MATERIAŁY XIX KONFERENCJI SZKOLENIOWEJ Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ ZESPOLONEJ

1998 **Łódź** **str. 45**

INDEKS LOKALNY GRADIENTU FUNKCJI ANALITYCZNEJ DWÓCH ZMIENNYCH RZECZYWISTYCH

Maciej Sękalski (Kielce)

Wstęp

Celem artykułu jest podanie elementarnego dowodu wzoru Arnolda wyrażającego indeks gradientu funkcji analitycznej $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ w otoczeniu izolowanego punktu krytycznego $p \in \mathbb{R}^2$ przez liczbę gałęzi krzywej $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = f(p)\}$ w otoczeniu punktu p.

Twierdzenie. *Jeżeli f jest funkcją analityczną dwóch zmiennych określoną w otoczeniu punktu krytycznego izolowanego $p \in \mathbb{R}^2$, to*

$$\mathrm{ind}_p(\mathrm{grad}\, f) = 1 - r_p(f)$$

gdzie $r_p(f)$ oznacza liczbę gałęzi krzywej $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = f(p)\}$ w otoczeniu punktu p.

Powyższe twierdzenie jest anonsowane bez dowodu w pracy Arnolda [4], gdzie autor posługuje się złożonymi technikami topologii algebraicznej i teorii Morse'a. W tym artykule podamy elementarny dowód zacytowanego powyżej twierdzenia oraz pewne wnioski zeń wypływające.

Lematy pomocnicze

Do dowodu twierdzenia będą potrzebne następujące lematy:

Lemat 1. *Jeżeli* $F = (F_1, F_2) : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$ *jest odwzorowaniem analitycznym otoczenia zera w* $\mathbb{R}^2$ *oraz zero odwzorowania* F *jest izolowane to odwzorowanie* $\tilde{F} = (xF_1 + yF_2, xF_2 - yF_1)$ *ma również zero izolowane oraz*

$$\mathrm{ind}_0(\tilde{F}) = \mathrm{ind}_0(F) - 1.$$

Dowód. Jeżeli oznaczymy $F = F_1 + iF_2$, to $\tilde{F} = (F_1 + iF_2)(x - iy)$, zatemy $\tilde{F} = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $F = 0$ lub $x - iy = 0$. Stąd wynika pierwsza część lematu. Dla dowodu drugiej część przyjmijmy $\theta(t) = \arg F(\gamma(t))$ oraz $\tilde{\theta}(t) = \arg \tilde{F}(\gamma(t))$ gdzie $\gamma(t)$ jest standardową parametryzacją okręgu wokół zera. Łatwo zauważyć, że $\tilde{\theta}(t) = \theta(t) - t$. Ponieważ $\mathrm{ind}_0 F = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta(t)$ (patrz Krasnosielski [3]), zatem $\mathrm{ind}_0 \tilde{F} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d(\theta(t) - t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta(t) - 1$.

Lemat 2. *Jeżeli* $f : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ *jest funkcją analityczną w otoczeniu zera oraz zero jest punktem krytycznym izolowanym* f*, to*

(1) jeśli $xf_y - yf_x \equiv 0$ *w otoczeniu zera, to* $\mathrm{ind}_0(\mathrm{grad}\, f) = 1$*,*

(2) jeśli $xf_y - yf_x \not\equiv 0$*, to istnieje* $\epsilon_0 > 0$ *takie, że przecięcie* $\{xf_y - yf_x = 0\} \cap S_\epsilon$ *jest transwersalne dla każdego okręgu* S_ϵ *o środku w zerze i promieniu* $\epsilon < \epsilon_0$*. Ponadto, jeżeli* $p_0 \in \{xf_y - yf_x = 0\} \cap S_\epsilon$*, to* $\mathrm{sgn}(xf_x + yf_y)(p_0) = \mathrm{sgn}\, f(p_0)$*.*

Dowód. Część 1) lematu wynika z lematu 1, oraz z definicji indeksu odwzorowania (J.Milnor [1]). Mamy bowiem $\mathrm{ind}_0(\mathrm{grad}\, f) = \mathrm{ind}_0(xf_x + yf_y, 0) + 1$, a ponieważ odwzorowanie $\frac{(xf_x + yf_y, 0)}{\|(xf_x + yf_y, 0)\|}$ nie jest "na", bo przeciwobraz dowolnego punktu okręgu o rzędnej różnej od zera jest pusty zatem $\mathrm{ind}_0(xf_x + yf_y, 0) = 0$.

Pierwsza część 2) wynika z lematu [2.1(a)] pracy Z. Duszaka [2], którego potrzebną nam wersję cytujemy poniżej bez dowodu:

Lemat. *Niech* $g : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ *będzie funkcją analityczną w otoczeniu zera oraz zero nie jest punktem izolowanym zbioru* $\{g(x, y) = 0\}$*. Jeżeli* $\mathrm{grad}\, g(p) \neq 0$ *dla* $p \in \{g(x, y) = 0\} \setminus \{0\}$*, to istnieje* ϵ_0 *takie, że przecięcie* $\{g(x, y) = 0\} \cap S_\epsilon$ *jest transwersalne dla dowolnego* $\epsilon < \epsilon_0$*.*

Dla dowodu drugiej części niech $p_0 \in \{xf_y - yf_x = 0\} \cap S_\epsilon$. Mamy wtedy dwa przypadki:

i) $(xf_x + yf_y)(p_0) > 0$,

ii) $(xf_x + yf_y)(p_0) < 0$.

W przypadku *i)* $(xf_x + yf_y)(p) > 0$ dla każdego punktu p leżącego na pewnej gałęzi A krzywej $\{xf_y - yf_x = 0\}$ łączącej punkt $(0, 0)$ i punkt p_0. Ponieważ $f|A$ rośnie w kierunku $\mathrm{grad}\, f$ więc $0 = f(0, 0) < f(p) < f(p_0)$. Nierówności przeciwne będą zachodzić w przypadku *ii)*. Zatem $\mathrm{sgn}(xf_x + yf_y)(p_0) = \mathrm{sgn}\, f(p_0)$.

Dowód twierdzenia Arnolda.

Bez straty ogólności możemy założyć, że zero jest punktem krytycznym izolowanym funkcji f oraz, że $f(0,0)=0$.

Oznaczmy $u = xf_x + yf_y$, $v = xf_y - yf_x$, $i = \mathrm{ind}_0(\mathrm{grad}\, f)$ oraz $w = \frac{(u,v)}{\|(u,v)\|}$. Wobec lematu 1 odwzorowanie (u,v) ma zero izolowane oraz $\mathrm{ind}_0(u,v) = i-1$. Załóżmy ponadto, że $v \not\equiv 0$. Lemat 2 pozwala wybrać okrąg S_ϵ tak aby przecięcie $A = \{v=0\} \cap S_\epsilon$ było transwersalne. Niech

$$[0,2\pi] \ni t \to \gamma(t) = (x(t), y(t)) \in S_\epsilon$$

będzie biegunową parametryzacją okręgu S_ϵ, oraz niech

$$S_1 \setminus \{(0,\pm 1)\} \ni (x,y) \to \phi(x,y) = \frac{y}{x} \in \mathbb{R}$$

będzie mapą na okręgu wokół punktów $p = (\pm 1, 0)$.

Pokażemy, że 0 jest wartością regularną odwzorowania $\phi \circ w \circ \gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$. Istotnie, jeżeli $t \in (\phi \circ w \circ \gamma)^{-1}(0) = \{t \in [0,2\pi] : v(\gamma(t)) = 0\}$, to

$$(\phi \circ w \circ \gamma)'(t) = \left(\frac{v(\gamma(t))}{u(\gamma(t))}\right)' = \frac{\langle \mathrm{grad}\, v(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle}{u(\gamma(t))} \neq 0.$$

Ostatnia nierówność wynika z transwersalności przecięcia krzywych $\{v=0\}$ oraz $S_\epsilon = \{\gamma(t) : t \in [0,2\pi]\}$ (lemat 2). Ponadto, ponieważ parametryzacja γ oraz mapa ϕ zachowują orientację zatem dla $p = \gamma(t) \in \{v=0\} \cap S_\epsilon$

$$\mathrm{sgn}\, \mathrm{d}_p\, w = \mathrm{sgn}\, \frac{\langle \mathrm{grad}\, v(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle}{u(\gamma(t))}.$$

Prosty rachunek pokazuje, że $\langle \mathrm{grad}\, v(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle = (f \circ \gamma)''(t)$, a na podstawie lematu 2 mamy $\mathrm{sgn}(u \circ \gamma(t)) = \mathrm{sgn}(f \circ \gamma)(t)$, zatem

$$\mathrm{sgn}\, \mathrm{d}_p\, w = \mathrm{sgn}\left((f\circ\gamma)(t)(f\circ\gamma)''(t)\right).$$

Przyjmując notację $f(t) = (f \circ \gamma)(t)$ i korzystając z definicji indeksu otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
2\,\mathrm{ind}_0(u,v) &= \sum_{p \in w^{-1}(\pm 1, 0)} \mathrm{sgn}\, \mathrm{d}_p\, w = \sum_{t \in\ (v\circ\gamma)^{-1}(0)} \mathrm{sgn}\left(f(t)(f)''(t)\right) \\
&= \sum_{t \in (f')^{-1}(0)} \mathrm{sgn}\left(f(t)f''(t)\right) = \sum_{t \in (f')^{-1}(0)} \mathrm{sgn}\left(f^2\right)''(t) \\
&= \sum_{t \in (ff')^{-1}(0)} \mathrm{sgn}\left(f^2\right)''(t) - \sum_{t \in f^{-1}(0)} \mathrm{sgn}\left(f^2\right)''(t) \\
&= \sum_{t \in ((f^2)')^{-1}(0)} \mathrm{sgn}\left(f^2\right)''(t) - \sum_{t \in f^{-1}(0)} \mathrm{sgn}\left(f^2\right)''(t)
\end{aligned}$$

Suma $\sum_{t\in((f^2)')^{-1}(0)} \mathrm{sgn}\left(f^2\right)''(t)$ równa jest indeksowi funkcji $(f^2)'$ na przedziale $[0,2\pi]$, a ponieważ funkcja jest okresowa, zatem suma ta jest równa 0.

Z kolei $\sum_{t \in f^{-1}(0)} \mathrm{sgn}\left(f^2\right)''(t) = 2r_0(f)$. Zatem $2(i-1) = -2r_0(f)$.

Zastosowania

Niech f będzie funkcją analityczną dwóch zmiennych o ustalonym diagramie Newtona. Oznaczmy przez N liczbę punktów kratowych leżących na łamanej Newtona i nie leżących na osiach układu współrzędnych.

Wniosek 1.
(i) $\operatorname{ind}_p(\operatorname{grad} f) \leqslant 1$,
(ii) $\operatorname{ind}_p(\operatorname{grad} f) = 1$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* f *posiada ekstremum w punkcie* p.

Wniosek 2.

$$|\operatorname{ind}_p(\operatorname{grad} f)| \leqslant N.$$

Dowód. Jeżeli p nie jest punktem izolowanym zbioru $\{f(x,y) = f(p)\}$, to wniosek wynika z twierdzenia Arnolda oraz z faktu, że liczba gałęzi rzeczywistych krzywej $\{f(x,y) = f(p)\}$ jest mniejsza lub równa liczbie gałęzi zespolonych. Oznaczając liczbę gałęzi zespolonych przez $r_p^{\mathbb{C}}(f)$ mamy oszacowanie

$$|\operatorname{ind}_p(\operatorname{grad} f)| = r_p(f) - 1 \leqslant r_p^{\mathbb{C}}(f) - 1 \leqslant N$$

Jeżeli p jest punktem izolowanym zbioru $\{f(x,y) = f(p)\}$, wtedy funkcja f ma ekstremum w p. Zatem

$$1 = |\operatorname{ind}_p(\operatorname{grad} f)| \leqslant r_p^{\mathbb{C}}(f) - 1 \leqslant N.$$

Wniosek 3.

$$|\operatorname{ind}_p(\operatorname{grad} f)| \leqslant \sqrt{\mu}$$

gdzie μ *jest liczbą Milnora funkcji* f *w punkcie* p.

Dowód. Bez straty ogólności możemy założyć, że $p = (0,0)$ oraz $f(p) = 0$. Wniosek 2 daje nam oszacowanie $|\operatorname{ind}_0(\operatorname{grad} f)| \leqslant \operatorname{ord} f - 1$ natomiast z twierdzenia Kusznirenki mamy nierówność $(\operatorname{ord} f - 1)^2 \leqslant \mu$. Łącząc te nierówności otrzymujemy tezę.

Następne wnioski dotyczą indeksu globalnego $\operatorname{grad} f$. Oznaczmy przez $i = \operatorname{ind}_\infty(\operatorname{grad} f)$ i niech m, n i s będą odpowiednio liczbą maksimów, minimów i siodeł wielomianu f.

Wniosek 4.

$$i \leqslant m + n$$

Jeżeli f *nie ma punktów siodłowych, to zachodzi równość.*

Dowód. Zachodzą następujące równości:

$$i = \sum_p \operatorname{ind}_p(\operatorname{grad} f) = \sum_p (1 - r_p(f)) =$$
$$\sum_{r_p(f)=0} 1 + \sum_{r_p(f)>0} (1 - r_p(f)) = m + n - \sum_{r_p(f)\geqslant 1} (r_p(f) - 1).$$

Ponieważ ostatnia suma jest nieujemna zatem otrzymujemy $i \leqslant m + n$. W przypadku braku punktów siodłowych suma ta jest równa zero.

Wniosek 5. *Jeżeli punkty siodłowe wielomianu f są niezdegenerowane, to*

$$i = m + n - s.$$

Dowód. Podobnie jak w dowodzie poprzedniego wniosku:

$$i = m + n - \sum_{r_p(f) \geqslant 1} (r_p(f) - 1).$$

Ponieważ punkty siodłowe są niezdegenerowane więc $r_p(f) = 2$.

Bibliografia

[1] J. W. Milnor, *Topologia z różniczkowego punktu widzenia*, PWN . Warszawa 1969.
[2] Z. Duszak, *On the degree of an analitic map germ*, Can. J. Math. **44 (2),** (1992), 270–279.
[3] M.A. Krasnosielski, *Wektornyje pola na ploskosti*, Nauka, Moskwa, (1963).
[4] V. I. Arnold, *Indeks of a singular point of a vector field. The Petrowski-Olejnik inequality and mixed Hodge structures*, Funct. Anal. Apl. 2 (1978), 1–11.
[5] A. Durfee, N. Kronenfeld, H. Munson, J. Roy, I. Westby, *Counting Critical Points of Real Polynomials in Two Variables.*

On the index of the gradient of an analytic function in two real variables

Summary. We give an elementary proof of the Arnold formula for the local index of the gradient of a real analytic function.

Bronisławów, 12 – 16 stycznia, 1998 r.