**MATERIAŁY XXI KONFERENCJI SZKOLENIOWEJ
Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ
ZESPOLONEJ**

2000 **Łódź** **str. 21**

O INDEKSIE LOKALNYM ODWZOROWAŃ ANALITYCZNYCH

Maciej Sękalski (Kielce)

W pracy [K-S] autorzy podali elegancką charakteryzację krotności przecięcia krzywych analitycznych zespolonych. W rzeczywistej geometrii analitycznej odpowiednikiem krotności jest indeks lokalny. Powstaje naturalne pytanie, czy to pojęcie również można scharakteryzować podając kilka prostych aksjomatów. Odpowiedź jest pozytywna. Aby ją przedstawić oznaczmy $\mathrm{ind}_0(f,g)$ indeks lokalny odwzorowania rzeczywistego $(f,g) : U \to \mathbb{R}^2$, gdzie U jest otoczeniem zera, a punkt $(0,0)$ jest izolowanym rozwiązaniem układu równań $f(X,Y) = g(X,Y) = 0$. Z definicji jest to stopień topologiczny odwzorowania

$$S_\epsilon \ni (x,y) \mapsto \frac{(f(x,y),g(x,y)}{\|(f(x,y),g(x,y)\|} \in S_1$$

gdzie S_ϵ jest okręgiem wokół zera o dostatecznie małym promieniu $\epsilon > 0$. Można sprawdzić, że $\mathrm{ind}_0(f,g) = \mathrm{sgn}\, \frac{\partial(f,g)}{\partial(X,Y)}(0,0)$ o ile jakobian $\frac{\partial(f,g)}{\partial(X,Y)}(0,0) \neq 0$, $\mathrm{ind}_0(A \circ (f,g)) = \mathrm{sgn}\det A \cdot \mathrm{ind}_0(f,g)$ dla dowolnego liniowego odwzorowania A, takiego, że $\det A \neq 0$. Ponadto $\mathrm{ind}_0(f,g+af) = \mathrm{ind}_0(f,g)$ dla dowolnej analitycznej w otoczeniu zera funkcji a, oraz zachodzi następująca własność addytywności indeksu

$$\mathrm{ind}_0(fg,h) = \mathrm{ind}_0(f,gh) + \mathrm{ind}_0(g,fh).$$

Zakładamy tutaj, że pary (f,g), (f,h) oraz (g,h) mają zero izolowane.

Łatwo zauważyć, że w przypadku indeksu nie zachodzi warunek addytywności taki, jak dla krotności. Jeżeli przyjmiemy $f(x,y)=x$, $g(x,y)=y$ oraz $h(x,y)=x-y$, to

$$\mathrm{ind}_0(x,x-y)=-1,\quad \mathrm{ind}_0(y,x-y)=-1,$$

wobec tego mamy

$$0=\mathrm{ind}_0(fg,h)\neq \mathrm{ind}_0(f,h)+\mathrm{ind}_0(g,h)=-2.$$

Okazuje się że niektóre z wyliczonych wyżej własności charakteryzują indeks lokalny jednoznacznie. Mamy następujące

Twierdzenie (o charakteryzacji indeksu). *Zakładamy, że każdej parze funkcji analitycznych f,g w otoczeniu zera $(0,0)\in\mathbb{R}^2$ takiej, że układ równań $f=g=0$ ma zero izolowane przyporządkowana jest liczba całkowita $\mathrm{I}_0(f,g)$ o następujących własnościach*

(1) $\mathrm{I}_0(fg,h)=\mathrm{I}_0(f,gh)+\mathrm{I}_0(g,fh)$, *$h$ jest dowolną funkcją analityczną taką, że para (fg,h) ma zero izolowane*

(2) $\mathrm{I}_0(f,g+af)=\mathrm{I}_0(f,g)$, *$a$ jest dowolną funkcją analityczną,*

(3) $\mathrm{I}_0(f,gh^2)=\mathrm{I}_0(f,g)$, *$h$ jest dowolną funkcją analityczną, taką, że para (f,h) ma zero izolowane,*

(4) $\mathrm{I}_0(f,-g)=-\mathrm{I}_0(f,g)$,

(5) $\mathrm{I}_0(f,g)=-\mathrm{I}_0(g,f)$,

(6) $\mathrm{I}_0(X,Y)=1$.

Wtedy $\mathrm{I}_0=\mathrm{ind}_0$.

Można udowodnić, że istotnie indeks lokalny posiada własności (1)-(6) twierdzenia. Dowód, że powyższe aksjomaty jednoznacznie określają indeks podajemy w [S3].

Przykład: Korzystając z aksjomatów (1)-(6) obliczymy indeks odwzorowania $(f(x,y),g(x,y))=(x^2-y,xy-y^3)$. Liczby nad znakami równości oznaczają numery własności, z których korzystamy.

$$\begin{aligned}
\mathrm{ind}_0(x^2-y,xy-y^3) &\overset{(2)}{=} \mathrm{ind}_0(x^2-y,xy-y^3-y^2(x^2-y))=\\
&= \mathrm{ind}_0(x^2-y,xy-x^2y^2))=\mathrm{ind}_0(x^2-y,xy(1-xy))=\\
&\overset{(3)}{=} \mathrm{ind}_0(x^2-y,xy) \overset{(5)}{=} -\mathrm{ind}_0(xy,x^2-y)=\\
&\overset{(1)}{=} -\mathrm{ind}_0(x,y(x^2-y))-\mathrm{ind}_0(y,x(x^2-y))=\\
&= -\mathrm{ind}_0(x,x^2y-y^2)-\mathrm{ind}_0(y,x^3-y^2)=\\
&\overset{(2)}{=} -\mathrm{ind}_0(x,-y^2)-\mathrm{ind}_0(y,x^3) \overset{(4)}{=} \mathrm{ind}_0(x,y^2)-\mathrm{ind}_0(y,x^3)=\\
&\overset{(3)}{=} \mathrm{ind}_0(x,1)-\mathrm{ind}_0(y,x)=\mathrm{ind}_0(x,y)=0+1.
\end{aligned}$$

Również indeks w nieskończoności można obliczyć korzystając z podanych wyżej aksjomatów. Do tego celu potrzebne jest twierdzenie, które pozwala sprowadzić obliczanie indeksu w nieskończoności odwzorowania wielomianowego (f, g) do wyznaczania indeksów lokalnych odwzorowań związanych z tym odwzorowaniem. Przypomnijmy, że określenie indeksu w nieskończoności jest analogiczne jak w przypadku lokalnym. Mianowicie

$$\mathrm{ind}_\infty(f, g) = \text{stopień topologiczny odwzorowania } \left.\frac{(f, g)}{\|(f, g)\|}\right|_{S_R},$$

gdzie okrąg S_R “obejmuje” wszystkie rozwiązania układu $f(X, Y) = g(X, Y) = 0$.

Niech f, g będą wielomianami rzeczywistymi stopni $\deg f = d$ i $\deg g = d'$ i niech zbiór rozwiązań układu $f(X, Y) = g(X, Y) = 0$ będzie skończony. Zakładamy, że forma wiodąca wielomianu f jest jednomianem. Oznaczmy F, G ujednorodnienia wielomianów f i g odpowiednio tzn.

$$F(x, y, z) = z^d f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right), \quad G(x, y, z) = z^{d'} g\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right).$$

Przy powyższych założeniach zachodzi następujące

Twierdzenie (o indeksie w nieskończoności). *Jeżeli* $\operatorname{grad} f(x, y) \neq 0$ *na krzywej* $\{f(x,y)=0\}$ *w otoczeniu nieskończoności, to*

$$\begin{aligned}\mathrm{ind}_\infty(f, g) \quad &= \quad -\mathrm{ind}_0(F(1, Y, Z), Z^{d+d'-1}G(1, Y, Z)) - \\ &\qquad - \mathrm{ind}_0(F(X, 1, Z), Z^{d+d'-1}G(X, 1, Z)).\end{aligned}$$

Uwaga: Indeksy lokalne w powyższej formule są obliczane przy zwykłej orientacji płaszczyzn $0YZ$ oraz $0ZX$.

Przykład: Rozważmy odwzorowanie $(x, y) \to (x + y + x^3y^3, x^2 - y^2 + x)$ i niech $f(x, y) = x+y+x^3y^3$ oraz $g(x, y) = x+x^2-y^2$. Zgodnie z oznaczeniami przyjętymi w twierdzeniu mamy

$$F(X, Y, Z) = XZ^5 + YZ^5 + X^3Y^3, \quad G(X, Y, Z) = XZ + X^2 - Y^2.$$

Łatwo sprawdzić, że założenia twierdzenia o indeksie w nieskończoności są spełnione, zatem

$$\begin{aligned}\mathrm{ind}_\infty(f, g) &= -\mathrm{ind}_0(Z^5 + YZ^5 + Y^3, Z^7(1 - Y^2 + Z)) \\ &\qquad - \mathrm{ind}_0(XZ^5 + Z^5 + X^3, Z^7(XZ + X^2 - 1)) = \\ &= -\mathrm{ind}_0(Z^5 + YZ^5 + Y^3, Z) - \mathrm{ind}_0(XZ^5 + Z^5 + X^3, -Z) = \\ &= -\mathrm{ind}_0(Y^3, Z) + \mathrm{ind}_0(X^3, Z) = \\ &= -\mathrm{ind}_0(Y, Z) + \mathrm{ind}_0(X, Z) = -1 - 1 = -2.\end{aligned}$$

Indeksy lokalne w powyższej formule są obliczane przy użyciu podanej aksjomatyki.

Aby stosować twierdzenie o indeksie w nieskończoności forma wiodąca wielomianu f musi być jednomianem. Pokażemy, że zawsze zagadnienie obliczenia indeksu w nieskończoności można zredukować do tego przypadku. Mianowicie zachodzi następująca

Własność 1 *Jeżeli odwzorowanie wielomianowe (f, g) ma skończoną liczbę zer, to dla nieparzystych liczb p i q,*

$$\mathrm{ind}_\infty(f, g) = \mathrm{ind}_\infty(f(x^p, y^q), g(x^p, y^q))$$

oraz

Własność 2 *Dla dowolnego wielomianu f istnieją liczby naturalne i nieparzyste p, q takie, że forma wiodąca wielomianu $f(x^p, y^q)$ jest jednomianem.*

Sprawdzenie podanych własności nie jest trudne.
Przykład: Na zakończenie rozważmy następujące odwzorowanie:

$$(f(x, y), g(x, y)) = (y^4 - xy^3 + x^2y^2 - x^2, y^3 + xy^2 + x^3).$$

Na podstawie własności 1 mamy

$$\begin{aligned}\mathrm{ind}_\infty(f, g) = \mathrm{ind}_\infty(f(x, y^3), g(x, y^3)) = \\ \mathrm{ind}_\infty(y^{12} - xy^9 + x^2y^6 - x^2, y^9 + xy^6 + x^3).\end{aligned}$$

Stosując teraz twierdzenie o indeksie w nieskończoności otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&\mathrm{ind}_\infty(f, g) = \\
&\quad -\mathrm{ind}_0(y^{12} - y^9z^2 + y^6z^4 - z^{10}, z^{20}(y^9 + y^6z^2 + z^6)) \\
&\qquad - \mathrm{ind}_0(1 - xz^2 + x^2z^4 - x^2z^{10}, z^{20}(1 + xz^2 + x^3z^6)) = \\
&\quad = -\mathrm{ind}_0(y^{12} - y^9z^2 + y^6z^4 - z^{10}, y^9 + y^6z^2 + z^6) = \\
&\quad = -\mathrm{ind}_0\left((y^{12} - y^9z + y^6z^2 - z^5, y^9 + y^6z + z^3) \circ (y, z^2)\right) = \\
&\quad = -\mathrm{ind}_0(y^{12} - y^9z + y^6z^2 - z^5, y^9 + y^6z + z^3) \cdot \mathrm{ind}_0(y, z^2) = \\
&\quad = -\mathrm{ind}_0(y^{12} - y^9z + y^6z^2 - z^5, y^9 + y^6z + z^3) \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

Spis literatury

[K-S] **T. Kałużny, S. Spodzieja** *On Axiomatic Definition of Multiplicity*, Bull. Soc. Sci. Lett. Łódź, 1994, 111-116

[M] **J. W. Milnor**, *Topologia z różniczkowego punktu widzenia*, PWN, Warszawa 1969.

[S1] **M. Sękalski**, *Indeks odwzorowania wielomianowego $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ w nieskończoności*, Materiały XVIII Konferencji Szkoleniowej z Geometrii Analitycznej i Algebraicznej Zespolonej, Łódź, 1997, 65-70.

[S2] **M. Sękalski**, *On the degree of a polynomial mapping* $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *at infinity*, Universitatis Iagellonicae Acta Mathematica, 1998,

[S3] **M. Sękalski**, *A note on local index*, (in preparation).

On the Local Index of the Analytic Mappings

Summary. We give an axiomatic description of the local index of the real analytic mappings. We use these axioms to calculate index at infinity of the polynomial mappings.

Łódź, 10 – 14 stycznia 2000 r.