**MATERIAŁY XXIV KONFERENCJI SZKOLENIOWEJ
Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ
ZESPOLONEJ**

2003 **Łódź** **str. 35**

WYKŁADNIK ŁOJASIEWICZA GRADIENTU WEDŁUG KUO I PARUSIŃSKIEGO

Tomasz Rodak (Łódź)

Wstęp

Niech $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ będzie dowolnym szeregiem zbieżnym. Załóżmy, że

$$\operatorname{ord} f(x,y) = \operatorname{ord} f(x,0) \geqslant 2, \tag{1}$$

gdzie przez ord oznaczamy rząd szeregu.

Twierdzenie 1. *(zob. [KP] twierdzenie 3.1, [B] twierdzenie 2) Lokalny wykładnik Łojasiewicza* $\mathcal{L}_0(\operatorname{grad} f)$ *jest osiągnięty na zbiorze* $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : f'_x(x, y) = 0\}$.

Powyższe twierdzenie zostało udowodnione niezależnie przez Kuo i Parusińskiego oraz Bogusławską w pracach [KP] i [B]. Dowód w pracy [KP] opiera się na idei aproksymacji pierwiastka szeregu $f'_x(x, y)$ (por. [W]). Sam proces aproksymacji nie jest w pracy [KP] opisany szczegółowo. Celem naszym będzie dokładny opis procedury aproksymacyjnej oraz dowód jej poprawności. Jako zastosowanie podamy również dowód twierdzenia 1 oparty na tej procedurze, taki jak w [KP].

W pracy przez $\mathbb{C}[[x]]$, $\mathbb{C}[[x, y]]$, będziemy oznaczali odpowiednio pierścień szeregów formalnych jednej oraz dwóch zmiennych. Jeśli $N \in \mathbb{N}$, to przez $\mathbb{C}[[y^{1/N}]]$ będziemy rozumieli formalne podstawienie potęgi $y^{1/N}$ do każdego szeregu z $\mathbb{C}[[y]]$

(zob. [W], rozdz. IV). Wszystkie rozumowania będziemy prowadzili w pierścieniu szeregów formalnych $\mathbb{C}[[x,y]]$.

Niech $F(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y)) \in (\mathbb{C}[[x,y]])^2$, $F(0) = 0$. Przez lokalny wykładnik Łojasiewicza $\mathcal{L}_0(F)$ odwzorowania formalnego F będziemy rozumieli

$$\mathcal{L}_0(F) = \sup\Big\{\frac{\operatorname{ord} F \circ \Phi}{\operatorname{ord} \Phi} : \Phi \in (\mathbb{C}[[t]])^2 \setminus \{(0,0)\}, \operatorname{ord}\Phi > 0\Big\}. \tag{2}$$

1 Procedura aproksymacyjna

Niech $f \in \mathbb{C}[[x,y]]$ będzie dowolnym szeregiem formalnym, takim że

$$\operatorname{ord} f(x,y) = \operatorname{ord} f(x,0) = k \geqslant 1. \tag{3}$$

Weźmy dowolny szereg

$$\beta(y) = w_1 y^{n_1/N} + w_2 y^{n_2/N} + \cdots \in \mathbb{C}[[y^{1/N}]],$$

gdzie $N \leqslant n_1 < n_2 < \cdots$, $N, n_1, n_2, \ldots \in \mathbb{N}$, $w_1, w_2, \ldots \in \mathbb{C}$. Jeśli $w_1 \neq 0$, to przez $\operatorname{ord}\beta(y)$ rozumiemy liczbę n_1/N. Jeśli $\beta(y) = 0$, to przyjmujemy $\operatorname{ord}\beta(y) = \infty$.

Zdefiniujemy teraz operację przesunięcia szeregu β względem f. Grupując odpowiednio wyrazy w szeregu $f(x+\beta(y), y)$ dostajemy

$$f(x+\beta(y), y) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(y) x^i, \tag{4}$$

gdzie $a_i(y) \in \mathbb{C}[[y^{1/N}]]$, $\operatorname{ord} a_i(y) \geqslant 0$. Dla dowolnego $i \in \{0, \ldots, k\}$, takiego że $a_i(y) \neq 0$ kładziemy

$$a_i(y) = \alpha_i y^{\operatorname{ord} a_i(y)} + \text{składniki wyższych stopni.}$$

Niech

$$\gamma_\beta = \max\Big\{\frac{\operatorname{ord} a_0(y) - \operatorname{ord} a_l(y)}{l} : l \in \{1, \ldots, k\}\Big\}, \tag{5}$$

$$A_\beta = \big\{i \in \{0, \ldots, k\} : \operatorname{ord} a_i(y) + \gamma_\beta i = \operatorname{ord} a_0(y)\big\}, \tag{6}$$

$$Q_\beta(z) = \sum_{i \in A} \alpha_i z^i. \tag{7}$$

Niech c będzie dowolnym pierwiastkiem wielomianu $Q_\beta(z)$. Szereg

$$\beta_1(y) = \beta(y) + c y^{\gamma_\beta}, \tag{8}$$

nazywamy *przesunięciem szeregu β względem f*.

Odnotujmy teraz prostą własność przesunięcia szeregu β względem f.

Własność 1. *Jeśli $f(\beta(y), y) \neq 0$, to* *(a)* $1 \leqslant \gamma_\beta < \infty$,

(b) $\deg Q_\beta = \max A_\beta \geqslant 1$,

(c) istnieje $m \in \mathbb{N}$, *że* $\gamma_\beta = m/(N \max A_\beta)$.

Dowód. Z założenia i (4) wynika, że $\gamma_\beta < \infty$. Ponadto z (3) i (4) mamy $\operatorname{ord} a_k(y) = 0$. Zatem, na mocy (5), (4), (3) oraz faktu, że $\operatorname{ord} \beta(y) \geqslant 1$ dostajemy $\gamma_\beta \geqslant \operatorname{ord} a_0(y)/k = \operatorname{ord} f(\beta(y), y)/k \geqslant 1$, co daje (a).

Punkt (b) jest prostą konsekwencją wzorów (5), (6), (7).

Punkt (c) wynika z (5) oraz (6). □

Z powyższej własności wynika, że procedura przesuwania szeregu jest poprawna, gdy $f(\beta(y), y) \neq 0$ i można ją iterować.

Udowodnimy twierdzenie, że kolejne przesunięcia szeregu β względem f aproksymują pewien szereg Puiseux $\beta_\infty(y)$, taki że $f(\beta_\infty(y), y) = 0$. Dowód tego faktu poprzedzimy dwoma lematami.

Rozważmy w tym celu szereg $f(x+\beta_1(y), y)$. Grupując odpowiednio jego wyrazy dostajemy

$$f(x + \beta_1(y), y) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j(y) x^j.$$

Lemat 1. *Załóżmy, że* $f(\beta(y), y) \neq 0$ *i niech* $\beta_1(y)$ *będzie określone wzorem* (8). *Jeśli* c *jest pierwiastkiem* q*-krotnym wielomianu* $Q_\beta(z)$, *to*

(a) $\operatorname{ord} b_0(y) > \operatorname{ord} a_0(y)$,

(b) $\operatorname{ord} b_q(y) = \operatorname{ord} a_0(y) - \gamma_\beta q$,

(c) $\operatorname{ord} b_j \geqslant \operatorname{ord} a_0(y) - \gamma_\beta j$, *dla* $j \geqslant 0$.

Dowód. Dla uproszczenia oznaczeń przyjmijmy $\gamma = \gamma_\beta$, $A = A_\beta$. Zauważmy, że

$$f(x + \beta_1(y), y) = f(x + \beta(y) + cy^\gamma, y) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(y)(x + cy^\gamma)^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} a_i(y) \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} x^j c^{i-j} y^{\gamma(i-j)} = \sum_{j=0}^{\infty} \Big(\sum_{i=j}^{\infty} \binom{i}{j} a_i(y) c^{i-j} y^{\gamma(i-j)} \Big) x^j.$$

W konsekwencji

$$b_j(y) = \sum_{i=j}^{\infty} \binom{i}{j} a_i(y) c^{i-j} y^{\gamma(i-j)}, \quad j = 0, 1, \ldots. \tag{9}$$

Niech $B = \big\{ i \in \{0, 1, \ldots\} : \operatorname{ord} a_i(y) + \gamma i > \operatorname{ord} a_0(y) \big\}$. Z określenia γ mamy $A \cup B = \{0, 1, \ldots\}$ oraz $A \cap B = \emptyset$.

Zatem

$$\begin{aligned}
b_0(y) &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i(y)c^i y^{\gamma i} = \sum_{i\in A} a_i(y)c^i y^{\gamma i} + \sum_{i\in B} a_i(y)c^i y^{\gamma i} = \\
&= \sum_{i\in A} \alpha_i y^{\operatorname{ord} a_i(y)} c^i y^{\gamma i} + \sum_{i\in A}(a_i(y) - \alpha_i y^{\operatorname{ord} a_i(y)})c^i y^{\gamma i} + \sum_{i\in B} a_i(y)c^i y^{\gamma i} = \\
&= y^{\operatorname{ord} a_0(y)} Q(c) + \sum_{i\in A}(a_i(y) - \alpha_i y^{\operatorname{ord} a_i(y)})c^i y^{\gamma i} + \sum_{i\in B} a_i(y)c^i y^{\gamma i}.
\end{aligned}$$

Drugi i trzeci składnik powyższej sumy mają rzędy większe niż $\operatorname{ord} a_0(y)$, pierwszy składnik natomiast znika, gdyż $Q(c) = 0$. Zatem $\operatorname{ord} b_0(y) > \operatorname{ord} a_0(y)$, co daje (a).

Z (9) mamy

$$\begin{aligned}
b_q(y) &= \sum_{i=q}^{\infty} \binom{i}{q} a_i(y)c^{i-q} y^{\gamma(i-q)} = \\
&= \sum_{i\geqslant q, i\in A} \binom{i}{q} a_i(y)c^{i-q} y^{\gamma(i-q)} + \sum_{i\geqslant q, i\in B} \binom{i}{q} a_i(y)c^{i-q} y^{\gamma(i-q)}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Ponieważ dla $i \geqslant q$, $i \in B$,

$$\operatorname{ord} a_i(y) y^{\gamma(i-q)} = \operatorname{ord} a_i(y) + \gamma i - \gamma q > \operatorname{ord} a_0(y) - \gamma q,$$

więc rząd drugiego składnika (10) jest większy niż $\operatorname{ord} a_0(y) - \gamma q$. Podobnie, dla $i \geqslant q$, $i \in A$,

$$\operatorname{ord} a_i(y) y^{\gamma(i-q)} = \operatorname{ord} a_i(y) + \gamma i - \gamma q = \operatorname{ord} a_0(y) - \gamma q,$$

więc rząd pierwszego składnika w (10) wynosi co najmniej $\operatorname{ord} a_0(y) - \gamma q$. Wystarczy zatem wykazać, że rząd pierwszego składnika w (10) jest równy $\operatorname{ord} a_0(y) - \gamma q$ aby zakończyć dowód (b). W tym celu zauważmy, że z własności 1 (b), $\{i \geqslant q : i \in A\} \neq \emptyset$ oraz

$$\begin{aligned}
&\sum_{i\geqslant q, i\in A} \binom{i}{q} \alpha_i y^{\operatorname{ord} a_i(y)} c^{i-q} y^{\gamma(i-q)} = \\
&y^{\operatorname{ord} a_0(y) - \gamma q} \frac{1}{q!} \sum_{i\geqslant q, i\in A} i(i-1)\cdots(i-q+1)\alpha_i c^{i-q} = y^{\operatorname{ord} a_0(y) - \gamma q} \frac{1}{q!} Q^{(q)}(c).
\end{aligned}$$

Z określenia q mamy $Q^{(q)}(c) \neq 0$. To daje (b).

Na mocy (9) i (5) mamy

$$\operatorname{ord} b_j(y) \geqslant \min_{i=j}^{\infty} \bigl(\operatorname{ord} a_i(y) + \gamma i - \gamma j\bigr) \geqslant \operatorname{ord} a_0(y) - \gamma j.$$

To daje (c) i kończy dowód. $\square$

Z (8) i własności 1 punkt (a), $\operatorname{ord}\beta_1(y) \geqslant 1$, więc przy założeniu $f(\beta_1(y), y) \neq 0$, możemy zdefiniować

$$\gamma_{\beta_1} = \max\Big\{\frac{\operatorname{ord} b_0(y) - \operatorname{ord} b_l(y)}{l} : l \in \{1, \dots, k\}\Big\},$$
$$A_{\beta_1} = \big\{i \in \{0, \dots, k\} : \operatorname{ord} b_i(y) + \gamma_{\beta_1} i = \operatorname{ord} b_0(y)\big\},$$
$$Q_{\beta_1}(z) = \sum_{i \in A_{\beta_1}} \xi_i z^i,$$

gdzie dla $i \in \{0, \dots, k\}$ jeśli $b_i(y) \neq 0$, to

$$b_i(y) = \xi_i y^{\operatorname{ord} b_i} + \text{składniki wyższych stopni.}$$

Z lematu 1 dostajemy

Lemat 2. *Jeśli q jest krotnością pierwiastka c wielomianu $Q_\beta(z)$, to* $\deg Q_{\beta_1} = \max A_{\beta_1} \leqslant q$.

Dowód. Pierwsza równość jest konsekwencją własności 1, (b).

Oznaczmy $l = \max A_{\beta_1}$. Przypuśćmy przeciwnie, że $l > q$. Połóżmy

$$\begin{aligned} g(u) &= -\gamma_\beta u + \operatorname{ord} a_0(y) \\ h(u) &= -\gamma_{\beta_1} u + \operatorname{ord} b_0(y). \end{aligned} \tag{11}$$

Z lematu 1, (a) dostajemy $g(0) = \operatorname{ord} a_0(y) < \operatorname{ord} b_0(y) = h(0)$. Z lematu 1 (c) i określenia l mamy $\operatorname{ord} b_l(y) \geqslant \operatorname{ord} a_0(y) - \gamma_\beta l$ i $\operatorname{ord} b_l(y) = h(l)$. W konsekwencji $g(l) \leqslant h(l)$. Stąd i z nierówności $0 < q < l$ mamy $g(q) < h(q)$. Zatem, na mocy punktu (b) lematu 1 mamy $\operatorname{ord} b_q(y) = -\gamma_\beta q + \operatorname{ord} a_0(y) = g(q) < h(q) = -\gamma_{\beta_1} q + \operatorname{ord} b_0(y)$. Sprzeczność z określeniem γ_{β_1}. □

Zdefiniujemy teraz ciąg kolejnych przesunięć szeregu β względem f. Niech $f \in \mathbb{C}[[x, y]]$ będzie dowolnym szeregiem formalnym spełniającym (3). Niech $\beta(y) \in \mathbb{C}[[y^{1/N}]]$, $N \in \mathbb{N}$ będzie szeregiem rzędu co najmniej jeden. Kładziemy $\beta_0(y) = \beta(y)$. Załóżmy, że zdefiniowaliśmy już szeregi $\beta_0, \dots, \beta_{n-1}$. Jeśli $f(\beta_{n-1}(y), y) = 0$, to kładziemy $\beta_j = \beta_{n-1}$ dla $j \geqslant n$ oraz $\beta_\infty = \beta_{n-1}$. Jeśli $f(\beta_{n-1}(y), y) \neq 0$, to β_n definiujemy jako przesunięcie szeregu β_{n-1} względem f. Tak uzyskany ciąg $(\beta_n(y))_{n \geqslant 0}$ nazywamy *ciągiem przesunięć szeregu $\beta(y)$ względem f.*

Zauważmy, że ciąg ten nie musi być wyznaczony jednoznacznie, zależy on bowiem od wyboru pierwiastków kolejnych wielomianów $Q_{\beta_n}(z)$.

Twierdzenie 2 (Newtona – Puiseux)**.** *(por. [W]) Istnieje $M \in \mathbb{N}$ oraz szereg $\beta_\infty(y) \in \mathbb{C}[[y^{1/M}]]$, że*

(a) $\beta_n(y) \in \mathbb{C}[[y^{1/M}]]$,

(b) $\lim_{n\to\infty} \operatorname{ord} f(\beta_n(y), y) = \infty$,

(c) $\lim_{n\to\infty} \operatorname{ord}\big(\beta_\infty(y) - \beta_n(y)\big) = \infty$,

(d) $f(\beta_\infty(y), y) = 0$.

Dowód. Twierdzenie wystarczy udowodnić w przypadku, gdy dla każdego $n \geqslant 0$, $f(\beta_n(y), y) \neq 0$. Wtedy z definicji przesunięcia i własności 1, dla $n \geqslant 0$, $\beta_{n+1}(y) = \beta_n(y) + c_n y^{\gamma_{\beta_n}}$, $c_n \in \mathbb{C}$, $\gamma_{\beta_n} \in \mathbb{Q}$ i γ_{β_n} można zapisać jako ułamek o liczniku naturalnym i mianowniku równym $N \max A_{\beta_0} \cdots \max A_{\beta_n}$. Z lematu 2 wynika, że ciąg $(\max A_{\beta_n})_{n \geqslant 0}$ jest ciągiem nierosnącym liczb naturalnych. Istnieje zatem $n_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, że dla $n \geqslant n_0$ zachodzi równość $\max A_{\beta_n} = \max A_{\beta_{n_0}} = p_0$. Stąd, na mocy lematu 2, krotność pierwiastka c_n, dla $n \geqslant n_0$, wynosi $\deg Q_{\beta_n} = p_0$, czyli wielomian Q_{β_n} jest postaci $\mathrm{const}(z - c_n)^{p_0}$. Z postaci tej i określenia γ_{β_n} mamy

$$\gamma_{\beta_n} = \operatorname{ord} f(\beta_n(y), y) - \operatorname{ord} f'_x(\beta_n(y), y), \quad n \geqslant n_0.$$

Korzystając z powyższej równości łatwą indukcją sprawdzamy, że wszystkie liczby γ_{β_n}, dla $n \geqslant n_0$, można zapisać jako ułamki o licznikach naturalnych i mianownikach równych $M = N \max A_{\beta_0} \cdots \max A_{\beta_{n_0 - 1}}$. To kończy dowód punktu (a).

Ponieważ $\beta_n(y) \in \mathbb{C}[[y^{1/M}]]$, więc $f(\beta_n(y), y) \in \mathbb{C}[[y^{1/M}]]$. Stąd i z lematu 1 (a) mamy $\lim_{n\to\infty} \operatorname{ord} f(\beta_n(y), y) = \infty$, co daje (b).

Z określenia γ_{β_n} i (3) mamy $\gamma_{\beta_n} \geqslant \operatorname{ord} f(\beta_n(y), y)/k$. Stąd i z (b), $\lim_{n\to\infty} \gamma_{\beta_n} = \infty$. Zatem kładąc $\beta_\infty(y) = \beta_0(y) + \sum_{n=0}^{\infty} c_n y^{\gamma_{\beta_n}}$ łatwo sprawdzamy, że $\beta_\infty(y) \in \mathbb{C}[[y^{1/M}]]$ oraz $\lim_{n\to\infty} \operatorname{ord}\big(\beta_\infty(y) - \beta_n(y)\big) = \infty$. To daje (c).

Dla dowodu (d) zauważmy, że

$$\operatorname{ord}\big(f(\beta_n(y), y) - f(\beta_\infty(y), y)\big) \geqslant \operatorname{ord}\big(\beta_n(y) - \beta_\infty(y)\big).$$

Stąd i z (c) dostajemy $\lim_{n\to\infty} \operatorname{ord}\big(f(\beta_n(y), y) - f(\beta_\infty(y), y)\big) = \infty$. W konsekwencji, na mocy (b) mamy $f(\beta_\infty(y), y) = 0$. To daje (d) i kończy dowód. □

2 Dowód twierdzenia 1

W paragrafie tym będziemy zakładali, że $f \in \mathbb{C}[[x, y]]$ jest dowolnym szeregiem formalnym spełniającym (1).

Niech $\beta(y) \in \mathbb{C}[[y^{1/N}]]$, gdzie $N \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że $\operatorname{ord} \beta(y) \geqslant 1$ i $f'_x(\beta(y), y) \neq 0$. Niech $\beta_1(y) = \beta(y) + cy^\gamma$ będzie przesunięciem szeregu $\beta(y)$ względem $f'_x(x, y)$. Oznaczmy

$$\begin{aligned} f(x + \beta(y), y) &= \sum_{i=0}^{\infty} h_i(y) x^i \\ f(x + \beta_1(y), y) &= \sum_{i=0}^{\infty} \eta_i(y) x^i. \end{aligned} \tag{12}$$

Lemat 3. *Zachodzą następujące nierówności*

$$\operatorname{ord} \eta_1(y) > \operatorname{ord} h_1(y), \qquad \operatorname{ord} \eta_0(y) \geqslant \min\{\operatorname{ord} h_0(y), \operatorname{ord} h_1(y) + \gamma\}.$$

Dowód. Z (12) mamy

$$f'_x(x+\beta(y),y) = \sum_{i=1}^{\infty} ih_i(y)x^{i-1}. \tag{13}$$

Stąd i z definicji γ łatwo pokazujemy, że

$$\operatorname{ord} h_i(y) + \gamma(i-1) \geqslant \operatorname{ord} h_1(y) \qquad \text{dla} \qquad i \geqslant 1. \tag{14}$$

Ponadto

$$f'_x(x+\beta_1(y),y) = \sum_{i=1}^{\infty} ih_i(y)(x+cy^{\gamma})^{i-1} = \sum_{i=1}^{\infty} ih_i(y)c^{i-1}y^{\gamma(i-1)} + g(x,y),$$

gdzie $g(0,y)=0$. Stąd, z (13) oraz lematu 1 (a),

$$\operatorname{ord}\Big(\sum_{i=1}^{\infty} ih_i(y)c^{i-1}y^{\gamma(i-1)}\Big) > \operatorname{ord} h_1(y). \tag{15}$$

Z drugiej strony ze wzorów (12) dostajemy

$$f(x+\beta_1(y),y) = \sum_{i=0}^{\infty} h_i(y)(x+cy^{\gamma})^i = \sum_{j=0}^{\infty}\Big(\sum_{i=j}^{\infty}\binom{i}{j} h_i(y)c^{i-j}y^{\gamma(i-j)}\Big)x^j.$$

W konsekwencji

$$\begin{aligned} \eta_0(y) &= \sum_{i=0}^{\infty} h_i(y)c^i y^{\gamma i}, \\ \eta_1(y) &= \sum_{i=1}^{\infty} ih_i(y)c^{i-1}y^{\gamma(i-1)}. \end{aligned} \tag{16}$$

Stąd i z (15) $\operatorname{ord}\eta_1(y) > \operatorname{ord} h_1(y)$. Z (16) i (14),

$$\operatorname{ord}\eta_0(y) \geqslant \min\big\{\operatorname{ord} h_0(y), \min_{i=1}^{\infty}(\operatorname{ord} h_i(y)+\gamma i)\big\} \geqslant \min\{\operatorname{ord} h_0(y), \operatorname{ord} h_1(y)+\gamma\}.$$

To kończy dowód. □

Niech $\Phi(t) = (\varphi(t), t^N) \in \big(\mathbb{C}[[t]]\big)^2$, $N \geqslant 1$, $\operatorname{ord}\varphi(t) \geqslant N$. Połóżmy $\beta(y) = \varphi(y^{1/N})$. Oczywiście $\beta(y) \in \mathbb{C}[[y^{1/N}]]$ oraz $\operatorname{ord}\beta(y) \geqslant 1$. Niech $F(x,y) = f(x+\beta(y),y)$. Podobnie jak w poprzednim paragrafie, grupując odpowiednio wyrazy możemy napisać

$$F(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(y)x^i, \tag{17}$$

gdzie $a_i(y) \in \mathbb{C}[[y^{1/N}]]$.

Lemat 4. *Przy powyższych oznaczeniach i założeniach mamy*

$$\frac{\operatorname{ord}\operatorname{grad} f\circ\Phi}{\operatorname{ord}\Phi} = \operatorname{ord}\operatorname{grad} f(\beta(y),y) = \min\{\operatorname{ord} a_0(y)-1, \operatorname{ord} a_1(y)\}.$$

Dowód. Pierwsza równość jest oczywista. Dla dowodu drugiej równości zauważmy, że

$$\begin{aligned} F'_x(x,y) =& f'_x(x+\beta(y),y) \\ F'_y(x,y) =& f'_x(x+\beta(y),y)\beta'(y) + f'_y(x+\beta(y),y). \end{aligned}$$

W konsekwencji

$$\begin{aligned} F'_x(0,y) =& f'_x(\beta(y),y) \\ F'_y(0,y) =& f'_x(\beta(y),y)\beta'(y) + f'_y(\beta(y),y). \end{aligned} \tag{18}$$

Zatem

$$\begin{aligned} &\min\{\operatorname{ord} F'_x(0,y), \operatorname{ord} F'_y(0,y)\} \geqslant \\ &\geqslant \min\big\{\operatorname{ord} f'_x(\beta(y),y), \min\{\operatorname{ord} f'_x(\beta(y),y), \operatorname{ord} f'_y(\beta(y),y)\}\big\} = \\ &= \operatorname{ord}\operatorname{grad} f(\beta(y),y). \end{aligned}$$

Z drugiej strony, na mocy (18),

$$\begin{aligned} \operatorname{ord}\operatorname{grad} f(\beta(y),y) &= \min\big\{\operatorname{ord} F'_x(0,y), \operatorname{ord}(F'_y(0,y) - F'_x(0,y)\beta'(y))\big\} \geqslant \\ &\geqslant \min\{\operatorname{ord} F'_x(0,y), \operatorname{ord} F'_y(0,y)\}. \end{aligned}$$

Ostatecznie $\operatorname{ord}\operatorname{grad} f(\beta(y),y) = \min\{\operatorname{ord} F'_x(0,y), \operatorname{ord} F'_y(0,y)\}$. Ale na podstawie (17) mamy

$$\operatorname{ord} F'_x(0,y) = \operatorname{ord} a_1(y), \qquad \operatorname{ord} F'_y(0,y) = \operatorname{ord} a_0(y) - 1.$$

To kończy dowód. □

Niech $\beta(y)$ będzie określone jak w lemacie 4 i niech $\beta_1(y) = \beta(y) + cy^\gamma$ będzie przesunięciem szeregu $\beta(y)$ względem $f'_x(x,y)$.

Lemat 5. *Jeśli* $f'_x(\beta(y),y) \neq 0$*, to*

$$\operatorname{ord}\operatorname{grad} f(\beta(y),y) \leqslant \operatorname{ord}\operatorname{grad} f(\beta_1(y),y).$$

Dowód. Na mocy lematu 4 mamy

$$\begin{aligned} \operatorname{ord}\operatorname{grad} f(\beta(y),y) &= \min\{\operatorname{ord} h_0(y)-1, \operatorname{ord} h_1(y)\} \\ \operatorname{ord}\operatorname{grad} f(\beta_1(y),y) &= \min\{\operatorname{ord} \eta_0(y)-1, \operatorname{ord} \eta_1(y)\}. \end{aligned} \tag{19}$$

Z drugiej strony z lematu 3 i nierówności $\gamma \geqslant 1$ dostajemy

$$\begin{aligned}&\min\{\operatorname{ord}\eta_0(y)-1,\operatorname{ord}\eta_1(y)\}\geqslant\\ &\geqslant \min\bigl\{\min\{\operatorname{ord}h_0(y)-1,\operatorname{ord}h_1(y)+\gamma-1\},\operatorname{ord}h_1(y)\bigr\}\geqslant\\ &\geqslant \min\bigl\{\min\{\operatorname{ord}h_0(y)-1,\operatorname{ord}h_1(y)\},\operatorname{ord}h_1(y)\bigr\}=\min\{\operatorname{ord}h_0(y)-1,\operatorname{ord}h_1(y)\}.\end{aligned}$$

Stąd i z (19) dostajemy tezę. □

Dowód twierdzenia 1. Z założenia $\operatorname{ord} f(x,y) = \operatorname{ord} f(x,0)$ i z (2) łatwo dostajemy, że

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}_0(\operatorname{grad} f)=\\ &=\sup\Bigl\{\frac{\operatorname{ord}\operatorname{grad} f(\varphi(t),t^N)}{N}: N\in\mathbb{N},\varphi\in\mathbb{C}[[t]],\operatorname{ord}\varphi(t)\geqslant N\Bigr\}=\\ &=\sup\Bigl\{\operatorname{ord}\operatorname{grad} f(\beta(y),y):\beta(y)\in\mathbb{C}[[y^{1/N}]],N\in\mathbb{N},\operatorname{ord}\beta(y)\geqslant 1\Bigr\}.\end{aligned}\tag{20}$$

Weźmy dowolny szereg $\beta(y) \in \mathbb{C}[[y^{1/N}]]$, $N \in \mathbb{N}$, taki że $\operatorname{ord}\beta(y) \geqslant 1$. Oznaczmy przez $(\beta_n(y))_{n\geqslant 0}$ ciąg przesunięć szeregu $\beta(y)$ względem $f'_x(x,y)$. Z twierdzenia 2 wynika że istnieje liczba naturalna M oraz szereg $\beta_\infty(y) \in \mathbb{C}[[y^{1/M}]]$, taki że

(i) $f'_x(\beta_\infty(y),y) = 0$,
(ii) $\lim_{n\to\infty} \operatorname{ord}(\beta_n(y) - \beta_\infty(y)) = \infty$,
(iii) $\lim_{n\to\infty} \operatorname{ord} f'_x(\beta_n(y),y) = \infty$.
(iv) $\beta_n(y) \in \mathbb{C}[[y^{1/M}]]$,

Ponadto z lematu 5 mamy

(v) ciąg $(\operatorname{ord}\operatorname{grad} f(\beta_n(y),y))_{n\geqslant 0}$ jest niemalejący.

Ponieważ $\operatorname{ord}\beta_n(y) \geqslant 1$ dla $n \geqslant 0$, więc na mocy (ii) $\operatorname{ord}\beta_\infty(y) \geqslant 1$. Zatem, w świetle równości (20), wystarczy wykazać, że

$$\operatorname{ord}\operatorname{grad} f(\beta(y),y) \leqslant \operatorname{ord}\operatorname{grad} f(\beta_\infty(y),y).\tag{21}$$

Zauważmy, że

$$\operatorname{ord}\bigl(f'_y(\beta_n(y),y) - f'_y(\beta_\infty(y),y)\bigr) \geqslant \operatorname{ord}\bigl(\beta_n(y) - \beta_\infty(y)\bigr)\tag{22}$$

Z (iii), (iv) oraz (v) mamy $\operatorname{ord} f'_y(\beta_n(y),y) \to \infty$ lub istnieje $n_0 \geqslant 0$ i $L_0 \in \mathbb{R}$, że $\operatorname{ord} f'_y(\beta_n(y),y) = L_0$ dla każdego $n \geqslant n_0$.

Jeśli zachodzi pierwsza możliwość, to z (ii) oraz (22), $f'_y(\beta_\infty(y),y) = 0$. Stąd i z (i), $\operatorname{ord}\operatorname{grad} f(\beta_\infty(y),y) = \infty$. To daje (21).

Jeśli zachodzi druga możliwość, to z (iii) wynika, że $\operatorname{ord}\operatorname{grad} f(\beta_n(y),y) = L_0$ dla dostatecznie dużych n. Stąd z (v) oraz z faktu, że $\beta(y) = \beta_0(y)$ dostajemy nierówność $\operatorname{ord}\operatorname{grad} f(\beta(y),y) \leqslant L_0$. Z drugiej strony z (22) oraz (ii) mamy $\operatorname{ord} f'_y(\beta_\infty(y),y) = L_0$. To oraz (i) daje (21) i kończy dowód. □

Bibliografia

[B] M. Bogusławska, *On the Łojasiewicz exponent of the gradient of holomorphic functions*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 47 (1999), 337 – 343.

[KP] T. C. Kuo, A. Parusiński, *Newton polygon relative to an arc*, Real and Complex singularieties, Chapman & Hall, 1998, 76 – 93.

[W] R. Walker, *Algebraic Curves*, Springer-Verlag, 1950.

The Łojasiewicz exponent of a gradient
by Kuo and Parusiński

Summary. In this article we give the Kuo and Parusiński proof of the following theorem: if $f(x,y) \in \mathbb{C}[[x,y]]$, $\operatorname{ord} f = \operatorname{ord} f(x,0) \geqslant 2$ then the local Łojasiewicz exponent $\mathcal{L}_0(\operatorname{grad} f)$ of the gradient f is attained on the curve $f'_x(x,y) = 0$. The proof is based on the Newton algorithm of finding a root of a power series.

Łódź, 6 – 10 stycznia 2003 r.