MATERIAŁY XXV KONFERENCJI SZKOLENIOWEJ
Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ
ZESPOLONEJ

2004 **Łódź** **str. 27**

O PEWNYM TWIERDZENIU KUO I PARUSIŃSKIEGO

Tomasz Rodak (Łódź)

1 Wstęp

Niech $f \in \mathbb{C}[x, y]$ będzie wielomianem postaci

$$f(x, y) = y^k + w_1(x)y^{k-1} + \cdots + w_k(x), \ \deg f = k, \ k \geqslant 2, \tag{1}$$

gdzie $\deg f$ jest stopniem wielomianu f. Symbolem $\mathcal{L}_{\infty,\lambda}(f)$, dla $\lambda \in \mathbb{C}$, oznaczmy wykładnik Łojasiewicza w nieskończoności wielomianu f przy poziomicy $f^{-1}(\lambda)$ (zob. punkt 2). Celem artykułu jest dowód poniższego twierdzenia Kuo i Parusiński. Dowód przytaczamy według [KP].

Twierdzenie 1. *Jeśli istnieje liczba $\lambda \in \mathbb{C}$, że $\mathcal{L}_{\infty,\lambda}(f) = 0$, to wielomian f jest postaci $g(y - \xi x)$, gdzie $\xi \in \mathbb{C}$ i $g \in \mathbb{C}[t]$.*

Twierdzenie 1 stanowi uzupełnienie znanego twierdzenia Ha, które mówi, że funkcja $\mathbb{C} \ni \lambda \mapsto \mathcal{L}_{\infty,\lambda}(f) \in \mathbb{R}$ nie przyjmuje wartości z przedziału $[-1, 0)$ (zob. [H]). Mianowicie, jeśli f nie jest wielomianem postaci $g(y - \xi x)$, gdzie $\xi \in \mathbb{C}$ i $g \in \mathbb{C}[t]$, to następujące warunki są równoważne:

(a) $\mathcal{L}_{\infty,\lambda}(f) \leqslant 0$,
(b) $\mathcal{L}_{\infty,\lambda}(f) < 0$,
(c) $\mathcal{L}_{\infty,\lambda}(f) < -1$.

W dowodzie twierdzenia 1 stosujemy jeden krok z algorytmu Newtona aproksymacji pierwiastka wielomianu $f'_y(x,y)$. Idea ta w przypadku lokalnym była opisywana między innymi w [C], [KP], [L] i [R].

Inny dowód twierdzenia 1 został podany przez Gwoździewicza i Płoskiego (zob. [GP]).

2 Pojęcia pomocnicze

W artykule symbolem $\mathcal{M}\{x\}$ oznaczamy ciało kiełków funkcji meromorficznych w nieskończoności, tzn. szeregów Laurenta postaci

$$\varphi(x) = a_p x^p + \cdots + a_1 x + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{-n} x^{-n},\ p \in \mathbb{N},$$

zbieżnych w pewnym sąsiedztwie punktu $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$. Jeśli $\varphi(x) \neq 0$, to przez stopień $\deg \varphi(x)$ rozumiemy $\sup\{i : a_i \neq 0\}$. Jeśli $\varphi(x) = 0$, to przyjmujemy $\deg \varphi(x) = -\infty$. Parę szeregów $\Phi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x)) \in \mathcal{M}\{x\} \times \mathcal{M}\{x\}$, nazywamy odwzorowaniem meromorficznym w nieskończoności. Stopień odwzorowania $\Phi(x)$ definiujemy jako $\deg \Phi = \max(\deg \varphi_1, \deg \varphi_2)$. Symbolem $\mathcal{M}\{x\}^*$ oznaczamy ciało zbieżnych szeregów Puiseux w nieskończoności, tzn. $\mathcal{M}\{x\}^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}\{x^{1/n}\}$. Stopień szeregu $\beta(x) \in \mathcal{M}\{x\}^*$ definiujemy wzorem $\deg \beta(x) = (1/n) \deg \varphi$, gdzie $\beta(x) = \varphi(x^{1/n})$, $\varphi(x) \in \mathcal{M}\{x\}$.

Ha (zob. [H]) oraz Chądzyński i Krasiński (zob. [ChK]) podali dwie definicje wykładnika Łojasiewicza w nieskończoności wielomianu f w pobliżu poziomicy. Chądzyński i Krasiński wykazali, że w przypadku dwóch zmiennych definicję te są równoważne (zob. [ChK]). W tym artykule będziemy stosowali definicję z pracy [ChK].

Niech $\lambda \in \mathbb{C}$. Wykładnikiem Łojasiewicza w nieskończoności wielomianu f w pobliżu poziomicy $f^{-1}(\lambda)$ nazywamy liczbę

$$\mathcal{L}_{\infty,\lambda}(f) = \inf_{\Phi} \frac{\deg \operatorname{grad} f \circ \Phi}{\deg \Phi}, \tag{2}$$

gdzie kres dolny brany jest ze względu na wszystkie odwzorowania Φ meromorficzne w nieskończoności, takie że $\deg \Phi > 0$ i $\deg(f \circ \Phi - \lambda) < 0$. W [ChK] wykazano, że kres dolny w (2) jest osiągnięty.

3 Dogodne przesunięcie względem wielomianu

Niech $\beta(x) \in \mathcal{M}\{x\}^*$, będzie dowolnym szeregiem, takim że $\deg \beta \leqslant 1$ i $f(x, \beta(x)) \neq 0$. Zdefiniujemy operację dogodnego przesunięcia szeregu $\beta(x)$ względem f. W tym celu zapiszmy szereg $f(x, y+\beta(x))$ w postaci

(3) $$f(x, y+\beta(x)) = \sum_{i=0}^{k} a_i(x) y^i,$$

gdzie $a_i(x) \in \mathcal{M}\{x\}^*$. Niech

$$\vartheta(\beta, f) = \min\Big\{ \frac{\deg a_0(x) - \deg a_l(x)}{l} : l \in \{1, \dots, k\} \Big\},$$

Dla każdego $i \in \{0, \dots, k\}$, takiego że $a_i(x) \neq 0$ kładziemy

$$a_i(x) = \alpha_i x^{\deg a_i(x)} + \text{składniki niższych stopni.}$$

Niech

$$Q_\beta(z) = \sum_{i \in A_\beta} \alpha_i z^i,$$

gdzie

$$A_\beta = \big\{ i \in \{0, \dots, k\} : \deg a_i(x) + \vartheta(\beta, f) i = \deg a_0(x) \big\}.$$

Niech c będzie dowolnym pierwiastkiem wielomianu $Q_\beta(z)$. Szereg

(4) $$\gamma(x) = \beta(x) + c x^{\vartheta(\beta, f)},$$

nazywamy *dogodnym przesunięciem szeregu $\beta(x)$ względem f.*

Lemat 1. *Jeśli $\gamma(x)$ jest dogodnym przesunięciem szeregu $\beta(x)$ względem f, to* $\deg f(x, \gamma(x)) < \deg f(x, \beta(x))$.

Dowód. W dowodzie dla uproszczenia oznaczeń przyjmijmy $Q = Q_\beta$, $A = A_\beta$, $\vartheta = \vartheta(\beta, f)$.

Niech $B = \big\{ i \in \{0, 1, \dots, k\} : \deg a_i(x) + \vartheta i < \deg a_0(x) \big\}$. Z określenia ϑ mamy $A \cup B = \{0, 1, \dots, k\}$. Ponadto oczywiście $A \cap B = \emptyset$. Z (3) i (4) mamy

$$\begin{aligned} f(x, \gamma(x)) &= \sum_{i=0}^{k} a_i(x) c^i x^{\vartheta i} = \sum_{i \in A} a_i(x) c^i x^{\vartheta i} + \sum_{i \in B} a_i(x) c^i x^{\vartheta i} = \\ &= \sum_{i \in A} \alpha_i x^{\deg a_i(x)} c^i x^{\vartheta i} + \sum_{i \in A} (a_i(x) - \alpha_i x^{\deg a_i(x)}) c^i x^{\vartheta i} + \sum_{i \in B} a_i(x) c^i x^{\vartheta i} = \\ &= x^{\deg a_0(x)} Q(c) + \sum_{i \in A} (a_i(x) - \alpha_i x^{\deg a_i(x)}) c^i x^{\vartheta i} + \sum_{i \in B} a_i(x) c^i x^{\vartheta i}. \end{aligned}$$

Drugi i trzeci składnik powyższej sumy mają stopnie mniejsze od $\deg a_0(x)$, pierwszy składnik natomiast znika, gdyż $Q(c) = 0$. Zatem $\deg f(x, \gamma(x)) < \deg a_0(x) = \deg f(x, \beta(x))$. To kończy dowód. $\square$

4 Dowód twierdzenia 1

Podamy najpierw lemat odgrywający kluczową rolę w dowodzie twierdzenia 1.

Lemat 2. *(zob.* [KP]*, lematy 3.4, 3.5) Załóżmy, że f nie jest wielomianem postaci $g(y-\xi x)$, gdzie $\xi \in \mathbb{C}$ i $g \in \mathbb{C}[t]$ jest wielomianem jednej zmiennej. Niech $\beta(x) \in \mathcal{M}\{x\}^*$, $\deg \beta(x) \leqslant 1$ i niech $\gamma(x) = \beta(x) + cx^{\vartheta(\beta, f'_y)}$ będzie dogodnym przesunięciem szeregu $\beta(x)$ względem f'_y. Jeśli $\deg f(x, \beta(x)) < 0$ i $\deg f'_y(x, \beta(x)) \leqslant 0$, to $\deg f(x, \gamma(x)) < 0$.*

Dowód. Łatwo sprawdzić, że z założeń lematu wynika, iż $k \geqslant 3$. Połóżmy $f(x, y + \beta(x)) = \sum_{j=0}^{k} u_j(x) y^j$. Zauważmy, że $f(x, \gamma(x)) = \sum_{i=0}^{k} u_i(x) c^i x^{i\vartheta(\beta, f'_y)}$. Z określenia $\vartheta(\beta, f'_y)$ mamy

$$\vartheta(\beta, f'_y) \leqslant \frac{\deg u_1(x) - \deg u_i(x)}{i-1}, \qquad \text{dla} \quad i \in \{2, \ldots, k\}. \tag{5}$$

W konsekwencji

$$\begin{aligned} \deg f(x, \gamma(x)) &\leqslant \max\bigl\{\deg u_0(x), \max_{i=1}^{k}\{\deg u_i(x) + i\vartheta(\beta, f'_y)\}\bigr\} \leqslant \\ &\leqslant \max\{\deg u_0(x), \deg u_1(x) + \vartheta(\beta, f'_y)\}. \end{aligned} \tag{6}$$

Mamy $u_0(x) = f(x, \beta(x))$, $u_1(x) = f'_y(x, \beta(x))$. Stąd i z założeń dostajemy $\deg u_0(x) < 0$, $\deg u_1(x) \leqslant 0$. Wystarczy zatem, na mocy (6), wykazać, że $\vartheta(\beta, f'_y) < 0$. W tym celu zauważmy, że $\max_{j=2}^{k} \deg u_j(x) > 0$. Przypuśćmy przeciwnie, że $\deg u_j(x) \leqslant 0$, $j = 2, \ldots, k$. Niech $\beta(x) = \varphi(x) + \psi(x)$, gdzie $\varphi(x)$ zawiera tylko składniki o wykładnikach dodatnich a $\psi(x)$ tylko składniki o wykładnikach niedodatnich. Z (1) mamy $u_{k-1}(x) = k\beta(x) + w_1(x) = k\varphi(x) + k\psi(x) + w_1(x)$. Ponadto $w_1(x)$ jest wielomianem stopnia co najwyżej jeden. Stąd i z nierówności $\deg u_1(x) \leqslant 0$ oraz z przypuszczenia mamy, że $\varphi(x)$ także jest wielomianem stopnia co najwyżej jeden i bez wyrazu wolnego. Istnieje więc $\xi \in \mathbb{C}$, że $\varphi(x) = \xi x$. Niech $\sum_{j=0}^{k} \widetilde{b}_j(x) y^j = f(x, y + \xi x)$. Oczywiście $\widetilde{b}_j(x) \in \mathbb{C}[x]$, $j = 0, \ldots, k$. Z drugiej strony

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{k} \widetilde{b}_j(x) y^j &= f(x, y + \xi x) = f(x, y - \psi(x) + \xi x + \psi(x)) = \\ &= f(x, y - \psi(x) + \beta(x)) = \sum_{j=0}^{k} u_j(x)(y - \psi(x))^j. \end{aligned}$$

Stąd, z założeń $\deg u_0(x) < 0$, $\deg u_1(x) \leqslant 0$, określenia $\psi(x)$ i przypuszczenia dostajemy $\deg \widetilde{b}_j(x) \leqslant 0$. Zatem wielomiany $\widetilde{b}_j(x)$ są stałe. W konsekwencji

$$f(x, y) = f(x, y + \xi x - \xi x) = \sum_{j=0}^{k} \widetilde{b}_j(0)(y - \xi x).$$

Sprzeczność z założeniem. Wykazaliśmy więc, że $\max_{j=2}^{k} \deg u_j(x) > 0$. Stąd, z (5) i założenia $\deg u_1(x) \leqslant 0$ dostajemy nierówność $\vartheta(\beta, f'_y) < 0$. To kończy dowód. $\square$

Dowód twierdzenia 1. Rozważając ewentualnie wielomian $f - \lambda$ możemy założyć, że $\lambda = 0$.

Przypuśćmy przeciwnie, że $\mathcal{L}_{\infty,0}(f) = 0$ i wielomian f nie jest postaci $g(y - \xi x)$, gdzie $\xi \in \mathbb{C}$ i $g \in \mathbb{C}[t]$. Ponieważ kres dolny w (2) jest osiągnięty, więc istnieje odwzorowanie Φ meromorficzne w nieskończoności, takie że $\deg \Phi > 0$, $\deg f \circ \Phi < 0$ i $\deg \operatorname{grad} f \circ \Phi / \deg \Phi = 0$. Stąd i z (1) wynika, że istnieje szereg $\beta(x) \in \mathcal{M}\{x\}^*$, $\deg \beta(x) \leqslant 1$, że $\deg f(x, \beta(x)) < 0$ i $\deg \operatorname{grad} f(x, \beta(x)) = 0$. W konsekwencji $\deg f'_y(x, \beta(x)) \leqslant 0$. Niech $\gamma(x)$ będzie dogodnym przesunięciem szeregu $\beta(x)$ względem f'_y. Na mocy lematu 2, $\deg f(x, \gamma(x)) < 0$. Ponadto, z lematu 1 mamy $\deg f'_y(x, \gamma(x)) < \deg f'_y(x, \beta(x)) \leqslant 0$. Stąd i z nierówności

$$-1 > \deg \big(f(x, \gamma(x))\big)' = \deg \big(f'_x(x, \gamma(x)) + \gamma'(x) f'_y(x, \gamma(x))\big)$$

oraz z faktu, że $\deg \gamma(x) \leqslant 1$ dostajemy nierówność $\deg f'_x(x, \gamma(x)) < 0$. Reasumując $\deg \operatorname{grad} f(x, \gamma(x)) < 0$ co daje sprzeczność z założeniem $\mathcal{L}_{\infty,0}(f) = 0$. $\square$

Uwaga 1. Jeśli wielomian f jest postaci $g(y - \xi x)$, gdzie $\xi \in \mathbb{C}$, $g \in \mathbb{C}[t]$, to

$$\mathcal{L}_{\infty,\lambda}(f) = \begin{cases} 0 & \text{gdy wielomian } g - \lambda \text{ nie ma czynników wielokrotnych} \\ -\infty & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

Bibliografia

[C] J. Cano, *The Puiseux theorem for diffrential equations*, in D. T. Le, K. Saito, B. Tessier (eds), *Singularity Theory*, World Scientific Publ., 1995, 128 – 152.

[ChK] J. Chądzyński, T. Krasiński, *The gradient of a polynomial at infinity*, Kodai Math. J., (to appear).

[GP] J. Gwoździewicz, A. Płoski, *Łojasiewicz exponents and singularities at infinity of polynomials in two complex variables*, IMUJ Preprint 2002/09 Kraków.

[H] H. V. Ha, *Nombres de Łojasiewicz et singularitiés à l'infini des polynômes de deux variables complexes*, C. R. Acad. Sci. Paris, Serie I, 311 (1990) 429 – 432.

[KP] T. C. Kuo, A. Parusiński, *Newton polygon relative to an arc*, Real and Complex singularieties, Chapman & Hall, 1998, 76 – 93.

[L] A. Lenarcik, *Algorytm Newtona i szeregi Puiseux*, Materiały XXII Konferencji Szkoleniowej z Geometrii Analitycznej i Algebraicznej Zespolonej, Łódź 2003.

[R] T. Rodak, *Wykładnik Łojasiewicza gradientu według Kuo i Parusińskiego*, Materiały XXII Konferencji Szkoleniowej z Geometrii Analitycznej i Algebraicznej Zespolonej, Łódź 2003.

On some theorem of Kuo and Parusiński

Summary. We prove the following theorem of Kuo and Parusiński: if f is a polynomial in $\mathbb{C}[x, y]$ such that $\deg f = \deg_y f \geqslant 2$ and the Łojasiewicz exponent at infinity of a polynomial f near a fiber $f^{-1}(\lambda)$ is equal to 0 then there exist $\xi \in \mathbb{C}$ and $g \in \mathbb{C}[t]$ such that $f(x, y) = g(y - \xi x)$.

Łódź, 5 – 9 stycznia 2004 r.