MATERIAŁY XVIII KONFERENCJI SZKOLENIOWEJ Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ ZESPOLONEJ

1997 **Łódź** **str. 65**

INDEKS ODWZOROWANIA WIELOMIANOWEGO $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ W NIESKOŃCZONOŚCI

M. Sękalski (Kielce)

Wstęp

Niech $F = (F_1, F_2)$ będzie odwzorowaniem wielomianowym płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ w $\mathbb{R}^2$ o zerach izolowanych. Celem tego artykułu jest obliczenie indeksu odwzorowania F w języku parametryzacji krzywej $\{F_1(x,y) = 0\}$ w otoczeniu nieskończoności. Wzór na indeks odwzorowania F w nieskończoności jest odpowiednikiem formuły na indeks lokalny F przedstawionej w pracy [2] Z. Duszaka.

Indeks odwzorowania wielomianowego w nieskończoności

Niech $F = (F_1, F_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie odwzorowaniem wielomianowym takim, że $\sharp F^{-1}(0,0) < \infty$. Istnieje B_R - kula o środku w $(0,0)$ i promieniu R taka, że $F(x,y) \neq 0$ w $\mathbb{R}^2 \setminus B_R$. Definiujemy odwzorowanie

$$\mathbb{S}_R \ni (x,y) \to F_R(x,y) = \frac{F(x,y)}{\|F(x,y)\|} \in \mathbb{S}_1$$

gdzie $\mathbb{S}_R = \partial B_R$ oraz $\mathbb{S}_1$ jest sferą jednostkową. Odwzorowanie F_R jest odwzorowaniem różniczkowalnym zwartych, spójnych i orientowalnych rozmaitości. Możemy zatem określić jego stopień. Definicję stopnia odwzorowania i potrzebne własności czytelnik może znaleźć w książce Milnora [1].

Definicja. Indeksem odwzorowania $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ w nieskończoności nazywamy stopień odwzorowania F_R.

$$\operatorname{ind}_\infty F = \deg F_R.$$

Jeżeli $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oraz zbior $F^{-1}(0)$ jest skończony, to przyjmujemy konwencję

$$\operatorname{ind}_\infty F = \begin{cases} -1 & \text{gdy } F(x) > 0 \text{ w otoczeniu } -\infty \text{ i } F(x) < 0 \text{ w otoczeniu } +\infty, \\ +1 & \text{gdy } F(x) < 0 \text{ w otoczeniu } -\infty \text{ i } F(x) > 0 \text{ w otoczeniu } +\infty, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Uwaga. Indeks w nieskończoności odwzorowania $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ nie zależy od R tzn. jeśli $R' > R$, to $\deg F_R = \deg F_{R'}$.

Istotnie, niech

$$G(x,y) = \begin{cases} F_R(x,y) & \text{dla } (x,y) \in \mathbb{S}_R, \\ F_{R'}(x,y) & \text{dla } (x,y) \in \mathbb{S}_{R'}. \end{cases}$$

Odwzorowanie G posiada gładkie przedłużenie na $\overline{B_{R'} \setminus B_R}$. Na mocy lematu 1, §5, (patrz Milnor [1]) $\deg G = 0$. Ponieważ, sfera $\mathbb{S}_R$ jest zorientowana ujemnie więc $\deg F_{R'} - \deg F_R = 0$.

Indeks w nieskończoności możemy obliczyć korzystając z twierdzenia:

Twierdzenie 1.

$$\operatorname{ind}_\infty F = \sum_{P \in F^{-1}(0)} \operatorname{ind}_P F,$$

gdzie $\operatorname{ind}_P F$ *są indeksami lokalnymi odwzorowania* F *w punktach* P.

Dowód. Definicję indeksu lokalnego w punkcie P odwzorowania F czytelnik może znaleźć w pracy Z. Duszaka [2]. Przypomnimy jedynie, że $\operatorname{ind}_P F = \deg\left(\frac{F(x,y)}{\|F(x,y)\|}|_{\mathbb{S}}\right)$, gdzie $\mathbb{S}$ jest sferą o środku w P i taką, że F nie posiada miejsc zerowych wewnątrz $\mathbb{S}$ z wyjątkiem co najwyżej P. Niech $F^{-1}(0) = \{P_1, \dots, P_k\}$ i niech $B_{P_1}, \dots, B_{P_k}$ będą rozłącznymi kulami o środkach odpowiednio w $P_1, \dots, P_k$ nie mającymi punktów wspólnych ze sferą $\mathbb{S}_R$. Zorientujmy sfery $\mathbb{S}_{P_1} = \partial B_{P_1}, \dots, \mathbb{S}_{P_k} = \partial B_{P_k}$ oraz $\mathbb{S}_R$ jako brzeg obszaru $D = \overline{B_R \setminus (B_{P_1} \cup \dots \cup B_{P_k})}$. Odwzorowanie $\mathbb{S}_{P_1} \cup \dots \cup \mathbb{S}_{P_k} \cup \mathbb{S}_R \ni (x,y) \to G(x,y) = \frac{F(x,y)}{\|F(x,y)\|} \in \mathbb{S}_1$ posiada gładkie przedłużenie na D, zatem na podstawie lematu 1, §5, (patrz Milnor [1]) $0 = \deg G = \deg F_R - \sum_{i=1}^k \deg\left(\frac{F(x,y)}{\|F(x,y)\|}|_{\mathbb{S}_{P_i}}\right) = \deg F_R - \sum_{i=1}^k \operatorname{ind}_{P_i} F$.

Oznaczmy przez Ω otoczenie nieskończoności w $\mathbb{R}^2$ i niech $\Delta = \Delta_- \cup \Delta_+$, gdzie Δ_- oznacza otoczenie $-\infty$ a Δ_+ otoczenie $+\infty$ na prostej $\mathbb{R}$.

Lemat. *Jeżeli* $f(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$ *i krzywa* $f(x,y) = 0$ *nie jest zwarta, to istnieje otoczenie nieskończoności* Ω, *zbiory* A_i, $i = 1, \dots, k$ *oraz analityczne homeomorfizmy* $p_i \colon \Delta \to \mathbb{R}^2$, $i = 1, \dots, k$ *takie, że:*

1) $\{f(x,y) = 0\} \cap \Omega = A_1 \cup \dots \cup A_k$,

2) $A_i = p_i(\Delta)$, $i = 1, \dots, k$,

3) $p_i(t) = \left(\sum_{j=-\infty}^{k_i} a_{ij} t^j, \sum_{j=-\infty}^{k_i} b_{ij} t^j\right)$, $k_i > 0$, $a_{ik_i} \neq 0$ *lub* $b_{ik_i} \neq 0$

$i = 1, \dots, k$.

Zbiory A_i nazywamy gałęziami krzywej $f(x,y)=0$ w nieskończoności.

Dowód. Niech $\tilde{f}(x,y,z)$ będzie ujednorodnieniem wielomianu f i niech $P_1(a_1,b_1,0)$, $P_2(a_2,b_2,0)\ \dots,\ P_n(a_n,b_n,0)$ będą punktami w nieskończoności krzywej $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon f(x,y)=0\}$. Niech $P(a,b,0)$ będzie jednym z tych punktów i niech $a\neq 0$. Bierzemy wielomian $g(y,z)=\tilde{f}(a,y,z)$. Oczywiście $g(b,0)=0$, zatem punkt (b,0) jest środkiem gałęzi $(\varphi_1(t),\psi_1(t)),\ \dots\ (\varphi_s(t),\psi_s(t))$ krzywej $\{(y,z)\in\mathbb{R}^2\colon g(y,z)=0\}$, przy czym $\varphi_i(b)=0$, $\psi_i(0)=0$ oraz $\psi_i\not\equiv 0$ dla $i=1,2,\dots s$. Zachodzą następujące równości:

$$0=g(\varphi_i(t),\psi_i(t))=\tilde{f}(a,\varphi_i(t),\psi_i(t))=[\psi_i(t)]^{\deg f}f\left(\frac{a}{\psi_i(t)},\frac{\varphi_i(t)}{\psi_i(t)}\right),\ i=1,2\dots s,$$

gdzie parametr t przebiega otoczenie zera. Przyjmijmy $\bar{x}_i(t)=\frac{a}{\psi_i(t)}$ oraz $\bar{y}_i(t)=\frac{\varphi_i(t)}{\psi_i(t)}$. Ponieważ $\psi_i(0)=0$, więc $\psi_i(t)=t^{k_i}\psi_i'(t)$ gdzie $\psi_i'(0)\neq 0$, $k_i>0$. Wobec tego $\bar{x}_i=\frac{1}{t^{k_i}}\frac{a}{\psi_i'(t)}=\frac{1}{t^{k_i}}\sum_{j=0}^{\infty}a_{ij}t^j$ oraz $\bar{y}_i=\frac{\varphi_i(t)}{t^{k_i}}\frac{1}{\psi_i'(t)}=\frac{1}{t^{k_i}}\sum_{j=0}^{\infty}b_{ij}t^j$ w otoczeniu zera. Kładąc $x_i(t)=\bar{x}_i(\frac{1}{t})$ oraz $y_i(t)=\bar{y}_i(\frac{1}{t})$ $i=1,2,\dots,s$ otrzymujemy parametryzacje $p_i(t)=(x_i(t),y_i(t))$ gałęzi w punkcie $P(a,b,0)$. Podobnie w pozostałych punktach.

Lemat. *Jeżeli $f(x,y)\in\mathbb{R}[x,y]$ oraz A jest gałęzią krzywej $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon f(x,y)=0\}$ w nieskończoności w rozumieniu poprzedniego lematu, to istnieje $R_0>0$ takie, że $A\cap\mathbb{S}_R=\{a^-,a^+\}$ dla dowolnego $R>R_0$ oraz przecięcie jest transwersalne.*

Dowód. Z poprzedniego lematu wynika istnienie otoczenia nieskończoności Δ w $\mathbb{R}$ takiego, że $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon(x,y)=p(t),\ t\in\Delta\}$ zatem $A\cap\mathbb{S}_R=\{p(t)\in\mathbb{R}^2\colon <p(t),p(t)>=R^2,\ t\in\Delta\}$.

Ponieważ

$$<p(t),p(t)>=at^{2k}+\text{wyrazy niższych stopni},\quad a>0,\ k>0$$

więc

$$\frac{d}{dt}<p(t),p(t)>=2kat^{2k-1}+\text{wyrazy niższych stopni}.$$

Zmniejszając ewentualnie Δ możemy założyć, że funkcja $<p(t),p(t)>$ silnie maleje w otoczeniu Δ_- natomiast silnie rośnie w otoczeniu Δ_+. Niech $t_0\in\Delta_-$ oraz $t_1\in\Delta_+$ i przyjmijmy $<p(t_0),p(t_0)>=R_-^2$, $<p(t_1),p(t_1)>=R_+^2$, $R_0=\max\{R_-,R_+\}$. Niech $R>R_0$. Ponieważ $<p(t),p(t)>$ jest silnie malejąca w Δ_- oraz silnie rosnąca w Δ_+, więc istnieją dokładnie dwie liczby $t_-\in\Delta_-$ oraz $t_+\in\Delta_+$ takie, że $<p(t_-),p(t_-)>=R^2$, $<p(t_+),p(t_+)>=R^2$. Wystarczy przyjąć $a^-=p(t_-)$ oraz $a^+=p(t_+)$.

Transwersalność przecięcia wynika z faktu, że

$$\frac{d}{dt}<p(t),p(t)>=2<p(t),p'(t)>\neq 0\quad\text{dla } t\in\Delta$$

przy czym $p'(t)$ jest styczny do A, a $p(t)$ jest prostopadły do $\mathbb{S}_R$.

Twierdzenie 2. *Niech* $F = (F_1, F_2)\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ *będzie odwzorowaniem wielomianowym otoczenia nieskończoności* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *w* $\mathbb{R}^2$*. Niech*
$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon F_1(x, y) = 0\} \cap \Omega = A_1 \cup \dots \cup A_k$
gdzie $A_i = p_i(\Delta)$ $\;i = 1, \dots, k$ *(*p_i *oznacza parametryzację gałęzi* A_i*). Jeżeli* $\operatorname{grad} F_1(x, y) \neq 0$ *dla* $(x, y) \in A$*, to*

$$\operatorname{ind}_\infty F = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{ind}_\infty (F_2 \circ p_i \;\det[(\operatorname{grad} F_1) \circ p_i, p_i']) .$$

Dowód. Dowód składa się z dwóch części. Po pierwsze znajdziemy pewne wartości regularne odwzorowania $F_R = \frac{F(x,y)}{\|F(x,y)\|}$ oraz ich włókna. W drugiej części obliczymy indeks korzystając bezpośrednio z definicji.

Część 1.

Pokażemy, że $n = (0, 1)$ oraz $s = (0, -1)$ są wartościami regularnymi odwzorowania F_R.

Niech a będzie jedną z liczb zbioru $A \cap \mathbb{S}_R = \{a_1^-, a_1^+, \dots, a_k^-, a_k^+\}$. Łatwo sprawdzić, że

$$dF_R(a) = \frac{1}{|F_2(a)|}\,[\operatorname{grad} F_1(a), 0] .$$

Wystarczy pokazać, że $dF_R(a)|_{T_a\mathbb{S}_R}$ jest izomorfizmem przestrzeni $T_a\mathbb{S}_R$ na przestrzeń $T_{F_R(a)}\mathbb{S}_1$. Istotnie, $\operatorname{Ker} dF_R(a) = T_aA$, a ponieważ przecięcie $A \cap \mathbb{S}_R$ jest transwersalne więc $T_aA \oplus T_a\mathbb{S}_R \cong \mathbb{R}^2$. Z podstawowych faktów algebry liniowej wynika, że $dF_R(a)|_{T_a\mathbb{S}_R}$ jest izomorfizmem $\mathbb{R}^2/\operatorname{Ker} dF_R(a) = T_a\mathbb{S}_R$ na $T_{F_R(a)}\mathbb{S}_1$.

Część 2.

Z definicji indeksu mamy

$$\begin{aligned} 2\operatorname{ind}_\infty F &= \sum_{a \in F_R^{-1}(n)} \operatorname{sgn} dF_R(a) + \sum_{a \in F_R^{-1}(s)} \operatorname{sgn} dF_R(a) = \\ &= \sum_{i=1}^{k} \big(\operatorname{sgn} dF_R(a_i^-) + \operatorname{sgn} dF_R(a_i^+)\big) . \end{aligned}$$

Wystarczy obliczyć znak $\operatorname{sgn} dF_R(a)$ w punktach $a = a_i^-$ oraz $a = a_i^+$ dla $i = 1, \dots, k$. Niech $\vec{v}$ będzie wektorem $T_a\mathbb{S}_R$ zorientowanym dodatnio tzn. $< \vec{v}, a >= 0$ oraz $\det[a, \vec{v}] > 0$. Weźmy $t \in \Delta$, dla którego $a = p_i(t)$. Mamy następujące równości:

$$\operatorname{sgn}\det\,[F_R(a), dF_R(a)\vec{v}] = \operatorname{sgn}\det \begin{bmatrix} 0 & \frac{F_2(a)}{|F_2(a)|} \\ \frac{1}{|F_2(a)|} < \operatorname{grad} F_1(a), \vec{v} > & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \operatorname{sgn}\,(-F_2(a) < \operatorname{grad} F_1(a), \vec{v} >) .$$

oraz

$$\operatorname{sgn}\det\,[\operatorname{grad} F_1(a), p_i'(t)]^T \det\,[p_i'(t), \vec{v}] =$$

$$\operatorname{sgn}\det \begin{bmatrix} < \operatorname{grad} F_1(a), p_i'(t) > & < \operatorname{grad} F_1(a), \vec{v} > \\ < p_i'(t), p_i'(t) > & < p_i'(t), \vec{v} > \end{bmatrix} =$$

$$\operatorname{sgn}\det \begin{bmatrix} 0 & < \operatorname{grad} F_1(a), \vec{v} > \\ (p_i'(t))^2 & < p_i'(t), \vec{v} > \end{bmatrix} = \operatorname{sgn}\,(- < \operatorname{grad} F_1(a), \vec{v} >) .$$

Łącząc te równości otrzymujemy:

$$\operatorname{sgn} dF_R(a) = \operatorname{sgn}\Big(F_2(a) \det\left[\operatorname{grad} F_1(a), p_i'(t)\right]^T \det\left[p_i'(t), \vec{v}\right]\Big).$$

Ponieważ $\operatorname{sgn}\Big(\det\left[p_i'(t), \vec{v}\right]^T \det\left[p_i(t), \vec{v}\right]\Big) = \operatorname{sgn}\big(\vec{v}^2 < p_i'(t), p_i(t) >\big) = \operatorname{sgn} t$, więc jeśli $a = a_i^-$, to $\det\left[p_i'(t), \vec{v}\right] < 0$ a jeśli $a = a_i^+$, to $\det\left[p_i'(t), \vec{v}\right] > 0$.

Biorąc $a_i^- = p_i(t_-)$, $\quad a_i^+ = p_i(t_+)$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} dF_R(a_i^-) &= -\operatorname{sgn}\big(F_2(a_i^-) \det\big[\operatorname{grad} F_1(a_i^-), p_i'(t_-)\big]\big) \\ \operatorname{sgn} dF_R(a_i^+) &= \quad \operatorname{sgn}\big(F_2(a_i^+) \det\big[\operatorname{grad} F_1(a_i^+), p_i'(t_+)\big]\big). \end{aligned}$$

i ostatecznie

$$\begin{aligned} \operatorname{ind}_\infty F = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2}\{&\operatorname{sgn}\left(F_2(p_i(t_+)) \det\left[\operatorname{grad} F_1(p_i(t_+)), p_i'(t_+)\right]\right) - \\ &- \operatorname{sgn}\left(F_2(p_i(t_-)) \det\left[\operatorname{grad} F_1(p_i(t_-)), p_i'(t_-)\right]\right)\} \end{aligned}$$

Wystarczy teraz zauważyć, że jeśli $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją o skończonej liczbie zer, to $\operatorname{ind}_\infty f = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sgn} f(t_+) - \operatorname{sgn} f(t_-)\right)$, gdzie $t_- \in \Delta_-$ i $t_+ \in \Delta_+$.

Przykład.

Rozważmy odwzorowanie $F(x,y) = (xy^2 - y - 1, x^2y + xy^2 - x - y - 1)$. Oznaczmy $F_1(x,y) = xy^2 - y - 1$ oraz $F_2(x,y) = x^2y + xy^2 - x - y - 1$. Krzywa $F_1(x,y) = 0$ posiada dwie gałęzie w nieskończoności o parametryzacjach $p_1(t) = (t + t^2, \frac{1}{t})$ oraz $p_2(t) = (\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}, t)$. Łatwo sprawdzić, że $F_2(p_1(t)) = t^3 + t^2$, $F_2(p_2(t)) = \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^3}$, $\operatorname{grad} F_1(p_1(t)) = (\frac{1}{t^2}, 1+2t)$, $\operatorname{grad} F_1(p_2(t)) = (t^2, 1+\frac{2}{t})$. Na podstawie twierdzenia 2 otrzymujemy

$$\operatorname{ind}_\infty F =$$

$$\operatorname{ind}_\infty\left((t^3 + t^2)\det\begin{bmatrix} \frac{1}{t^2} & 1+2t \\ 1+2t & -\frac{1}{t^2} \end{bmatrix}\right) + \operatorname{ind}_\infty\left((\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^3})\det\begin{bmatrix} t^2 & 1+\frac{2}{t} \\ -\frac{1}{t^2} - \frac{2}{t^3} & 1 \end{bmatrix}\right) =$$

$$\operatorname{ind}_\infty((t^3 + t^2)(-4t^2 - 4t - 1 - \frac{1}{t^4})) + \operatorname{ind}_\infty((\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^3})(t^2 + \frac{1}{t^2} + \frac{4}{t^3} + \frac{4}{t^4})) =$$

$$-1 + 0 = -1.$$

Jako wniosek z twierdzenia 1 możemy odnotować, że zbiór $F^{-1}(0,0)$ jest niepusty.

References

[1] J. W. Milnor, *Topologia z różniczkowego punktu widzenia*, PWN . Warszawa 1969.
[2] Z. Duszak, *On the degree of an analitic map germ*, Can. J. Math. **44 (2),** (1992), 270–279.

Degree at infinity of a polynomial map of $\mathbb{R}^2$.

Summary. A formula for the degree at infinity of a polynomial map $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ is given.

Bronisławów, 13–17 stycznia, 1997 r.