MATERIAŁY XXII KONFERENCJI SZKOLENIOWEJ Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ ZESPOLONEJ

2001 **Łódź** **str. 21**

ROZSZERZANIE BIJEKCJI ZBIORÓW SKOŃCZONYCH DO AUTOMORFIZMÓW $\mathbb{C}^n$

Tomasz Rodak (Łódź)

Celem niniejszej pracy jest elementarny dowód następującego twierdzenia

Twierdzenie. *Niech* $p_1, ..., p_m, q_1, ..., q_m \in \mathbb{C}^n$*,* $n, m \geq 2$*, będą dwoma układami punktów, takimi że* $p_i \neq p_j$*,* $q_i \neq q_j$ *dla* $i \neq j$*. Istnieje automorfizm wielomianowy* $A = (A_1, ..., A_n) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$*, że* $A(p_i) = q_i$*,* $i = 1, ..., m$ *oraz* $\deg A_j \leq (m-1)^2$ *dla* $j = 1, ..., m$*.*

Twierdzenie to jest przypadkiem szczególnym wyniku uzyskanego przez Z. Jelonka w $[J]$ uzupełnionym oszacowaniem stopnia odwzorowania. Pomysł poniższego dowodu powstał podczas lektury pracy $[RR]$.

Dowód. Zdefiniujmy rzutowania

$$\pi_k : \mathbb{C}^n \ni (z_1, ..., z_n) \mapsto z_k \in \mathbb{C}, \qquad k = 1, ..., n.$$

Bez zmniejszania ogólności rozważań możemy założyć, że rzutowania $\pi_1 | \{p_1, ..., p_m\}$, $\pi_2 | \{q_1, ..., q_m\}$ są różnowartościowe. Istnieją wielomiany interpolacyjne $f_2, ..., f_n, g$,

$h, l_1, l_3, ..., l_n \in \mathbb{C}[t]$, każdy stopnia nie większego niż $m-1$, takie że

$$f_2(\pi_1(p_i)) = -\pi_2(p_i), ..., f_n(\pi_1(p_i)) = -\pi_n(p_i),$$

$$l_1(\pi_2(q_i)) = \pi_1(q_i), \;\; l_3(\pi_2(q_i)) = \pi_3(q_i), ..., l_n(\pi_2(q_i)) = \pi_n(q_i),$$
$$g(\pi_1(p_i)) = \pi_2(q_i), \quad h(\pi_2(q_i)) = -\pi_1(p_i),$$

dla $i = 1, ..., m$. Kładąc

$$\begin{aligned}
A^1(z_1, ..., z_n) &= (z_1, z_2 + f_2(z_1), ..., z_n + f_n(z_1)),\\
A^2(z_1, ..., z_n) &= (z_1, z_2 + g(z_1), z_3, ..., z_n),\\
A^3(z_1, ..., z_n) &= (z_1 + h(z_2), z_2, ..., z_n),\\
A^4(z_1, ..., z_n) &= (z_1 + l_1(z_2), z_2, z_3 + l_3(z_2), ..., z_n + l_n(z_2)).
\end{aligned}$$

łatwo sprawdzamy, że $A := A^4 \circ A^3 \circ A^2 \circ A^1$ jest automorfizmem wielomianowym, takim że $A(p_i) = q_i$, $i = 1, ..., n$. Dla odwzorowania wielomianowego $A = (A_1, ..., A_n) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ połóżmy $\deg A = \max_{j=1,...,n} \deg A_j$. Ponieważ $\deg A^2 \circ A^1 \leq m-1$ oraz $\deg A^4 \circ A^3 \leq m-1$, więc $\deg A \leq (m-1)^2$. $\square$

Bibliografia

[J] Z. Jelonek, *The Extension of Regular and Rational Embeddings*, Math. Ann. **277** (1987), 113-120.

[RR] J. Rosay, W. Rudin, *Holomorphic maps from $\mathbb{C}^n$ to $\mathbb{C}^n$*, Trans. Amer. Math. Soc. **310** (1988), 47-86.

The Extension of Bijection of Finite Sets to Polynomial Automorphism

Summary. In this note we prove the following fact: let $p_1, ..., p_m, q_1, ..., q_m \in \mathbb{C}^n$, $n, m \geq 2$ be such that $p_i \neq p_j$, $q_i \neq q_j$, $i \neq j$. Then there exists a polynomial automorphism $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ that moves p_i to q_i for any $i = 1, ..., m$ and $\deg A \leq (m-1)^2$.

Będlewo, 8 – 12 stycznia 2001 r.