MATERIAŁY XXV KONFERENCJI SZKOLENIOWEJ Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ ZESPOLONEJ

2004 **Łódź** **str. 33**

TWIERDZENIE O FUNKCJACH UWIKŁANYCH BOURBAKIEGO I TOUGERONA I JEGO ZASTOSOWANIE

Maciej Sękalski (Kielce)

Celem artykułu jest przedstawienie twierdzenia Bourbakiego i Tougerona, które jest pewnym uogólnieniem klasycznego twierdzenia o funkcjach uwikłanych. Oznaczmy $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$ i niech $H = H(x, y) \in C^\infty$, $H(0, 0) = 0$ będzie kiełkiem funkcji gładkiej. Twierdzenie podaje warunki dostateczne na to aby można było rozwiązać równanie $H(x, y) = 0$ ze względu na zmienną y w pewnym otoczeniu $0 \in \mathbb{R}^{n+m}$.

W celu sformułowania twierdzenia przyjmijmy następującą notację. Niech $\mathcal{E}(n)$ oznacza pierścień kiełków funkcji gładkich n zmiennych w otoczeniu zera i niech $\mathbf{m}(n)$ będzie jego ideałem maksymalnym, tzn $\mathbf{m}(n) = \{f \in \mathcal{E}(n) : f(0) = 0\}$. Jeżeli $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{E}(n)$ to przez (f_i) będziemy oznaczać ideał pierścienia $\mathcal{E}(n)$ generowany przez kiełki $f_1, \ldots, f_k$. W oznaczeniach utożsamiamy kiełki funkcji i odwzorowań z ich reprezentantami.

Twierdzenie *Załóżmy, że dla pewnego odwzorowania gładkiego* $\mathbb{R}^n \ni x \to y^0(x) \in$

$\mathbb{R}^m$ *zachodzi relacja*

$$H(x, y^0(x)) \equiv 0 \mod \left(\left(\frac{\partial H}{\partial y_i}(x, y^0(x)) \right)^2 \cdot \mathbf{m}(n) \right).$$

Wtedy istnieje odwzorowanie gładkie $x \to y(x)$ takie, że:

- $H(x, y(x)) \equiv 0,$
- $y(x) \equiv y^0(x) \mod \left(\left(\frac{\partial H}{\partial y_i}(x, y^0(x)) \right) \cdot \mathbf{m}(n) \right).$

Twierdzenie jest prawdziwe w dziedzinie zespolonej oraz w przypadku odwzorowań analitycznych.

Dowód twierdzenia jest podany w dalszej części artykułu. W tym miejscu zajmiemy się wnioskami.

Niech $f_1, f_2 : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ będą kiełkami funkcji gładkich. Mówimy, że kiełki f_1 i f_2 są równoważne, gdy istnieje dyfeomorfizm $h : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ taki, że $f_1 \circ h = f_2$.

Wniosek 1 *Jeżeli $f_1(x) \equiv f_2(x) \mod \left(\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x) \right)^2 \cdot \mathbf{m}(n) \right)$ oraz*

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(0) = \ldots = \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(0) = 0, \tag{1}$$

to kiełki f_1 i f_2 są równoważne.

Dowód. Przyjmijmy $H(x, y) = f_1(y) - f_2(x)$. Wtedy założenia twierdzenia są spełnione dla odwzorowania $y^0(x) = x$. Zatem istnieje przekształcenie $x \to h(x) \in \mathbb{R}^n$ takie, że

$$h(x) \equiv x \mod \left(\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x) \right) \cdot \mathbf{m}(n) \right). \tag{2}$$

Wystarczy pokazać, że h jest lokalnym dyfeomorfizmem. Relacja (2) oznacza, że $h(x) = x + \sum_{i=1}^n g_i(x) \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x)$, gdzie składowe odwzorowania $g_i(x)$ są elementami ideału $\mathbf{m}(n)$, a ze względu na równość (1) mamy $\frac{\partial f_1}{\partial x_i} \in \mathbf{m}(n)$. Wobec tego $h(x) = x + \sum_{i,j=1}^n G_{ij}(x) x_i x_j$ gdzie składowe odwzorowania $G_{ij}(x)$ należą do pierścienia $\mathcal{E}(n)$.

Wniosek 2 *Jeżeli $f \in \mathcal{E}(n)$, $f(0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(0) = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(0) = 0$ i wyznacznik Hessego* $\det \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0) \right)_{i,j=1,\ldots,n} \neq 0$, *to kiełki $f_1(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0) x_i x_j$ oraz f są równoważne.*

Dowód. Zauważmy, że

$$f_1(x) - f(x) \equiv 0 \mod \left(\mathbf{m}(n)^2 \cdot \mathbf{m}(n) \right).$$

Istotnie $\frac{\partial f_1}{\partial x_k}(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(0) x_j$, $k = 1, \ldots, n$. Ponieważ wyznacznik $\det \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0) \right)_{i,j=1,\ldots,n}$ jest różny od zera więc powyższy układ równań można rozwiązać względem $(x_1, \ldots, x_n)$. Stąd $\mathbf{m}(n) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x) \right)$. Zatem

$$f_1(x) - f(x) \equiv 0 \mod \left(\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x) \right)^2 \cdot \mathbf{m}(n) \right)$$

i teza wynika z wniosku 1.

Dowód twierdzenia: Rozważmy funkcję $\bar{H}(x, y) = H(x, y^0(x) + y)$. Wtedy założenia twierdzenia możemy sformułować następująco:

$$\bar{H}(x, 0) \equiv 0 \mod \left(\left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial y_i}(x, 0) \right)^2 \cdot \mathbf{m}(n) \right).$$

Pokażemy, że istnieje odwzorowanie gładkie $x \to y(x)$ takie, że

$$\bar{H}(x, y(x)) \equiv 0,$$

oraz

$$y(x) \equiv 0 \mod \left(\left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial y_i}(x, 0) \right) \cdot \mathbf{m}(n) \right).$$

W tym celu zapiszmy $\bar{H}$ korzystając z rozwinięcia Taylora względem zmiennej y:

$$\bar{H}(x, y) = H(x, 0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{H}}{\partial y_i}(x, 0) y_i + \sum_{r,s=1}^n G_{rs}(x, y) y_r y_s.$$

Przyjmijmy $y_k = \sum_{j=1}^n z_{kj} \frac{\partial \bar{H}}{\partial y_j}(x, 0)$ traktując $z = [z_{kj}]_{k,j=1,\ldots,n}$ jako zmienną w przestrzeni $\mathbb{R}^{n^2}$. Stąd

$$\begin{aligned}
&\bar{H}(x, y(z)) = \\
&\quad = H(x, 0) + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \bar{H}}{\partial y_i}(x, 0) \frac{\partial \bar{H}}{\partial y_j}(x, 0) z_{ij} + \\
&\quad + \sum_{r,s=1}^n G_{rs}(x, y(z)) \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \bar{H}}{\partial y_i}(x, 0) \frac{\partial \bar{H}}{\partial y_j}(x, 0) z_{ri} z_{sj} = \\
&\quad = \bar{H}(x, 0) + \sum_{i,j=1}^n \left(z_{ij} + \sum_{r,s=1}^n G_{rs}(x, y(z)) z_{ri} z_{sj} \right) \frac{\partial \bar{H}}{\partial y_i}(x, 0) \frac{\partial \bar{H}}{\partial y_j}(x, 0). \quad (3)
\end{aligned}$$

Założenie implikuje, że $\bar{H}(x, 0) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x) \frac{\partial \bar{H}}{\partial y_i}(x, 0) \frac{\partial \bar{H}}{\partial y_j}(x, 0)$ dla pewnych $g_{ij}(x) \in \mathbf{m}(n)$. Z klasycznego twierdzenia o funkcjach uwikłanych wynika, że istnieją funkcje gładkie $z_{ij} = z_{ij}(x)$, $z_{ij}(0) = 0$ spełniające układ równań

$$z_{ij} + \sum_{r,s=1}^{n} G_{rs}(x, y(z)) z_{ri} z_{sj} = -g_{ij}(x), \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Podstawiając je do równości (3) w miejsce $z = [z_{ij}]$ otrzymujemy równość

$$\bar{H}(x, y(z(x))) \equiv 0.$$

Wystarczy przyjąć $y(x) = y(z(x))$.

Aby pokazać, że $y(x) \equiv 0 \mod \left(\left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial y_i}(x,0)\right) \cdot \mathbf{m}(n)\right)$ zauważmy, że

$$y_k(x) = \sum_{j=1}^{n} z_{kj}(x) \frac{\partial \bar{H}}{\partial y_j}(x, 0) \in \left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial y_i}(x, 0)\right) \cdot \mathbf{m}(n).$$

Odnotujmy teraz użyteczny wniosek z twierdzenia i wniosku 1.

Twierdzenie 3 *Jeżeli kiełek funkcji gładkiej $f : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ spełnia warunek $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E}(n) / \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) < +\infty$, to f jest równoważny pewnemu wielomianowi Taylora kiełka f.*

Dowód. Oznaczmy $k = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E}(n) / \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$. Każdy jednomian stopnia k leży w ideale generowanym przez pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Stąd wynika, że każdy jednomian stopnia $2k+1$ należy do ideału $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \cdot \mathbf{m}(n)$. Niech teraz $f_{2k}(x)$ będzie wielomianem Taylora stopnia $2k$ funkcji f. Wtedy

$$f(x) \equiv f_{2k}(x) \mod \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \cdot \mathbf{m}(n)\right).$$

Z wniosku 1 otrzymujemy równoważność kiełków f i f_{2k}.

Stosując inną metodę można uzyskać twierdzenie dokładniejsze

Twierdzenie (Mather) *Jeżeli $f(0) = 0$ i $\mathbf{m}(n)^{r+1} \subset \mathbf{m}(n)^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ to kiełek f jest równoważny swojemu wielomianowi Taylora stopnia r.*

Jeżeli $k = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E}(n) / \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$, to założenie twierdzenia Mathera jest spełnione dla $r = k + 1$. Zatem f jest równoważny swojemu wielomianowi Taylora stopnia $k + 1$.

Literatura

[B] **N. Bourbaki**, *Algèbre commutative*, Fasc. XXVIII, chap 3 §4.5, Paris, 1961.

[G] **J. Geresz**, *Zarys podstawowych idei teorii Thoma*, Politechnika Wrocławska, Wrocław, 1980.

[KPR] **H. Kurke, G. Pfister, M. Roczen**, *Analytische Stellenalgebren*, Berlin–Heidelberg–New York, 1977, pp.49-52.

[T] **J. C. Tougeron**, *Idéaux de fonctions diffèrentiables*, Berlin–Heidelberg–New York 1972, pp. 56-57.

Bourbaki–Tougeron Theorem and Some Applications

Summary. Implicit function theorem according to Bourbaki and Tougeron is presented and some applications are given.

Łódź, 5 – 9 stycznia 2004 r.