MATERIAŁY NA XXVII KONFERENCJĘ SZKOLENIOWĄ Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ ZESPOLONEJ

2006 **Łódź** **str. 57**

O OSOBLIWOŚCIACH TYPU A_K

Maciej Sękalski (Kielce)

Niech $f = f(X,Y) \in \mathbb{C}\{X,Y\}$ będzie szeregiem dwóch zmiennych. Mówimy, że f ma osobliwość typu A_k w punkcie $O = (0,0)$, gdy istnieje analityczna zmiana współrzędnych $X = X(U,V)$, $Y = Y(U,V)$, jakobian $\frac{\partial(X,Y)}{\partial(U,V)}(0,0) \neq 0$ taka, że $f(X(U,V),Y(U,V)) = V^2 + U^{k+1}$. Bezpośrednio z definicji wynika, że jeżeli f ma osobliwość typu A_k, to ord $f = 2$ oraz f nie ma czynników wielokrotnych. Udowodnimy następującą

Własność 1 *Jeżeli f jest szeregiem rzędu 2, bez czynników wielokrotnych to f ma osobliwość typu A_k dla pewnego $k > 0$.*

Dowód: Dokonując ewentualnie liniowej zmiany zmiennych możemy założyć, że $f(X,Y) = Y^2 + \sum_{i+j\geq 2} a_{ij}X^iY^j$ i $a_{02} = 0$. Przyjmijmy

$$U = X, \quad V = \frac{\partial f}{\partial Y}.$$

Jakobian $\frac{\partial(U,V)}{\partial(X,Y)}(0,0) = 2 \neq 0$, wobec tego przekształcenie $(X,Y) \to (U,V)$ jest analityczną zmianą współrzędnych. Mamy

$$X(U,V) = U, \quad Y(U,V) = \frac{1}{2}V + const\cdot U + \text{wyrazy wyższych rzędów}.$$

Ponadto f we współrzędnych U, V ma następującą postać:

$$f(U,V) = V^2 P(U,V) + U^{k+1} Q(U),$$

gdzie $P(0,0) \neq 0$ oraz $Q(0) \neq 0$.

Istotnie $\frac{\partial f}{\partial V} = V \frac{\partial Y}{\partial V}$, zatem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial V^2}(0,0) = \left. \frac{\partial Y}{\partial V} + V \frac{\partial^2 Y}{\partial V^2} \right|_{(U,V)=(0,0)} = \frac{1}{2}$$

oraz

$$\frac{\partial^i}{\partial U^i} \frac{\partial f}{\partial V}(0,0) = 0$$

dla $i = 1, 2, \ldots$. Ponieważ f nie ma czynników wielokrotnych, więc istnieje k takie, że

$$\frac{\partial^{k+1} f}{\partial U^{k+1}}(0,0) \neq 0.$$

Przyjmijmy teraz $\bar{X} = U \sqrt[k+1]{Q(U)}$ oraz $\bar{Y} = V \sqrt{P(U,V)}$. Przekształcenie $(U,V) \to (\bar{X}, \bar{Y})$ jest analityczne i odwracalne, ponadto we współrzędnych $\bar{X}, \bar{Y}$ mamy

$$f = \bar{Y}^2 + \bar{X}^{k+1},$$

co kończy dowód.

Zauważmy, że zachodzi następująca:

Własność 2 *Jeśli f jest wielomianem stopnia $d > 1$ i ma osobliwość typu A_k, to $k \leq (d-1)^2$.*

Dowód: Załóżmy, że p jest punktem osobliwym wielomianu f, w którym osobliwość jest typu A_k. Liczba $k = \left(\frac{\partial f}{\partial X}, \frac{\partial f}{\partial Y}\right)_p$ nie przekracza sumy wszystkich liczb Milnora w punktach, które są rozwiązaniami układu $\frac{\partial f}{\partial X} = \frac{\partial f}{\partial Y} = 0$. Tezę otrzymujemy z twierdzenia Bezouta.

Powyższe oszacowanie można poprawić. Zachodzi

Własność 3 *Jeżeli wielomian f stopnia $d > 1$ ma osobliwość typu A_k, to $k \leq (d-1)(d-2)$, gdy f jest nierozkładalny w $\mathbb{C}[X,Y]$ oraz $k \leq (d-1)(d-2)+1$ w przypadku rozkładalnym.*

Dowód: Załóżmy, że C jest domknięciem rzutowym krzywej $f(x,y) = 0$ i niech $\mu_p(f) = k$. Propozycja 6.3 z pracy [G-P] mówi, że jeżeli C jest zredukowaną krzywą rzutową stopnia d, której lokalnym opisem w punkcie p jest $f(x,y) = 0$ oraz co najwyżej m jej komponent przechodzi przez punkt $p \in C$ to liczba Milnora $\mu_p(f) \leq (d-1)(d-2) + m - 1$. Ponieważ, rząd f w punkcie p jest równy 2, więc m przyjmuje wartość 1 lub 2 w zależności rozkładalności f.

Poniższa tabela podaje przykłady wielomianów nierozkładalnych stopni $d = 3, 4, 5$ realizujących równość w oszacowaniu z własności 3.

Wielomian	d	k
$Y^2 + X^3$	3	2
$\left(Y - X^2\right)^2 + XY^3$	4	6
$\left(Y - X^2\right)\left(Y - X^2 + 2XY^2\right) + Y^5$ (cf. [Y])	5	12

Dla wielomianów wyższych stopni mamy dokładniejsze oszacowanie podane w pracy [GZ-N]. Cytujemy je tutaj bez dowodu:

Twierdzenie 4 *Jeżeli wielomian stopnia d ma osobliwość typu A_k, to*

$$k \leq (d-1)^2 - \left[\frac{d}{2}\right] \cdot \left(\left[\frac{d}{2}\right] - 1\right),$$

gdzie $[\cdot]$ oznacza część całkowitą liczby.

Przykład.([GZ-N]) Niech $l = 3s + 1$, $m = 7s + 2$, $A(X,Y) = X^{4l} + 2X^{3l}Y^m - 2X^{2l}Y^{2m} + 4X^lY^{3m} - 10Y^{4m}$ oraz

$$F(X,Y) = Y^2 - 2YA(X,Y) + X^{8l} + 4X^{7l}Y^m.$$

Wielomian F ma stopień $d = 4m + 1 = 7l + m = 28s + 9$ oraz typ osobliwości A_k gdzie $k = 420s^2 + 269s + 42$.

Aby to pokazać zapiszmy F w postaci

$$F(X,Y) = (Y - A(X,Y))^2 + 56X^{3l}Y^{5m} - 56X^{2l}Y^{6m} + 80X^lY^{7m} - 100Y^{8m}.$$

i dokonajmy następującej zmiany zmiennych

$$\begin{aligned} U &= X, \\ V &= Y - A(X,Y). \end{aligned}$$

Wtedy

$$\begin{aligned} X &= U, \\ Y &= V + U^{4l} + \quad \text{wyrazy wyższych rzędów.} \end{aligned}$$

zatem we współrzędnych U, V wielomian F ma postać

$$F(U,V) = V^2 + 56U^{3l+20lm} + \sum a_{ij}U^iV^j = V^2 + 56U^{k+1} + \sum a_{ij}U^iV^j,$$

przy czym sumowanie rozciąga się na wskaźniki (i,j), dla których zachodzi nierówność $\frac{i}{k+1} + \frac{j}{2} > 1$. Aby pokazać, że $F(U,V)$ ma osobliwość typu A_k wystarczy zastosować następujący

Lemat 5 *Jeżeli $f(X,Y) = Y^2 + X^{k+1} + \sum_{\frac{i}{k+1}+\frac{j}{2}>1} a_{ij}X^iY^j$, to f ma osobliwość A_k.*

Dowód: Zapiszmy f w postaci

$$f(X,Y)=Y^2P(X,Y)+2YQ(X)+X^{k+1}R(X)$$

gdzie

$$\begin{aligned}P(X,Y)&=1+\sum_{\substack{\frac{i}{k+1}+\frac{j}{2}>1\\ j\geq 2}} a_{ij}X^iY^{j-2},\\ Q(X)&=\frac{1}{2}\sum_{i>\frac{1}{2}(k+1)} a_{i1}X^i,\\ R(X)&=1+\sum_{i>k+1} a_{i0}X^{i-(k+1)}.\end{aligned}$$

Wtedy $f(X,Y)=(Y\sqrt{P}+Q)^2+X^{k+1}R-Q^2$. Zauważmy, że ord $Q^2>k+1$ oraz $R(0)=1$, zatem przekształcenie

$$\begin{aligned}U&=X\sqrt[k+1]{R(X)-\tfrac{Q(X)^2}{X^{k+1}}},\\ V&=Y\sqrt{P(X,Y)}+Q(X)\end{aligned}$$

jest nieosobliwe oraz we współrzędnych (U,V) szereg f ma postać $f(U,V)=V^2+U^{k+1}$.

W pracy [L] autor podaje efektywną metodę sprowadzania szeregu f (ord $f=2$) do postaci występującej w lemacie 5. Mianowicie, niech $f=\sum a_{ij}X^iY^j$, $a_{02}\neq 0$; kładziemy $e_2=(a_{11})^2-4a_{20}a_{02}$. Jeżeli $e_2\neq 0$ to $k=1$. Jeżeli $e_2=0$ to przyjmujemy $f^2(X,Y)=f(X,Y-a_{11}(2a_{02})^{-1}X)=\sum a_{ij}^2X^iY^j$, $a_{02}^2=a_{02}$. Ponieważ $e_2=0$ więc $a_{11}^2=a_{20}^2=0$. Jeżeli $e_3=a_{30}^2\neq 0$, to $k=2$. W przeciwnym razie przyjmujemy $e_4=(a_{21})^2-4a_{40}^2a_{02}^2$. Jeżeli $e_4\neq 0$, to $k=3$. Jeżeli $e_4=0$, to przyjmujemy $f^4(X,Y)==f^2(X,Y-a_{21}^2(2a_{02}^2)^{-1}X^2)=\sum a_{ij}^4X^iY^j$. Procedurę kontynuujemy do uzyskania postaci w założeniu lematu 5.

Jako przykład rozważmy wielomian $f(X,Y)=(Y-X^2)(Y-X^2+2XY^2)+Y^5$ (cf. [Y]). Pokażemy, że f ma osobliwość typu A_{12}.

Mamy $e_2=0$,

$$f^2(X,Y)=f(X,Y)=Y^2-2X^2Y+X^4+\sum_{i/4+j/2>1} a_{ij}^2X^iY^j,$$

$e_3=0$, $e_4=(-2)^2-4\cdot 1\cdot 1=0$. Zatem

$$f^4(X,Y)=f^2(X,Y+X^2)=Y^2+2X^5Y+X^{10}+\sum_{i/10+j/2>1} a_{ij}^4X^iY^j.$$

oraz $e_5=0$, $e_6=(a_{31}^4)^2-4a_{60}^4a_{02}^4=0$, $f^6=f^4$, $e_7=0$, $e_8=0$, $f^8=f^6$, $e_9=0$, $e_{10}=2^2-4\cdot 1\cdot 1=0$. Przyjmujemy

$$f^{10}(X,Y)=f^8(X,Y-X^5)=Y^2-X^{13}+\sum_{i/13+j/2>1} a_{ij}^{10}X^iY^j,$$

mamy $e_{11} = 0$, $e_{12} = (a^{10}_{61})^2 - 4a^{10}_{12\,0}a^{10}_{02} = 0$, $f^{12} = f^{10}$, $e_{13} = -1$. Z lematu 5 wynika, że $k = 12$.

Literatura

[GZ-N] **S. M. Gusein-Zade, N. N. Nekhoroshev**, *Singularities of Type A_k on Plane Curves of a Chosen Degree*, Functional Analysis and Its Applications, Vol 34, No. 3, 2000.

[G-P] **J. Gwoździewicz, A. Płoski**, *Formulae for the singularities at infinity of plane algebraic curves*, Univ. Iagel. Acta Math, Fasc. XXXIX, 2001, 109 - 133.

[L] **I. Luengo**, *On the existance of complete families of projective plane curves, which are constructed*, J. London Math. Soc. (2) 36, 1987, 33 -43.

[Y] **H. Yoshihara**, *On Plane Rational Curves*, Proc. Japan Acad., 55, Ser. A (1979), 152 - 155.

On the A_k type singularities

Summary. The singularities of A_k type are studied. We give some bounds for the Milnor number k of the singularity of A_k given by a polynomial of two complex variables.

Łódź, 9 – 13 stycznia 2006 r.