_i gdzie $f_k \neq 0$ to piszemy $\operatorname{ord} f = k$ oraz $\operatorname{in} f = f_k$. Dodatkowo przyjmujemy $\operatorname{ord} 0 = \infty$ oraz $\operatorname{in} 0 = 0$. Symbol ∞ podlega zwykłym konwencjom. Szereg $u \in \mathbb{K}[[x,y]]$ nazywamy dzielnikiem jedynki gdy $uv = 1$ dla pewnego $v \in \mathbb{K}[[x,y]]$. Ma to miejsce dokładnie wtedy, gdy wyraz wolny szeregu u oznaczony $u(0)$ jest różny od zera. Gdy $f, g \in \mathbb{K}[[x,y]]$ są takie, że $f = gu$ dla jakiegoś dzielnika jedynki u to piszemy $f \sim g$. Ideał główny pierścienia $\mathbb{K}[[x,y]]$ generowany przez szereg f oznaczamy $(f)\mathbb{K}[[x,y]]$. Opis ideałów pierwszych pierścienia $\mathbb{K}[[x,y]]$ Czytelnik znajdzie w Dodatku C.

1 Krzywe algebroidalne, podstawienia kwadratowe

Niech $f \in \mathbb{K}[[x,y]]$ będzie niezerowym szeregiem formalnym bez stałego wyrazu. Krzywą algebroidalną o równaniu $f = 0$ nazywamy ideał główny $(f)\mathbb{K}[[x,y]]$ generowany przez f. Zamiast krzywa algebroidalna o równaniu $f = 0$ piszemy również krzywa $\{f = 0\}$. Jest więc $\{f = 0\} = \{g = 0\}$ dokładnie wtedy, gdy $f \sim g$. Krzywa $\{f = 0\}$ jest zredukowana (resp. nierozkładalna) gdy szereg f nie ma czynników wielokrotnych (resp. jest nierozkładalny). Gdy $f = f^{m_1} \dots f^{m_s}$ w $\mathbb{K}[[x,y]]$ gdzie f_i są nierozkładalne, względnie pierwsze to krzywe $\{f_i = 0\}$ nazywamy nierozkładalnymi komponentami krzywej $\{f = 0\}$ o krotnościach m_i.

Rzędem (także krotnością) krzywej $\{f = 0\}$ nazywamy liczbę $\operatorname{ord} f$. Definicja jest poprawna, bo relacja $f \sim g$ implikuje równość $\operatorname{ord} f = \operatorname{ord} g$. Krzywe krotności 1 nazywamy regularnymi lub nieosobliwymi. Krzywe krotności większej niż 1 nazywamy osobliwymi. Gdy $f \sim g$ to $\operatorname{in} f = c \operatorname{in} g$ dla pewnej stałej $c \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Krzywą afiniczną $\operatorname{in} f = 0$ (por. [Fulton 1969]) nazywamy stożkiem stycznym krzywej algebroidalnej $f = 0$. Z lematu o faktoryzacji (por. Dodatek A) oraz algebraicznej domkniętości ciała $\mathbb{K}$ wynika

Własność 1.1 *Stożek styczny nierozkładalnej krzywej $\{f = 0\}$ jest prostą afiniczną, tzn.* $\operatorname{in} f = l^{\operatorname{ord} f}$ *gdzie $l = bx - ay$ jest niezerową formą liniową.*

Niech teraz $\Phi(x,y) = (ax + by + \cdots, cx + dy + \cdots)$, $ad - bc \neq 0$ będzie parą szeregów formalnych rzędu 1 o formach początkowych niezależnych liniowo (kropki oznaczają wyrazy rzędu > 1). Podstawienie $f \mapsto f \circ \Phi$ jest izomorfizmem pierścienia $\mathbb{K}[[x,y]]$ (co więcej każdy $\mathbb{K}$-izomorfizm algebry $\mathbb{K}[[x,y]]$ jest takiej postaci). Mamy $\operatorname{ord} f = \operatorname{ord}(f \circ \Phi)$ oraz $\operatorname{in}(f \circ \Phi) = \operatorname{in} f \circ \operatorname{in} \Phi$ gdzie $\operatorname{in} \Phi = (ax + by, cx + dy)$.

Krzywe algebroidalne $\{f = 0\}$ i $\{g = 0\}$ nazywamy analitycznie równoważnymi gdy $f \circ \Phi = gu$ dla pewnej pary Φ spełniającej powyższe warunki i dla pewnego dzielnika jedynki u. Krzywe analitycznie równoważne mają jednakowe rzędy a ich stożki styczne są afinicznie izomorficzne. Każde dwie krzywe regularne są analitycznie równoważne.

Niech teraz $f = f(x,y) \in \mathbb{K}[[x,y]]$ będzie szeregiem nierozkładalnym rzędu $n > 0$. Z własności 1.1 wynika, że wtedy $\operatorname{ord} f(x,0) = n$ lub $\operatorname{ord} f(0,y) = n$.

Definicja 1.2 *Załóżmy, że szereg nierozkładalny $f \in \mathbb{K}[[x,y]]$ spełnia warunek* $\operatorname{ord} f(0,y) = \operatorname{ord} f = n$ *(mówimy wtedy, że f jest y-ogólny). Niech y_1 będzie nową zmienną. Szereg $f_1 \in \mathbb{K}[[x,y_1]]$ jest obrazem właściwym szeregu $f \in \mathbb{K}[[x,y]]$ poprzez podstawienie kwadratowe gdy $f_1(0,0) = 0$ oraz $f(x, ax+xy_1) = x^n f_1(x,y_1)$ w $\mathbb{K}[[x,y_1]]$ dla pewnego $a \in \mathbb{K}$. Piszemy wtedy $f_1 = Q(f)$.*

Odnotujmy podstawowe własności podstawienia kwadratowego

Lemat 1.3 *Załóżmy, że szereg nierozkładalny $f \in \mathbb{K}[[x,y]]$ jest y-ogólny i oznaczmy $f_1 = Q(f)$. Wtedy*

(i) prosta $y - ax = 0$ (oznaczenia jak w Definicji 1.2) jest styczna do krzywej $f(x,y) = 0$ (a więc stała $a \in \mathbb{K}$ jest wyznaczona jednoznacznie przez f) oraz $\operatorname{ord} f_1(0,y_1) = n$. *Gdy $a \neq 0$ to* $\operatorname{ord} f(x,0) = n$.

(ii) Gdy $f \sim g$ w $\mathbb{K}[[x,y]]$ oraz $f_1 = Q(f)$, $g_1 = Q(g)$ to $f_1 \sim g_1$ w $\mathbb{K}[[x,y]]$.

(iii) Jeżeli $f \in \mathbb{K}[[x]][y]$ jest wielomianem wyróżnionym względem y to $f_1 \in \mathbb{K}[[x]][y_1]$ oraz f_1 jest wielomianem wyróżnionym względem y_1.

Dowód. Ponieważ f jest y-ogólny oraz nierozkładalny zatem $f(x,y) = c(y - a_0 x)^n + \cdots +$ *(wyrazy rzędu $> n$)* w $\mathbb{K}[[x,y]]$ dla pewnego $c \neq 0$ (por. Własność 1.1). Jest więc $f(x, ax+xy_1) = x^n f_1(x,y_1)$ w $\mathbb{K}[[x,y_1]]$ przy czym $f_1(x,y_1) = (a - a_0 + y_1)^n + \cdots +$ *(wyrazy rzędu $> n$)*. Zatem $f_1(0,0) = 0$ dokładnie wtedy, gdy $a = a_0$ i w tym przypadku $\operatorname{ord} f_1(0,y_1) = n$. Pozostałe własności wynikają bezpośrednio z Definicji 1.2.

Lemat 1.4 *Jeżeli $f \in \mathbb{K}[[x,y]]$ jest szeregiem nierozkładalnym, y-ogólnym to $f_1 = Q(f) \in \mathbb{K}[[x,y]]$ jest również szeregiem nierozkładalnym.*

Dowód. Na mocy Lematu 1.3 *(iii)* możemy założyć, że $f = f(x,y)$ jest wielomianem y-wyróżnionym stopnia n. Wówczas szereg $f_1 = f_1(x,y_1)$ jest wielomianem y_1-wyróżnionym stopnia n i wystarczy sprawdzić, że f_1 jest nierozkładalny w pierścieniu $\mathbb{K}[[x]][y_1]$. Dla dowodu niewprost przypuśćmy, że

$$f_1(x,y_1) = \left(y_1^k + b_1(x) y_1^{k-1} + \cdots + b_k(x)\right)\left(y_1^l + c_1(x) y_1^{l-1} + \cdots + c_l(x)\right)$$

w $\mathbb{K}[[x]][y_1]$ gdzie $k, l > 0$.

Oczywiście $k + l = n$ a więc

$$\begin{aligned} f(x, ax+xy_1) &= x^n f_1(x,y_1) = \\ &= \left((xy_1)^k + b_1(x) x (xy_1)^{k-1} + \cdots + b_k(x) x^k\right) \cdot \\ &\qquad \cdot \left((xy_1)^l + c_1(x) x (xy_1)^{l-1} + \cdots + c_l(x) x^l\right). \end{aligned}$$

Niech z będzie nową zmienną. Z ostatniej tożsamości wynika, że

$$\begin{aligned} &f(x, ax+z) = \\ &= \left(z^k + x b_1(x) z^{k-1} + \cdots + x^k b_k(x)\right)\left(z^l + x c_1(x) z^{l-1} + \cdots + x^l c_l(x)\right). \end{aligned}$$

To dowodzi, że szereg $f(x, ax+z) \in \mathbb{K}[[x,z]]$ jest rozkładalny. Otrzymujemy sprzeczność bo jest on nierozkładalny jako obraz nierozkładalnego szeregu $f(x,y)$ poprzez izomorfizm $\mathbb{K}[[x,y]] \to \mathbb{K}[[x,z]]$.

Lemat 1.5 *Niech $f = f(x,y) \in \mathbb{K}[[x,y]]$ będzie szeregiem y-ogólnym rzędu $n = \operatorname{ord} f > 1$. Wówczas istnieje ciąg szeregów $f_i = f_i(x,y_i) \in \mathbb{K}[[x,y_i]]$, $i = 0,1,\ldots,m$ taki, że $f_0 = f$ (oraz $y_0 = y$), $f_{i+1} = Q(f_i)$, $\operatorname{ord} f_i = n$ dla $i < m$ oraz $\operatorname{ord} f_m < n$.*

Dowód. Oznaczmy $y_0 = y$ oraz $f_0 = f$ i rozważmy $f_1 = Q(f_0)$. Jeżeli $\operatorname{ord} f_1 < n$ to przyjmujemy $m = 1$ i szukanym ciągiem jest f_0, f_1. Gdy $\operatorname{ord} f_1 = n$ (zawsze jest $\operatorname{ord} f_1 \leqslant \operatorname{ord} f$ ponieważ $\operatorname{ord} f_1(0,y_1) = n$) to przyjmujemy $f_2 = Q(f_1)$. Gdy $\operatorname{ord} f_2 < n$ kończymy postępowanie. Należy wykazać, że po skończonej liczbie kroków otrzymujemy ciąg $f_0,\ldots,f_m$ taki, że $f_{i+1} = Q(f_i)$, $\operatorname{ord} f_i = n$ dla $i < m$ oraz $\operatorname{ord} f_m < n$. W przeciwnym wypadku istniałby ciąg nieskończony $f_0,\ldots,f_m,\ldots$ taki, że $f_{i+1} = Q(f_i)$ oraz $\operatorname{ord} f_i = n$ dla wszystkich $i \geqslant 0$. Niech $y_i - a_i x = 0$ będzie styczną do krzywej $f_i(x,y_i) = 0$. Łatwo sprawdzić, że $f(x,y(x)) = 0$ gdzie $y(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} a_{i-1}x^i$. Otrzymujemy sprzeczność bo f jest nierozkładalny oraz $\operatorname{ord} f > 1$ a warunek $f(x,y(x)) = 0$ implikuje, że $y - y(x)$ dzieli $f(x,y)$ w $\mathbb{K}[[x,y]]$.

Możemy teraz skonstruować podstawienie obniżające rząd szeregu.

Propozycja 1.6 *Niech $f(x,y) \in \mathbb{K}[[x,y]]$ będzie szeregiem nierozkładalnym, y-ogólnym rzędu $n = \operatorname{ord} f > 0$. Niech $\tilde{y}$ będzie nową zmienną.*

Wtedy istnieje liczba całkowita $m > 0$ oraz wielomian $P(x) = \sum_{i=1}^{m} a_{i-1}x^i$ stopnia $\leqslant m$ takie, że

- *(i)* $f(x, P(x) + x^m\tilde{y}) = x^{mn}\tilde{f}(x,\tilde{y})$ *w* $\mathbb{K}[[x,\tilde{y}]]$,
- *(ii)* $\tilde{f} = \tilde{f}(x,\tilde{y}) \in \mathbb{K}[[x,\tilde{y}]]$ *jest szeregiem nierozkładalnym rzędu* $\operatorname{ord}\tilde{f} < n$,
- *(iii) jest* $\operatorname{ord}\tilde{f}(0,\tilde{y}) = n$. *Gdy* $P(x) \neq 0$ *to* $\operatorname{ord} f(x,0) = \operatorname{ord} P(x)\cdot n$,
- *(iv) jeżeli* $f \sim W$ *oraz* $\tilde{f} \sim \tilde{W}$ *gdzie* W *i* $\tilde{W}$ *są wielomianami wyróżnionymi Weierstrassa, to* $W(x, P(x) + x^m\tilde{y}) = x^{mn}\tilde{W}(x,\tilde{y})$.

Dowód. Niech $f_0, f_1, \ldots, f_m$ będzie ciągiem szeregów takim jak w Lemacie 1.5. Jest zatem $f_i(x, a_i x + x y_{i+1}) = x^n f_{i+1}(x, y_{i+1})$ $(i = 0,1,\ldots,m-1)$ dla pewnych $a_i \in \mathbb{K}$. Oznaczmy $P(x) = \sum_{i=1}^{m} a_{i-1}x^i$, $\tilde{y} = y_m$ oraz $\tilde{f}(x,\tilde{y}) = f_m(x,\tilde{y})$. Ze związków między f_i oraz f_{i+1} $(i = 0,\ldots,m-1)$ wynika pierwsza część *(i)* Propozycji 1.6. Część *(ii)* wynika z nierozkładalności obrazu właściwego (por. Lemat 1.4).

Aby sprawdzić *(iii)* załóżmy, że $k = \operatorname{ord} P(x) < \infty$. Zatem $a_{k-1} \neq 0$ oraz $a_{i-1} = 0$ dla $i < k$. Jest zatem $f_i(x, x y_{i+1}) = x^n f_{i+1}(x, y_{i+1})$ dla $i < k-1$ oraz $f_{k-1}(x, a_{k-1}x + x y_k) = x^n f_k(x, y_k)$. Ponieważ $a_{k-1} \neq 0$ zatem z podanej równości wynika, że $\operatorname{ord} f_{k-1}(x,0) = n$ na mocy Lematu 1.3 *(i)*. Ponieważ $\operatorname{ord} f_i(x,0) = n + \operatorname{ord} f_{i+1}(x,0)$ dla $i < k-1$ zatem otrzymujemy $\operatorname{ord} f(x,0) = \operatorname{ord} f_0(x,0) = nk$.

Własność *(iv)* wynika z faktu, że relacje $f \sim W$ oraz $f_1 \sim W_1$ implikują $W_1 = Q(W)$.

Uwaga 1.7 Powyżej zakładaliśmy, że szereg $f \in \mathbb{K}[[x,y]]$ jest y-ogólny i dla takich szeregów określiliśmy podstawienie kwadratowe i opisaliśmy jego własności. Gdy $f \in \mathbb{K}[[x,y]]$ jest x-ogólny to podaną definicję i lematy należy przeformułować w oczywisty sposób. W szczególności, gdy $\operatorname{ord} f(x,0) = \operatorname{ord} f = n$ to podstawienie kwadratowe ma postać $f(by+yx_1, y) = y^n f_1(x_1,y)$, $f_1(0,0) = 0$. Gdy $\operatorname{ord} f(x,0) = \operatorname{ord} f(0,y) = n$ to $ab \neq 0$ i otrzymane obrazy właściwe są analitycznie izomorficzne.

2 Parametryzacje

Niech t będzie zmienną. Parametryzacją nazywamy parę $(\phi(t), \psi(t)) \in \mathbb{K}[[t]]^2$ taką, że $\phi(0) = \psi(0) = 0$ oraz $\phi(t) \neq 0$ lub $\psi(t) \neq 0$ w $\mathbb{K}[[t]]$. Dwie parametryzacje $(\phi(t), \psi(t))$ oraz $(\phi_1(t), \psi_1(t))$ są równoważne gdy istnieje szereg $\tau(t) \in \mathbb{K}[[t]]$, $\operatorname{ord} \tau(t) = 1$ taki, że $\phi(t) = \phi_1(\tau(t))$, $\psi(t) = \psi_1(\tau(t))$. Parametryzację nazywamy wierną gdy nie istnieje szereg $\tau(t)$, $\operatorname{ord} \tau(t) > 1$ oraz parametryzacja $(\phi_1(t_1), \psi_1(t_1))$ takie, że $\phi(t) = \phi_1(\tau(t))$, $\psi(t) = \psi_1(\tau(t))$.

Twierdzenie 2.1 (Twierdzenie Normalizacyjne) *Niech $f(x,y) \in \mathbb{K}[[x,y]]$ będzie szeregiem nierozkładalnym. Wówczas istnieje parametryzacja wierna $(\phi(t), \psi(t))$ taka, że $f(\phi(t), \psi(t)) = 0$ przy czym $\operatorname{ord} f(x,0) = \operatorname{ord} \psi(t)$ oraz $\operatorname{ord} f(0,y) = \operatorname{ord} \phi(t)$. Jeżeli $(\phi^*(u), \psi^*(u))$ jest parametryzacją taką, że $f(\phi^*(u), \psi^*(u)) = 0$ to istnieje szereg $\sigma(u) \in \mathbb{K}[[u]]$, $\sigma(0) = 0$ takie, że $\phi^*(u) = \phi(\sigma(u))$ oraz $\psi^*(u) = \psi(\sigma(u))$.*

Parametryzację wierną $(\phi(t), \psi(t))$ taką, że $f(\phi(t), \psi(t)) = 0$ nazywamy normalizacją krzywej $f(x,y) = 0$. Z Twierdzenia 2.1 wynika, że każda krzywa nierozkładalna ma normalizację i to jedyną z dokładnością do równoważności.

Dowód Twierdzenia 2.1 (Indukcja względem $\operatorname{ord} f$).

Gdy $\operatorname{ord} f = 1$ twierdzenie łatwo wynika z twierdzenia o funkcjach uwikłanych. Załóżmy więc, że $n > 1$ jest liczbą całkowitą i że twierdzenie jest prawdziwe dla szeregów nierozkładalnych rzędu $< n$. Ustalmy szereg f taki, że $\operatorname{ord} f = n$. Bez zmniejszenia ogólności możemy założyć, że $\operatorname{ord} f(0,y) = n$. Niech $\tilde{f}(x,\tilde{y}) \in \mathbb{K}[[x,\tilde{y}]]$ będzie szeregiem takim jak w Propozycji 1.6. Jest zatem $f(x, P(x) + x^m\tilde{y}) = x^{mn}\tilde{f}(x,\tilde{y})$ gdzie $P(x)$ jest wielomianem stopnia $\leqslant m$, $\operatorname{ord} \tilde{f}(0,\tilde{y}) = n$ oraz $\operatorname{ord} \tilde{f} < n$. Na mocy założenia indukcyjnego istnieje normalizacja $(\phi(t), \tilde{\psi}(t))$ krzywej $\tilde{f}(x,\tilde{y}) = 0$ taka, że $\operatorname{ord} \phi(t) = \operatorname{ord} \tilde{f}(0,\tilde{y})$ oraz $\operatorname{ord} \tilde{\psi}(t) = \operatorname{ord} \tilde{f}(x,0)$. Oznaczmy $\psi(t) = P(\phi(t)) + \phi(t)^m\tilde{\psi}(t)$ i rozważmy parametryzację $(\phi(t), \psi(t))$. Jest oczywiście $f(\phi(t), \psi(t)) = 0$.

Aby sprawdzić, że parametryzacja $(\phi(t), \psi(t))$ jest wierna przypuśćmy, że $\phi(t) = \phi_1(\tau(t))$, $\psi(t) = \psi_1(\tau(t))$ dla pewnej parametryzacji $(\phi_1(t_1), \psi_1(t_1))$ i szeregu $\tau(t) \in \mathbb{K}[[t]]$, $\operatorname{ord} \tau(t) \geqslant 1$. Zatem $\psi_1(\tau(t)) - P(\phi_1(\tau(t))) = \phi_1(\tau(t))^m\tilde{\psi}(t)$ a stąd $\operatorname{ord} \psi_1(t_1) - P(\phi_1(t_1)) \geqslant \operatorname{ord} \phi_1(t_1)^m$. Oznaczmy $\tilde{\psi}_1(t_1) = \frac{\psi_1(t_1) - P(\phi_1(t_1))}{\phi_1(t_1)^m}$.

Jest więc $\operatorname{ord}\tilde{\psi}_1(t_1) \geqslant 0$ oraz $\tilde{\psi}(t) = \tilde{\psi}_1(\tau(t))$. Z równości $\phi(t) = \phi_1(\tau(t))$ oraz $\tilde{\psi}(t) = \tilde{\psi}_1(\tau(t))$ wynika, że $\operatorname{ord}\tau(t) = 1$ bo parametryzacja $(\phi(t), \tilde{\psi}(t))$ jest wierna. Dowodzi to, że $(\phi(t), \psi(t))$ jest normalizacją krzywej $f(x, y) = 0$. Przypomnijmy, że $\operatorname{ord}\phi(t) = \operatorname{ord}\tilde{f}(0, \tilde{y}) = n = \operatorname{ord} f(0, y)$. Aby obliczyć $\operatorname{ord}\psi(t)$ załóżmy najpierw, że $P(x) \neq 0$. Wtedy $\operatorname{ord} P(\phi(t)) = (\operatorname{ord} P)(\operatorname{ord}\phi) \leqslant m(\operatorname{ord}\phi) = \operatorname{ord}\phi^m < \operatorname{ord}\phi^m\tilde{\psi}$ a więc $\operatorname{ord}\psi(t) = \operatorname{ord}\left(P(\phi(t)) + \phi(t)^m\tilde{\psi}(t)\right) = \operatorname{ord} P(\phi(t)) = (\operatorname{ord} P)(\operatorname{ord}\phi) = (\operatorname{ord} P)n = \operatorname{ord} f(x, 0)$ na mocy Propozycji 1.6 *(iii)*. Gdy $P(x) = 0$ to $\operatorname{ord}\psi(t) = \operatorname{ord}\phi(t)^m\tilde{\psi}(t) = mn + \operatorname{ord}\tilde{\psi} = mn + \operatorname{ord}\tilde{f}(x, 0) = \operatorname{ord} f(x, 0)$. Podsumowując, sprawdziliśmy, że $\operatorname{ord}\phi(t) = \operatorname{ord} f(0, y)$ oraz $\operatorname{ord}\psi(t) = \operatorname{ord} f(x, 0)$.

Niech teraz $(\phi^*(u), \psi^*(u))$ będzie parametryzacją taką, że $f(\phi^*(u), \psi^*(u)) = 0$. Oznaczmy $\tilde{\psi}^*(u) = \frac{\psi^*(u) - P(\phi^*(u))}{\phi^*(u)^m} \in \mathbb{K}((u))$. Niech $W(x, y)$ będzie wielomianem wyróżnionym stowarzyszonym z $f(x, y)$. Jest $0 = W(\phi^*(u), \psi^*(u)) = W\left(\phi^*(u), P(\phi^*(u)) + \phi^*(u)^m\tilde{\psi}^*(u)\right) = (\phi^*(u))^{mn}\,\tilde{W}\left(\phi^*(u), \tilde{\psi}^*(u)\right)$ a stąd $\tilde{W}\left(\phi^*(u), \tilde{\psi}^*(u)\right) = 0$.

Z ostatniej równości wynika, że $\operatorname{ord}\tilde{\psi}^*(u) > 0$ bo $\tilde{\psi}^*(u)$ jest pierwiastkiem wielomianu wyróżnionego $\tilde{W}(\phi^*(u), y) \in \mathbb{K}[[u]][y]$ (por. Uwaga 2.2 podana niżej). Niech $(\phi(t), \tilde{\psi}(t))$ będzie normalizacją krzywej $\tilde{f}(x, \tilde{y}) = 0$. Na mocy założenia indukcyjnego mamy $\phi^*(u) = \phi(\tau(u))$ oraz $\psi^*(u) = \tilde{\psi}(\tau(u))$ a stąd $\phi^*(u) = \phi(\tau(u))$ oraz $\psi^*(u) = \psi(\tau(u))$ co kończy dowód.

Uwaga 2.2 Ciało ułamków $\mathbb{K}((u))$ pierścienia szeregów formalnych jednej zmiennej jest ciałem z waluacją ord. Jeżeli $\zeta(u)^n + \alpha_1(u)\zeta(u)^{n-1} + \cdots + \alpha_n(u) = 0$ w $\mathbb{K}((u))$ to jak Czytelnik łatwo sprawdzi $\operatorname{ord}\zeta(u) \geqslant \inf_i\{\frac{1}{i}\operatorname{ord}\alpha_i(u)\}$. W szczególności, gdy wielomian $y^n + \alpha_1(u)y^{n-1} + \cdots + \alpha_n(u)$ jest wyróżniony to $\operatorname{ord}\alpha_i(u) > 0$ dla $i = 1, \ldots, n$ a więc także $\operatorname{ord}\zeta(u) > 0$.

Wniosek 2.3 *Jeżeli* $f(x, y) \in \mathbb{K}[[x, y]]$ *oraz* $n = \operatorname{ord} f(0, y) < \infty$ *to istnieją szeregi* $\alpha(s), \beta_1(s), \ldots, \beta_n(s) \in \mathbb{K}[[s]]$ *(s jedna zmienna) bez stałych wyrazów takie, że*

$$f(\alpha(s), y) \sim \prod_{j=1}^{n}(y - \beta_j(s)) \text{ w } \mathbb{K}[[s, y]].$$

Dowód. Stosując twierdzenie przygotowawcze możemy założyć, że $f(x, y) \in \mathbb{K}[[x]][y]$ jest wielomianem wyróżnionym stopnia n. Dowód prowadzimy indukcyjnie względem $n = \deg_y f$. Gdy $n = 1$ wniosek jest oczywisty. Załóżmy, że $n > 1$ i że wniosek jest prawdziwy dla wielomianów stopnia $n-1$. Załóżmy, że $f(x, y)$ jest wielomianem wyróżnionym stopnia n. Stosując Twierdzenie 2.1 do jakiegoś czynnika nierozkładalnego szeregu $f(x, y)$ stwierdzamy istnienie parametryzacji $(\alpha(s), \beta(s))$ takiej, że $f(\alpha(s), \beta(s)) = 0$. Mamy zatem $f(\alpha(s), y) = (y - \beta(s))g(s, y)$ w $\mathbb{K}[[s]][y]$ gdzie $g(s, y) = y^{n-1} + \ldots$ jest wielomianem wyróżnionym stopnia $n - 1$. Stosujemy założenie indukcyjne do $g(s, y)$.

Odnotujmy jeszcze

Wniosek 2.4 (Twierdzenie Puiseux) *Niech $\mathbb{K}$ będzie ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki l. Niech $n > 0$ będzie liczbą całkowitą taką, że $n \not\equiv 0 \pmod{l}$. Wtedy dla każdego wielomianu wyróżnionego i nierozkładalnego $P(x,y) = y^n + \sum_{i=1}^n a_i(x)y^{n-i}$ istnieje szereg $y(s) \in \mathbb{K}[[s]]$, $y(0) = 0$ taki, że*

$$P(s^n, y) = \prod_{\epsilon^n=1} (y - y(\epsilon s)).$$

Dowód. Niech $(\phi(t), \psi(t))$ będzie normalizacją krzywej $P(x,y) = 0$. Wtedy $\operatorname{ord}\phi(t) = \operatorname{ord}P(0,y) = n$ a więc istnieje szereg $\sigma(t)$ taki, że $\phi(t) = \sigma(t)^n$ w $\mathbb{K}[[t]]$ bo $n \not\equiv 0 \pmod{l}$ (stosujemy twierdzenie o funkcji uwikłanej do równania $y^n - \phi(t) = 0$). Oczywiście $\operatorname{ord}\sigma(t) = 1$ a więc $\psi(t) = y(\sigma(t))$ dla pewnego szeregu $y(s) \in \mathbb{K}[[s]]$. Parametryzacja $(s^n, y(s))$ jest wierna. Wynika stąd, że $\mathrm{GCD}\,(\{n\} \cup \{\operatorname{supp}\, y(s)\}) = 1$ oraz $y(\epsilon_1 s) \neq y(\epsilon_2 s)$ gdy $\epsilon_1^n = \epsilon_2^n = 1$ i $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$. Stąd wynika wniosek bo oczywiście $P(s^n, y(\epsilon s)) = 0$ dla wszystkich ϵ takich, że $\epsilon^n = 1$.

Dla zupełności udowodnijmy jeszcze twierdzenie częściowo odwrotne do Twierdzenia 2.1.

Twierdzenie 2.5 *Dla każdej parametryzacji $(\phi(t), \psi(t))$ istnieje szereg nierozkładalny $f = f(x,y)$ taki, że $f(\phi(t), \psi(t)) = 0$. Jest on wyznaczony jednoznacznie przez parametryzację z dokładnością do dzielnika jedynki w $\mathbb{K}[[x,y]]$.*

Dowód. Załóżmy, że $\phi(t) \neq 0$ i oznaczmy $n = \operatorname{ord}\phi(t)$. Twierdzimy, że $\mathbb{K}[[t]] = \mathbb{K}[[\phi(t)]] + t\mathbb{K}[[\phi(t)]] + \cdots + t^{n-1}\mathbb{K}[[\phi(t)]]$ co implikuje, że rozszerzenie $\mathbb{K}[[t]] \supset \mathbb{K}[[\phi(t)]]$ jest modułem skończonym. Rzeczywiście ustalmy $g(t) \in \mathbb{K}[[t]]$ i oznaczmy $F(x,t) = \phi(t) - x$. Jest więc $\operatorname{ord}F(0,t) = \operatorname{ord}\phi(t) = n$ i twierdzenie Weierstrassa w wersji dzieleniowej daje relację $g(t) = q(x,t)F(x,t) + \sum_{i=1}^{n-1} a_i(x)t^i$. Podstawienie $\phi(t)$ na miejsce x daje $g(t) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i(\phi(t))t^i$. Rozszerzenie $\mathbb{K}[[t]] \supset \mathbb{K}[[\phi(t)]]$ jako skończone jest rozszerzeniem całkowitym. W szczególności element $\psi(t)$ jest całkowity nad $\mathbb{K}[[\phi(t)]]$ a więc istnieje $f(x,y) \in \mathbb{K}[[x]][y]$ unormowany względem y taki, że $f(\phi(t), \psi(t)) = 0$. Zastępując ewentualnie $f(x,y)$ przez jego czynnik nierozkładalny dostajemy pierwszą część twierdzenia. Jednoznaczność wynika z faktu, że ideał I złożony z szeregów $g(x,y) \in \mathbb{K}[[x,y]]$ takich, że $g(\phi(t), \psi(t)) = 0$ jest pierwszy i nie jest maksymalny bo $(\phi(t), \psi(t)) \neq (0,0)$ (por. Dodatek C).

3 Krotność przecięcia

Niech $f = f(x,y) \in \mathbb{K}[[x,y]]$ będzie szeregiem nierozkładalnym. Ustalmy normalizację $(\phi(t), \psi(t))$ krzywej $f(x,y) = 0$. Definiujemy dla każdego $g = g(x,y) \in \mathbb{K}[[x,y]]$:

$$v_f(g) = \operatorname{ord} g(\phi(t), \psi(t)) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

Propozycja 3.1 *Dla dowolnych $g, g' \in \mathbb{K}[[x,y]]$ zachodzą następujące własności:*

(i) $v_f(g)=0$ *dokładnie wtedy, gdy* $g(0)\neq 0$, $v_f(g)=\infty$ *gdy* f *dzieli* g *w* $\mathbb{K}[[x,y]]$,

(ii) $v_f(g+g')\geqslant \inf\{v_f(g),v_f(g')\}$. *Gdy* $v_f(g)\neq v_f(g')$ *to zachodzi równość,*

(iii) $v_f(gg')=v_f(g)+v_f(g')$,

(iv) $v_f(g+hf)=v_f(g)$ *dla* $h\in\mathbb{K}[[x,y]]$.

Dowód. Aby sprawdzić część *(i)* zauważmy, że ideał $I=\{h(x,y)\in\mathbb{K}[[x,y]]: h(\phi(t),\psi(t))=0\}$ jest pierwszy i nie jest maksymalny. Stąd wynika (por. Dodatek C), że $I=(f)$ co dowodzi, że $v_f(g)=\infty$ zachodzi dokładnie wtedy, gdy f dzieli g. Pozostałe własności są bezpośrednimi konsekwencjami definicji.

Uwaga Z każdą krzywą nierozkładalną kojarzymy ciało $\mathcal{M}_f$ funkcji meromorficznych na $\{f=0\}$. W tym celu rozważamy ułamki $\frac{g}{h}$ gdzie $g,h\in\mathbb{K}[x,y]]$ oraz $h\not\equiv 0 \bmod f$. Przyjmujemy, że $\frac{g}{h}\equiv\frac{g_1}{h_1}$ gdy f dzieli gh_1-g_1h. Klasy abstrakcji relacji $\equiv$ tworzą w naturalny sposób ciało oznaczone $\mathcal{M}_f$. Funkcja v_f przedłuża się do waluacji $v_f:\mathcal{M}_f\to\mathbb{Z}\cup\{\infty\}$, którą określamy wzorem $v_f\left(\frac{g}{h}\right)=v_f(g)-v_f(h)$.

Propozycja 3.2 (Nierówność podstawowa) *Jest* $v_f(g)\geqslant(\operatorname{ord} f)(\operatorname{ord} g)$. *Równość zachodzi dokładnie wtedy, gdy krzywe* $\{f=0\}$ *i* $\{g=0\}$ *nie mają wspólnej stycznej.*

Dowód powyższej propozycji wykorzystuje

Lemat 3.3 *Niech* $(\phi(t),\psi(t))$ *będzie parametryzacją,* $n=\inf\{\operatorname{ord}\phi(t),\operatorname{ord}\psi(t)\}<\infty$, $\phi(t)=at^n+\cdots$, $\psi(t)=bt^n+\cdots$ *gdzie* $a\neq 0$ *lub* $b\neq 0$. *Wtedy dla każdego szeregu* $g=g(x,y)\in\mathbb{K}[[x,y]]$: $\operatorname{ord} g(\phi(t),\psi(t))\geqslant(\operatorname{ord} g)n$ *przy czym równość zachodzi dokładnie wtedy, gdy* $(\operatorname{in} g)(a,b)\neq 0$.

Dowód lematu. Napiszmy $g(x,y)=\sum_{\alpha+\beta=m} g_{\alpha\beta}(x,y)x^\alpha y^\beta$ gdzie $m=\operatorname{ord} g$ oraz $\sum_{\alpha+\beta=m} g_{\alpha\beta}(0,0)x^\alpha y^\beta=\operatorname{in} g$ ("Lemat Hadamarda").

Jest

$$g(\phi(t),\psi(t))=t^{mn}\sum_{\alpha+\beta=m} g(\phi(t),\psi(t))\left(\frac{\phi(t)}{t^n}\right)^\alpha\left(\frac{\psi(t)}{t^n}\right)^\beta=$$

$$=t^{mn}\left((\operatorname{in} g)(a,b)+\textit{wyrazy rzędu}>0\right)$$

co dowodzi lematu.

Dowód Propozycji 3.2. Niech $(\phi(t),\psi(t))$ będzie normalizacją krzywej nierozkładalnej $f(x,y)=0$. Zatem $\inf\{\operatorname{ord}\phi(t),\operatorname{ord}\psi(t)\}=\inf\{\operatorname{ord} f(0,y),\operatorname{ord} f(x,0)\}=\operatorname{ord} f$ bo $f=0$ ma jedną styczną. Oznaczmy $n=\operatorname{ord} f$, $\phi(t)=at^n+\cdots$, $\psi(t)=bt^n+\cdots$. Zatem $a\neq 0$ lub $b\neq 0$. Ponieważ $\operatorname{ord} f(\phi(t),\psi(t))=\operatorname{ord} 0=\infty$ zatem z Lematu 3.3 wynika, że $(\operatorname{in} f)(a,b)=0$ a zatem jedyna styczna do $f=0$ jest dana równaniem $bx-ay=0$.

Mamy teraz $v_f(g) = \operatorname{ord} g(\phi(t), \psi(t)) \geqslant (\operatorname{ord} g) \inf\{\operatorname{ord}\phi(t), \operatorname{ord}\psi(t)\} = (\operatorname{ord} g)(\operatorname{ord} f)$ na podstawie pierwszej części Lematu 3.3. Równość $v_f(g) = (\operatorname{ord} g)(\operatorname{ord} f)$ zachodzi dokładnie wtedy, gdy $(\operatorname{in} g)(a, b) \neq 0$ co ma miejsce dokładnie wtedy, gdy układ równań $\operatorname{in} g = \operatorname{in} f = 0$ ma wyłącznie rozwiązanie $x = 0$, $y = 0$ tzn. gdy $f = 0$ i $g = 0$ nie mają wspólnej stycznej.

Propozycja 3.4 *Dla dowolnych nierozkładalnych* $f, g \in \mathbb{K}[[x, y]]$ *jest* $v_f(g) = v_g(f)$.

Aby dowieść Propozycję 3.4 sprawdzimy następujący lemat.

Lemat 3.5 *Załóżmy, że* f *jest nierozkładalny,* $n = \operatorname{ord} f(0, y) < \infty$ *oraz* $f(\alpha(s), y) \sim \prod_{j=1}^{n}(y - \beta_j(s))$ *w* $\mathbb{K}[[s]][y]$. *Wtedy dla każdego* $g(x, y) \in \mathbb{K}[[x, y]]$*:*

$$\sum_{j=1}^{n} \operatorname{ord} g(\alpha(s), \beta_j(s)) = (\operatorname{ord}\alpha(s)) v_f(g).$$

Dowód Lematu 3.5. Niech $(\phi(t), \psi(t))$ będzie normalizacją krzywej $f(x, y) = 0$. Zatem $\alpha(s) = \phi(\sigma_j(s))$, $\beta_j(s) = \psi(\sigma_j(s))$ dla pewnego $\sigma_j(s)$, $\sigma_j(0) = 0$.

Mamy zatem

$$\sum_{j=1}^{n} \operatorname{ord} g(\alpha(s), \beta_j(s)) = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{ord} g(\phi(t), \psi(t)) \operatorname{ord}\sigma_j(s) = v_f(g) \sum_{j=1}^{n} \operatorname{ord}\sigma_j(s).$$

Aby obliczyć ostatnią sumę zauważmy, że $\operatorname{ord}\alpha(s) = \operatorname{ord}\phi(t) \operatorname{ord}\sigma_j(s) = n \operatorname{ord}\sigma_j(s)$ a więc $\sum_{j=1}^{n} \operatorname{ord}\sigma_j(s) = \operatorname{ord}\alpha(s)$ co kończy dowód.

Dowód Propozycji 3.4. Niech $f, g \in \mathbb{K}[[x, y]]$ będą nierozkładalne. Załóżmy najpierw, że f, g są y-regularne; $n = \operatorname{ord} f(0, y)$, $p = \operatorname{ord} g(0, y)$. Na mocy Wniosku 2.3 z Twierdzenia Normalizacyjnego mamy

$$f(\alpha(s), y) \sim \prod_{j=1}^{n}(y - \beta_j(s)),$$

$$g(\alpha(s), y) \sim \prod_{j=1}^{p}(y - \gamma_j(s)).$$

Korzystając dwukrotnie z Lematu 3.5 otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \operatorname{ord}\alpha(s)\, v_f(g) &= \sum_{j=1}^{n} \operatorname{ord} g(\alpha(s), \beta_j(s) = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{ord} \prod_{k=1}^{p} (\beta_j(s) - \gamma_k(s)) = \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} \operatorname{ord}\, (\beta_j(s) - \gamma_k(s)) = \sum_{k=1}^{p} \operatorname{ord} f(\alpha(s), \gamma_k(s)) = (\operatorname{ord}\alpha(s))\, v_g(f). \end{aligned}$$

Stąd $v_f(g) = v_g(f)$.

Załóżmy teraz, że $\operatorname{ord} f(0,y) = n < \infty$ oraz $\operatorname{ord} g(0,y) = \infty$. Ostatni warunek oznacza, że $g \sim x$ a więc $v_f(g) = v_f(x) = \operatorname{ord} \phi(t) = \operatorname{ord} f(0,y) = v_x(f) = v_g(f)$.

Podobnie sprawdzamy propozycję, gdy $\operatorname{ord} f(0,y) = \infty$ oraz $\operatorname{ord} g(0,y) = p < \infty$. Gdy $\operatorname{ord} f(0,y) = \operatorname{ord} g(0,y) = \infty$ to f i g są podzielne przez x i wtedy $v_f(g) = \infty = v_g(f)$.

Odnotujmy jeszcze formułę dla rzędu rugownika dwóch wielomianów wyróżnionych

Propozycja 3.6 *Jeżeli $R_{f,g}(x)$ jest rugownikiem wielomianów wyróżnionych $f(x,y) = y^n + a_1(x)y^{n-1} + \ldots + a_n(x)$ oraz $g(x,y) = y^p + b_1(x)y^{p-1} + \ldots + b_p(x)$, to dla nierozkładalnego f:*

$$\operatorname{ord} R_{f,g}(x) = v_f(g).$$

Dowód. Na mocy Wniosku 2.3 istnieją szeregi $\alpha(s), b_1(s), \ldots, \beta_n(s) \in \mathbb{K}[[s]]$ bez stałych wyrazów takie, że $f(\alpha(s), y) = \prod_{j=1}^n (y - \beta_j(s))$. Z definicji rugownika wynika, że $R_{f,g}(\alpha(s)) = \pm \prod_{j=1}^n g(\alpha(s), \beta_j(s))$ a zatem $\operatorname{ord} R_{f,g}(\alpha(s)) = \sum_{j=1}^n \operatorname{ord} g(\alpha(s), \beta_j(s)) = (\operatorname{ord} \alpha(s)) v_f(g)$ na mocy Lematu 3.5 a stąd $\operatorname{ord} R_{f,g} = v_f(g)$ bo $\operatorname{ord} R_{f,g}(\alpha(s)) = (\operatorname{ord} R_{f,g}) \operatorname{ord} \alpha(s)$.

Niech teraz $f \in \mathbb{K}[[x,y]]$ będzie dowolnym szeregiem niezerowym bez stałego wyrazu i niech $f = \prod_{i=1}^r f_i$ będzie rozkładem f na czynniki pierwsze. Przyjmujemy $i_0(f,g) = \sum_{i=1}^r v_{f_i}(g)$. Ponadto, gdy $f(0) \neq 0$ to definiujemy $i_0(f,g) = 0$ a gdy $f \equiv 0$: $i_0(f,g) = \infty$. Z udowodnionych wyżej własności waluacji v_f (Propozycje 3.1, 3.2, 3.4) wynikają podstawowe własności $i_0(f,g)$ (gdy $f(0) = g(0) = 0$ to $i_0(f,g)$ nazywamy krotnością przecięcia krzywych $f = 0$ i $g = 0$).

Propozycja 3.7 *Dla dowolnych $f, g, g' \in \mathbb{K}[[x,y]]$:*

(i) $0 \leqslant i_0(f,g) \leqslant \infty$, $i_0(f,g) = 0$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $f(0) \neq 0$ *lub* $g(0) \neq 0$; $i_0(f,g) = \infty$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* f, g *mają wspólny dzielnik w* $\mathbb{K}[x,y]]$,

(ii) $i_0(f, gg') = i_0(f,g) + i_0(f,g')$,

(iii) $i_0(f, g + hf) = i_0(f,g)$ *dla dowolnego* $h \in \mathbb{K}[[x,y]]$,

(iv) $i_0(f,g) = i_0(g,f)$,

(v) $i_0(f,g) \geqslant (\operatorname{ord} f)(\operatorname{ord} g)$; *równość zachodzi dokładnie wtedy, gdy krzywe* $f = 0$ *oraz* $g = 0$ *nie mają wspólnej stycznej.*

Równie łatwo wyprowadzamy formułę dla rzędu rugownika.

Propozycja 3.8 *Jeżeli $f(x,y) = y^n + a_1(x)y^{n-1} + \cdots + a_n(x)$ oraz $g(x,y) = y^p + b_1(x)y^{p-1} + \cdots + b_p(x)$ są wielomianami wyróżnionymi zaś $R_{f,g}(x)$ ich y-rugownikiem, to $\operatorname{ord} R_{f,g}(x) = i_0(f,g)$.*

Podamy teraz za pracą [Kałużny-Spodzieja 1994] charakteryzację aksjomatyczną krotności przecięcia.

Twierdzenie 3.9 *Niech* $I : \mathbb{K}[[x,y]] \times \mathbb{K}[[x,y]] \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ *będzie funkcją o własnościach*

(1) $I(f,g) = I(g,f)$,

(2) $I(f,g_1g_2) = I(f,g_1) + I(f,g_2)$,

(3) $I(f,g) = I(f,g+hf)$,

(4) $I(x,y) \neq 0, \infty$

Wtedy $I(f,g) = i_0(f,g)I(x,y)$.

Oczywiście własności (1) i (2) implikują

(2') $I(f_1f_2,g) = I(f_1,g) + I(f_2,g)$.

Dowód Twierdzenia 3.9 poprzedzimy lematem.

Lemat 3.10 *Jeżeli* I *jest funkcją taką jak w Twierdzeniu 3.9 to zachodzą własności:*

(5) jeśli f *lub* g *jest dzielnikiem jedynki, to* $I(f,g) = 0$,

(6) jeżeli f *i* g *mają wspólny dzielnik dodatniego rzędu, to* $I(f,g) = \infty$.

Dowód lematu. Aby sprawdzić własność *(5)* zauważmy, że stosując kolejno własności *(2')* i *(3)* otrzymujemy

$$I(x,y) = I(1,y) + I(x,y) = I(1,y+(-y)1) + I(x,y) = I(1,0) + I(x,y)$$

a następnie

$$I(1,0) + I(x,y) = I(1,g+(-g)1) + I(x,y) = I(1,g) + I(x,y).$$

Łącząc otrzymane równości dostajemy $I(x,y) = I(1,g) + I(x,y)$ a stąd $I(1,g) = 0$ bo $I(x,y) \neq 0, \infty$.

Gdy $f(0) \neq 0$ to mamy

$$0 = I(1,g) = I\left(f\left(\frac{1}{f}\right), g\right) = I\left(g, f\left(\frac{1}{f}\right)\right) = I(g,f) + I\left(g, \frac{1}{f}\right).$$

Stąd $I(g,f) = 0$ a więc także $I(f,g) = 0$.

Aby sprawdzić własność *(6)* rozważmy szereg h taki, że $h(0) = 0$. Mamy zatem $h = xh_1 + yh_2$ w $\mathbb{K}[[x,y]]$ oraz

$$I(h,0) = I(h,0\cdot x) = I(h,0) + I(h,x) = I(h,0) + I(xh_1 + yh_2, x).$$

Z własności *(1)* i*(3)* wynika, że $I(xh_1 + yh_2, x) = I(yh_2, x)$ a więc

$$\begin{aligned} I(h,0) &= I(h,0) + I(yh_2,x) = \\ &= I(h,0) + I(y,x) + I(h_2,x) = I(h,0) + I(x,y) + I(h_2,x). \end{aligned}$$

Stąd $I(h,0) = \infty$ bo $I(x,y) \neq 0, \infty$.

Przypuśćmy teraz, że f i g mają wspólny dzielnik h, $h(0) = 0$. Jest więc $f = f_1 h$, $g = g_1 h$ w $\mathbb{K}[[x, y]]$ i otrzymujemy

$$I(f, g) = I(f_1, g_1 h) + I(h, g_1 h) = I(f_1, g_1 h) + I(h, 0) = \infty.$$

Uwaga 3.11 Z własności *(5)* wynika, że $I(f, g) = I(uf, vg)$ dla dowolnych dzielników jedynki u, v.

Teraz możemy podać dowód twierdzenia.

Dowód Twierdzenia 3.9. Gdy $i_0(f, g) = \infty$ to f i g mają wspólny dzielnik dodatniego rzędu a więc $I(f, g) = \infty$ wobec własności *(6)*.

Wystarczy więc sprawdzić, że jak f, g są względnie pierwsze, to $I(f, g) = i_0(f, g)I(x, y)$. Udowodnimy tę równość przez indukcję względem $i_0(f, g)$. Gdy $i_0(f, g) = 0$ to f lub g jest dzielnikiem jedynki i wtedy $I(f, g) = 0$ na mocy własności *(5)*.

Niech $k > 0$ będzie liczbą całkowitą i załóżmy, że równość $I(f, g) = i_0(f, g)I(x, y)$ jest prawdziwa dla każdej pary f, g takiej, że $i_0(f, g) < k$. Gdy szereg f lub g jest rozkładalny to równość $I(f, g) = i_0(f, g)I(x, y)$ jest prawdziwa: stosujemy własności *(2)* oraz *(2')* funkcji I, krotności i założenie indukcyjne. Wystarczy więc rozważyć przypadek gdy f, g są nierozkładalne oraz $I(f, g) = k$. Jeżeli pewien szereg h jest nierozkładalny, to $h \sim x$ lub $h \sim y^n + a_1(x)y^{n-1} + \ldots + a_n(x)$ gdzie $y^n + a_1(x)y^{n-1} + \cdots + a_n(x)$ jest wielomianem wyróżnionym. Musimy więc rozważyć trzy przypadki:

1. $f(x, y) = x$, $g(x, y) = y^n + a_1(x)y^{n-1} + \cdots + a_n(x)$ wielomian wyróżniony. Wtedy $i_0(f, g) = n$ oraz $I(f, g) = I(x, y^n) = nI(x, y) = i_0(f, g)I(x, y)$.

2. $f(x, y) = y^n + a_1(x)y^{n-1} + \cdots + a_n(x)$, $g(x, y) = x$. Stosujemy poprzedni przypadek i symetrię funkcji I, i_0.

3. $f(x, y) = y^n + a_1(x)y^{n-1} + \cdots + a_n(x)$, $g(x, y) = y^p + b_1(x)y^{p-1} + \cdots + b_p(x)$ są wielomianami wyróżnionymi stopni $n, p > 0$. Nie zmniejszając ogólności możemy założyć, ze $p \geqslant n$. Wówczas możemy napisać $g = y^{p-n}f + xh$ w $\mathbb{K}[[x, y]]$ i w konsekwencji

   $$I(f, g) = I(f, y^{p-n}f + xh) = I(f, x) + I(f, h) = nI(x, y) + I(f, h)$$

   gdyż $I(f, x) = nI(x, y)$ na podstawie przypadku 2.
   Dla zakończenia dowodu wystarczy sprawdzić, że $I(f, h) = i_0(f, h)I(x, y)$. Gdy $h(0) = 0$ to ta nierówność wynika z założenia indukcyjnego bo jak łatwo zauważyć $i_0(f, h) < i_0(f, g) = k$. Gdy $h(0) \neq 0$ to obie strony równości są równe 0.

Jako pierwsze zastosowanie udowodnionego twierdzenia sprawdzimy własność następującą.

Propozycja 3.12 (Multyplikatywność krotności) *Niech f, g będą szeregami względnie pierwszymi bez stałego wyrazu. Wtedy dla dowolnych $\Phi, \Psi \in \mathbb{K}[[u, v]]$ mamy:*

$$i_0(\Phi(f, g), \Psi(f, g)) = i_0(\Phi, \Psi) i_0(f, g).$$

Dowód. Rozważmy funkcję I daną wzorem $I(\Phi, \Psi) = i_0(\Phi(f, g), \Psi(f, g))$. Łatwo sprawdzamy, że funkcja I spełnia warunki *(1)*, *(2)*, *(3)* i *(4)* Twierdzenia 3.9. Zatem $I(\Phi, \Psi) = i_0(\Phi, \Psi) I(u, v) = i_0(\Phi, \Psi) i_0(f, g)$.

Dla dowolnych szeregów $f, g \in \mathbb{K}[[x, y]]$ ideał (f, g) generowany przez f i g jest $\mathbb{K}$-podprzestrzenią liniową algebry $\mathbb{K}[[x, y]]$.

Twierdzenie 3.13 (Formuła Macauley' a) *Dla dowolnych $f, g \in \mathbb{K}[[x, y]]$:*

$$i_0(f, g) = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[[x, y]] / (f, g).$$

Dowód. Oznaczmy $I(f, g)$ prawą stronę powyższej równości (kowymiar ideału generowanego przez f, g). Łatwo zauważyć, że tak zdefiniowana funkcja I spełnia własności *(1)*, *(3)* i *(4)* Twierdzenia 3.9 oraz $I(x, y) = 1$. Zatem dla dowodu twierdzenia wystarczy sprawdzić własność *(2)*: $I(f, g_1 g_2) = i(f, g_1) + I(f, g_2)$. Gdy $I(f, g_1 g_2) = \infty$ to $f, g_1 g_2$ mają wspólny dzielnik pierwszy (Dodatek B). Wówczas f, g_1 lub f, g_2 mają wspólny dzielnik a więc $I(f, g_1) = \infty$ lub $I(f, g_2) = \infty$.

Załóżmy, że $I(f, g_1 g_2) < \infty$ tzn. $f, g_1 g_2$ są względnie pierwsze. Przypomnijmy następujący fakt z algebry liniowej. Gdy U, V, W są przestrzeniami $\mathbb{K}$-liniowymi takimi, że $W \subset V \subset U$ i W ma kowymiar skończony w U, to

$$\dim_{\mathbb{K}} U / W = \dim_{\mathbb{K}} U / V + \dim_{\mathbb{K}} V / W.$$

Stosując powyższą formułę do $W = (f, g_1 g_2), V = (f, g_1)$ oraz $U = \mathbb{K}[[x, y]]$ otrzymujemy formułę $I(f, g_1 g_2) = I(f, g_1) + I(f, g_2)$ gdyż $\dim_{\mathbb{K}} V / W = I(f, g_2)$.

Niech $f, g \in \mathbb{K}[[x, y]]$ będą szeregami bez stałych wyrazów. Oznaczmy $\mathbb{K}((f, g))$ ciało ułamków pierścienia $\mathbb{K}[[f, g]]$. Zatem $\mathbb{K}((f, g))$ jest podciałem ciała $\mathbb{K}((x, y))$.

Twierdzenie 3.14 (Formuła Weila) *Jeżeli szeregi bez stałych wyrazów f, g są względnie pierwsze, to*

$$i_0(f, g) = (\, \mathbb{K}((x, y)) : \mathbb{K}((f, g))\,).$$

Dowód. Na mocy Twierdzenia Palamodowa (Dodatek D) rozszerzenie $\mathbb{K}[[x, y]] \supset \mathbb{K}[[f, g]]$ jest wolnym modułem rangi $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[[x, y]] / (f, g)$. Zatem Twierdzenie 3.14 wynika z Twierdzenia 3.13 oraz następującego faktu.

Lemat 3.15 *Załóżmy, ze dziedzina A jest podpierścieniem dziedziny B takim, że rozszerzenie $B \supset A$ jest wolnym modułem rangi $m > 0$. Niech K będzie ciałem ułamków dziedziny A zaś L ciałem ułamków dziedziny B. Wtedy $(L : K) = m$.*

Dowód. Na mocy założenia istnieje ciąg $e_1, \ldots, e_n$ elementów pierścienia B taki, że każdy element $b \in B$ można zapisać jednoznacznie w postaci $b = a_1e_1 + \cdots + a_me_m$ dla pewnych $a_1, \ldots, a_m \in A$. W szczególności B jest skończonym A-modułem a więc rozszerzenie $B \supset A$ jest całkowite. Wynika stad, że dla każdego $b \in B$, $b \neq 0$ istnieje $b' \in B$ taki, że $bb' \in A \setminus \{0\}$. Istotnie, jeżeli $b \notin A$ i $b^k + a_1b^{k-1} + \cdots + a_k = 0$ jest równaniem zależności całkowitej minimalnego stopnia $k > 0$ to $a_k \neq 0$ oraz $bb' = -a_k$ dla $b' = b^{k-1} + a_1b^{k-2} + \cdots + a_{k-1}$. Zatem każdy element ciała ułamków L można zapisać w postaci $\frac{b}{a}$ gdzie $a \in A \setminus \{0\}$ i $b \in B$. Jeżeli $b = a_1e_1 + \cdots + a_me_m$ to $\frac{b}{a} = \left(\frac{a_1}{a}\right)e_1 + \cdots + \left(\frac{a_m}{a}\right)e_m$ a więc $(L : K) \leqslant m$. Równość wynika z faktu, że $e_1, \ldots, e_m$ są liniowo niezależne nad $\mathbb{K}$.

4 Twierdzenie Bezouta

Dla każdego wielomianu $F \in \mathbb{K}[x, y]$ oznaczamy przez $\deg F$ stopień wielomianu a przez F^+ jego formę wiodącą tzn. sumę jednomianów stopnia $\deg F$ występujących w F. Dla dowolnych wielomianów $F, G \in \mathbb{K}[x, y]$ oraz punktu $p = (a, b) \in \mathbb{K}^2$ przyjmujemy

$$i_p(F, G) = i_0(F(a + x, b + y), G(a + x, b + y)).$$

Zatem $i_p(F, G) > 0$ dokładnie wtedy, gdy $F(p) = G(p) = 0$.

Twierdzenie 4.1 (Afiniczne twierdzenie Bezouta) *Niech $F = F(x, y)$ i $G = G(x, y)$ będą wielomianami względnie pierwszymi stopni $m > 0$ i $n > 0$ o współczynnikach w ciele algebraicznie domkniętym $\mathbb{K}$. Wtedy:*

(i) $\displaystyle\sum_{p \in \mathbb{K}^2} i_p(F, G) \leqslant mn$,

(ii) $\displaystyle\sum_{p \in \mathbb{K}^2} i_p(F, G) = mn$ *wtedy i tylko wtedy, gdy układ $F^+ = G^+ = 0$ ma wyłącznie rozwiązanie trywialne $x = y = 0$.*

Dowód twierdzenia Bezouta opiera się na udowodnionych już własnościach krotności przecięcia oraz wykorzystuje pojęcie rugownika oraz jego związek z krotnością (Propozycja 3.8).

Propozycja 4.2 *Niech F, G będą wielomianami stopni $m, n > 0$ takimi, że $\deg_y F = m$ oraz $\deg_y G = n$. Przyjmijmy $R(x) = y$-rugownik wielomianów $F(x, y), G(x, y)$. Wówczas dla każdego $a \in \mathbb{K}$:*

(i) $\displaystyle\operatorname{ord}_a R(x) = \sum_{p \in \{a\} \times \mathbb{K}} i_p(F, G)$,

(ii) $\displaystyle\deg R(x) = \sum_{p \in \mathbb{K}^2} i_p(F, G)$.

Dowód. Formuła *(ii)* wynika z *(i)* ponieważ $\deg R(x) = \sum_{a\in\mathbb{K}} \operatorname{ord}_a R(x)$.

Aby sprawdzić *(i)* wystarczy ograniczyć się do przypadku $a = 0$ ponieważ $\operatorname{ord}_a R(x) = \operatorname{ord}_0 R(a + x)$ oraz $R(a + x)$ jest y-rugownikiem wielomianów $F(a + x, y), G(a + x, y)$. Załóżmy zatem, że $a = 0$. Gdy $\operatorname{ord}_0 R = 0$ lub ∞ sprawdzenie *(i)* jest proste. Załóżmy zatem, że $0 < \operatorname{ord}_0 R < \infty$ tzn. $R(0) = 0$ oraz $R(x) \neq 0$ w $\mathbb{K}[x]$. Niech $(0, b_1), \ldots, (0, b_s)$ będą wszystkimi (parami różnymi) rozwiązaniami układu $F(0, y) = G(0, y) = 0$. Na mocy lematu Hensela (por. [Abhyankar 1964], p. 94) mamy $F(x, y) = \prod_{i=1}^{s+1} F_i(x, y)$, $G(x, y) = \prod_{i=1}^{s+1} G_i(x, y)$ gdzie $F_i, G_i \in \mathbb{K}[[x]][y]$ są takie, że $F_i(0, y) = (y - b_i)^{m_i}$, $G_i(0, y) = (y - b_i)^{n_i}$ dla $i = 1, \ldots, s$ oraz $F_{s+1}(0, b_i)G_{s+1}(0, b_i) \neq 0$ dla $i = 1, \ldots, s$. Oznaczmy przez $R_{ij}(x)$ y-rugownik $F_i(x, y), G_j(x, y)$. Zatem $R(x) = \prod_{i,j} R_{ij}(x)$ przy czym $R_{ij}(0) \neq 0$ jeśli $i \neq j$ lub $i = j = s + 1$ gdyż $R_{ij}(0)$ jest y-rugownikiem wielomianów $F_i(0, y), G_j(0, y)$. Jest zatem $\operatorname{ord}_0 R(x) = \sum_{i=1}^{s} \operatorname{ord}_0 R_{ii}(x)$. Mamy

$$\begin{aligned}\operatorname{ord}_0 R_{ii}(x) &= \operatorname{ord}_0(y - \text{rugownik } F_i(x, y), G_i(x, y)) = \\ &= \operatorname{ord}_0(y - \text{rugownik } F_i(x, y + b_i), G_i(x, y + b_i)) = \\ &= i_{(0,0)}(F_i(x, y + b_i), G_i(x, y + b_i)) = i_{(0,b_i)}(F, G)\end{aligned}$$

a zatem $\operatorname{ord}_0 R(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{s} i_{(0,b_i)}(F, G)$ co kończy dowód.

Propozycja 4.3 *Niech $F = F(x, y)$ i $G = G(x, y)$ będą wielomianami stopni $m > 0$ i $n > 0$ takimi, że $\deg_y F = m$, $\deg_y G = n$. Przyjmijmy $R(x) = y$-rugownik $F(x, y)$ i $G(x, y)$ oraz $r = y$-rugownik $F^+(1, y)$, $G^+(1, y)$. Wtedy*

$$R(x) = rx^{mn} + \cdots + (\textit{jednomiany stopnia} < mn).$$

Dowód. Bez zmniejszenia ogólności możemy założyć, że $F = y^m + a_1(x)y^{m-1} + \cdots + a_m(x)$ oraz $G = y^n + b_1(x)y^{n-1} + \cdots + b_n(x)$ gdzie $a_i(x), b_j(x)$ są wielomianami odpowiednio stopni $\leqslant i$ oraz $\leqslant j$. Niech $R(a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n)$ będzie y-rugownikiem wielomianów $y^m + a_1y^{m-1} + \cdots + a_m$ oraz $y^n + b_1y^{n-1} + \cdots + b_n$ o zmiennych współczynnikach $a_1, \ldots, a_m$ oraz $b_1, \ldots, b_n$. Mamy wtedy $R(ta_1, \ldots, t^m a_m, tb_1, \ldots, t^n b_n) = t^{mn} R(a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n)$ (izobaryczność rugownika) a stąd

$$(*) \qquad \begin{aligned}\frac{R(x)}{x^{mn}} &= \frac{1}{x^{mn}} R(a_1(x), \ldots, a_m(x), b_1(x), \ldots, b_n(x)) = \\ &= R\left(\frac{a_1(x)}{x}, \ldots, \frac{a_m(x)}{x^m}, \frac{b_1(x)}{x}, \ldots, \frac{b_n(x)}{x^n}\right).\end{aligned}$$

Rozważmy miejsce (ang. place) ciała funkcji wymiernych $\mathbb{K}(x)$ określone przez waluację $v = -\deg$. Jest to odwzorowanie $F(x) \to F(\infty)$ ciała $\mathbb{K}(x)$ w zbiór $\hat{\mathbb{K}} = \mathbb{K} \cup \{\infty\}$ określone następująco: gdy $F(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$ gdzie $A(x) = a_0x^p + \cdots$, $B(x) = b_0x^q + \cdots$ są wielomianami stopni $p \geqslant 0$ i $q \geqslant 0$ to $F(\infty) = \frac{a_0}{b_0}$ gdy $p = q$,

$F(\infty) = 0$ gdy $p < q$ oraz $F(\infty) = \infty$ gdy $p > q$. Dalej piszemy $F(x)|_{x=\infty}$ zamiast $F(\infty)$.

Niech będzie $a_i(x) = a_{i0}x^i + \cdots$, $b_j(x) = b_{j0}x^j + \cdots$. Zatem $\frac{a_i(x)}{x^i}\Big|_{x=\infty} = a_{i0}$, $\frac{b_j(x)}{x^j}\Big|_{x=\infty} = b_{j0}$ i z równości $(*)$ wynika

$$(**) \qquad \frac{R(x)}{x^{mn}}\Big|_{x=\infty} = R(a_{10}, \ldots, a_{m0}, b_{10}, \ldots, b_{n0}) = r.$$

Stąd $R(x) = rx^{mn} + \cdots$ co należało dowieść.

Możemy teraz podać

Dowód twierdzenia Bezouta. Przyjmujemy oznaczenia wprowadzone powyżej. Suma $\sum\limits_{p\in\mathbb{K}^2} i_p(F,G)$ nie zależy od wyboru afinicznego układu współrzędnych. Możemy więc założyć, że $deg_y F = m$ oraz $\deg_y G = n$. Jest więc (Propozycja 4.2 *(ii)* oraz Propozycja 4.3) $\sum\limits_{p\in\mathbb{K}^2} = \deg R(x) \leqslant mn$ przy czym równość zachodzi dokładnie wtedy, gdy $r \neq 0$ tzn. gdy układ $F^+(1,y) = G^+(1,y) = 0$ nie ma rozwiązania. To dowodzi twierdzenia.

Dodatek

Zakładamy, że $\mathbb{K}$ jest dowolnym ciałem, niekoniecznie algebraicznie domkniętym

A. Lemat o faktoryzacji

Załóżmy, że szereg bez stałego wyrazu $f \in \mathbb{K}[[x,y]]$ spełnia warunek $\operatorname{in} f = \phi\psi$ *gdzie ϕ, ψ są formami jednorodnymi dodatnich stopni, względnie pierwszymi. Wtedy $f = gh$ w $\mathbb{K}[[x,y]]$ gdzie* $\operatorname{in} g = \phi$, $\operatorname{in} h = \psi$.

Dowód powyższego lematu opiera się na następującym fakcie:

Własność Macauleya *Jeżeli $\phi, \psi \in \mathbb{K}[x,y]$ są względnie pierwszymi formami jednorodnymi stopni $m > 0$ i $n > 0$ to każda forma jednorodna stopnia $\geqslant m+n-1$ ma postać $\alpha\phi + \beta\psi$ gdzie α, β są formami jednorodnymi.*

Dowód. Każda forma jednorodna χ stopnia $\geqslant m+n-1$ ma postać $\sum\limits_{i+j=m+n-1} \chi_{ij}x^iy^j$, wystarczy więc sprawdzić własność Macauleya dla form stopnia $m+n-1$. Niech H_k będzie przestrzenią $\mathbb{K}$-liniową form jednorodnych stopnia k. Odwzorowanie

$$H_{n-1} \times H_{m-1} \ni (\alpha, \beta) \mapsto \alpha\phi + \beta\psi \in H_{m+n-1}$$

jest odwzorowaniem liniowym przestrzeni jednakowego wymiaru $m+n$. Z faktu, ze ϕ, ψ są względnie pierwsze wynika injektywność odwzorowania. Jest więc ono surjektywne jako liniowa injekcja przestrzeni tego samego wymiaru.

Dowód lematu o faktoryzacji. Szukamy szeregów g i h jako sum form jednorodnych $g = \phi_m + \phi_{m+1} + \cdots$ oraz $h = \psi_n + \psi_{n+1} + \cdots$ gdzie $\phi_m = \phi$ oraz $\psi_n = \psi$. Równość $f = gh$ ma miejsce dokładnie wtedy, gdy spełnione są warunki

$$
\begin{aligned}
&\phi_m \psi_n = f_{m+n} \\
&\phi_{m+1}\psi_n + \phi_m \psi_{n+1} = f_{m+n+1} \\
&\phi_{m+2}\psi_n + \phi_{m+1}\psi_{n+1} + \phi_m \psi_{n+2} = f_{m+n+2} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

Stosując własność Macauleya stwierdzamy kolejno, że dla danych $\phi_m = \phi$, $\psi_n = \psi$ istnieją formy ϕ_{m+1}, ψ_{n+1} następnie ϕ_{m+2}, ψ_{n+2} etc. co dowodzi lematu o faktoryzacji.

B. Lemat o eliminacji

Niech $f, g \in \mathbb{K}[[x,y]]$ będą szeregami niezerowymi bez stałych wyrazów. Wówczas f, g są względnie pierwsze wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek

(∗) *istnieją liczby całkowite $d, d' > 0$ takie, że jednomiany x^d, $y^{d'}$ leżą w ideale (f,g) generowanym przez f i g w $\mathbb{K}[[x,y]]$.*

Dowód. Jeżeli $x^d, y^{d'} \in (f,g)$ to każdy dzielnik f i g dzieli x^d i $y^{d'}$ a więc f, g są względnie pierwsze. Załóżmy, że f i g są względnie pierwsze. Wówczas $f(0,y) \neq 0$ lub $g(0,y) \neq 0$ bo gdyby było $f(0,y) = g(0,y) = 0$ w $\mathbb{K}[[y]]$ to x byłby wspólnym czynnikiem f i g. Bez zmniejszenia ogólności możemy założyć, że $f(0,y) \neq 0$. Stosując twierdzenie przygotowawcze Weierstrassa możemy przyjąć że $f = y^n + a_1(x)y^{n-1} + \cdots + a_n(x)$ jest wielomianem wyróżnionym oraz zastępując g przez resztę z dzielenia przez f, że $g = b_0(x)y^{n-1} + \cdots + b_{n-1}(x)$. Niech $R(x)$ będzie y-rugownikiem wielomianów f, g. Ponieważ f, g są również względnie pierwsze jako elementy $\mathbb{K}[[x]][y]$ jest $R(x) \neq 0$. Oznaczmy $d = \operatorname{ord} R(x)$. Mamy $x^d \in (f,g)$ bo rugownik leży w ideale generowanym przez f i g. Podobnie sprawdzamy, że $y^{d'} \in (f,g)$ dla pewnego $d' > 0$.

C. Ideały pierwsze pierścienia $\mathbb{K}[[x,y]]$

Ideałami pierwszymi pierścienia $\mathbb{K}[[x,y]]$ są: ideał zerowy (0), ideał maksymalny $\mathcal{M} = (x,y)$ oraz ideały główne (f) generowane przez elementy pierwsze $f \in \mathbb{K}[[x,y]]$.

Dowód. Niech I będzie niezerowym ideałem pierwszym pierścienia $\mathbb{K}[[x,y]]$. Ponieważ pierścień ten jest pierścieniem z jednoznacznością rozkładu, istnieje szereg pierwszy $f \in I$. Gdy $I \neq (f)$ to istnieje szereg $g \in I$ taki, że f nie dzieli g a więc f, g są względnie pierwsze. Na mocy lematu o eliminacji jest $x^d, y^{d'} \in (f,g) \subset I$ a stąd $x, y \in I$ tzn. $I = (x,y)$ co kończy dowód.

Czytelnik zauważy, że z podanej wyżej własności wynika, że wymiar ideałowy $\mathbb{K}[[x,y]]$ jest równy 2.

D. Parametry pierścienia $\mathbb{K}[[x,y]]$

Każdy ideał I pierścienia $\mathbb{K}[[x,y]]$ jest jednocześnie $\mathbb{K}$-podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{K}[[x,y]]$ a więc ma określony kowymiar $\operatorname{codim} I = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[[x,y]]/I$. Kolejne potęgi $\mathcal{M}^k = (x^k, x^{k-1}y, \dots, xy^{k-1}, y^k)$ ideału maksymalnego mają kowymiar skończony; jest $\operatorname{codim} \mathcal{M}^k = \frac{1}{2}k(k+1)$. Łatwo zauważyć, że $\operatorname{codim} I < \infty$ dokładnie wtedy, gdy $I \supset \mathcal{M}^k$ dla pewnego $k \geqslant 0$ tzn. gdy I zawiera wszystkie jednomiany dostatecznie wysokiego stopnia. Parę f, g szeregów bez stałych wyrazów nazywamy systemem parametrów (s.p.) pierścienia $\mathbb{K}[[x,y]]$ gdy ideał (f,g) ma kowymiar skończony. Ma to miejsce dokładnie wtedy, gdy x^d, $y^{d'} \in (f,g)$ dla pewnych $d, d' > 0$. Z lematu o eliminacji wynika więc, że para f, g szeregów bez stałych wyrazów jest s.p. dokładnie wtedy, gdy szeregi f, g są względnie pierwsze.

Twierdzenie Palamodowa *Niech f, g będzie s.p. pierścienia $\mathbb{K}[[x,y]]$. Wówczas $\mathbb{K}[[x,y]]$ jest skończenie generowanym wolnym modułem nad $\mathbb{K}[[f,g]]$ rangi równej kowymiarowi ideału (f,g).*

Dowód. Oznaczmy przez m kowymiar ideału (f,g) i niech $e_1, \dots, e_m \in \mathbb{K}[[x,y]]$ będzie kobazą (f,g) a więc ciągiem takim, że obrazy szeregów e_i w algebrze ilorazowej $\mathbb{K}[[x,y]]/I$ gdzie $I = (f,g)$ tworzą jej $\mathbb{K}$-bazę. Zatem dla każdego $h \in \mathbb{K}[[x,y]]$ istnieją stałe $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{K}$ takie, że $h = c_1e_1 + \cdots + c_me_m \pmod{I}$. Oznaczmy $A_i^0(u,v) \equiv c_i$ dla $i = 1, \dots, m$. Mamy zatem

$$h = \sum_{i=1}^{m} c_ie_i + h_1f + h_2g \text{ w } \mathbb{K}[[x,y]]$$

oraz

$$h_1 \equiv \sum c_{1i}e_i \mod (f,g),$$
$$h_1 \equiv \sum c_{2i}e_i \mod (f,g).$$

Łącząc powyższe relacje dostajemy:

$$h \equiv \sum c_ie_i + \sum (c_{1i}f)e_i + \sum (c_{2i}g)e_i \mod (f,g)^2.$$

Przyjmijmy $A_i^1(u,v) = c_i + c_{1i}u + c_{2i}v$; jest więc

$$h \equiv \sum_{i=1}^{m} A_i^1(f,g)e_i \mod (f,g)^2.$$

W ten sposób indukcyjnie definiujemy ciągi wielomianów $A_i^k = A_i^k(u,v)$ $(i = 1,\dots,m,\ \ k = 0,1,\dots)$ spełniające warunki:

(1) $h \equiv \sum_{i=1}^{m} A_i^k(f,g)e_i \mod (f,g)^{k+1}$,

(2) A_i^k jest wielomianem stopnia $\leqslant k$; $A_i^{k+1} - A_i^k$ jest formą jednorodną stopnia $k+1$.

Przyjmijmy $A_i = \sum_{k\geqslant 0}(A_i^{k+1} - A_i^k) + c_i$ dla $i = 1,\dots,m$. Łatwo sprawdzić, że

$$h = \sum_{i=1}^{m} A_i(f,g)e_i.$$

Pozostaje sprawdzić, że podane przedstawienie jest jednoznaczne. Wystarczy udowodnić, że

$$\sum_{i=1}^{m} A_i(f,g)e_i = 0 \quad \Rightarrow \quad A_i(u,v) = 0 \text{ w } \mathbb{K}[[u,v]] \text{ dla } i = 1,\dots,m.$$

Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że prawdziwa jest lewa strona implikacji dla pewnych $A_i = A_i(u,v)$ ale $I = \{i : A_i(u,v) \neq 0\}$ jest niepusty. Mamy

$$\sum_{i\in I} A_i(0,0)e_i \equiv 0 \mod (f,g)$$

a więc $A_i(0,0) = 0$ dla $i \in I$. Dzieląc $A_i(u,v)$ przez dostatecznie dużą potęgę zmiennej u możemy założyć, że $r = \inf\{\operatorname{ord} A_i(0,v)\} < \infty$. Mamy $A_i(u,v) = A_i(0,v) + uq_i(u,v) = v^r c_i(v) + uq_i(u,v)$ gdzie nie wszystkie $c_i(0)$ są równe zeru.

Jest więc

$$\sum_{i=1}^{m} g^r c_i(g)e_i + \sum_{i=1}^{m} fq_i(f,g)e_i = 0$$

a stąd

$$g^r\left(\sum_{i=1}^{m} c_i(g)e_i\right) \equiv 0 \mod (f).$$

Szeregi f,g jako parametry są względnie pierwsze a więc z ostatniej relacji wynika, że

$$\sum_{i=1}^{m} c_i(g)e_i \equiv 0 \mod (f)$$

a stąd

$$\sum_{i=1}^{m} c_i(0)e_i \equiv 0 \mod (f,g)$$

a więc $c_i(0) \equiv 0$. Sprzeczność.

Literatura

[Abhyankar 1964] , *Local Analytic Geometry,* Academic Press 1964,

[Campillo 1980] , *Algebroid curves in positive characteristic,* Lecture Notes in Math. 813, Springer Verlag 1980,

[Fulton 1969] , *Algebraic Curves. An Introduction to Algebraic Geometry,* W. A. Benjamin, INC. 1969, New York,

[Kałużny-Spodzieja 1994] , *On axiomatic definition of multiplicity,* Bull. Soc. Sci Lett. Łódź 1994, 111-116,

[Łojasiewicz-Stasica 2005] , *Analiza formalna i funkcje analityczne,* Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego 2005,

[Seidenberg 1968] , *Elements of the Theory of Algebraic Curves,* Addison-Wesley 1968,

[Walker 1950] , *Algebraic curves,* Princeton University Press 1950,

[Zariski 1965] , *Studies in equisingularity I,* Am. J. of Math. 87, 507-535, 1965.

INTRODUCTION TO THE LOCAL THEORY OF ALGEBRAIC CURVES

Summary. This article is intended as a concise introduction to the local theory of plane algebraic curves. We consider the algebroid plane curves defined by formal power series of two variables with coefficients in any algebraically closed field. Using locally quadratic transformations we prove the local normalization theorem. Then we study the intersection multiplicity of algebroid curves and prove Bezout's theorem for affine plane curves.

Łódź, 8 – 12 stycznia 2007 r.